**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI**

# İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ KANITLAMAYLA İLGİLİ GÖRÜŞLERİ VE KULLANDIKLARI KANIT ŞEMALARI

**DOKTORA TEZİ**

**Tuba İSKENDEROĞLU**

**TEMMUZ 2010**
**TRABZON**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI**

# İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ KANITLAMAYLA İLGİLİ GÖRÜŞLERİ VE KULLANDIKLARI KANIT ŞEMALARI

**Tuba İSKENDEROĞLU**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce**
**"Doktor (Matematik Eğitimi)"**
**Unvanı Verilmesi İçin Teslim Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 10/06/2010**
**Tezin Savunma Tarihi : 25/06/2010**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Adnan BAKİ**

**Jüri Üyesi : Prof. Dr. Alipaşa AYAS**

**Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Selahattin ARSLAN**

**Jüri Üyesi : Doç. Dr. Bülent GÜVEN**

**Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ziya ARGÜN**

**Enstitü Müdürü: Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU**

**Trabzon 2010**

# ÖNSÖZ

Öğretmen adaylarının kanıt ve kanıt yapma hakkında sahip oldukları bilgi ve beceriler; gelecekte sınıflarında öğrenme ve öğretme ortamlarını nasıl tasarlayacaklarını, öğrencilerinin açıklamalarına nasıl yaklaşacaklarını ve buldukları sonuçları savunmalarını nasıl değerlendireceklerini etkileyecektir. Bu bakımdan öğretmen adaylarının kanıt, kanıt yapma ve kullandıkları kanıt şemalarına odaklanma, bize onların sahip oldukları kanıt kavramları ve bunları nasıl kullandıkları, konu hakkında nasıl bir düşünce geliştirdiklerini ve ne tür açıklamalar yaptıkları bakımından çok değerli bilgilere ulaşmamızı sağlayacaktır. Bütün bunların öğretmen eğitimi programlarının gelişimine katkıda bulunacağı açıktır.

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalında yaptığım doktora çalışmam boyunca tez danışmanlığımı üstlenen, konu seçiminde ve araştırma sürecinde bana rehberlik eden, her türlü yardımını ve desteğini esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Adnan BAKİ'ye sonsuz şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarımda görüş ve önerilerinden yararlandığım, yapıcı eleştirileri ile bana yol gösteren sayın hocalarım Prof. Dr. Alipaşa AYAS ve Yrd. Doç. Dr. Selahattin ARSLAN'a teşekkür ederim. Ayrıca Prof. Dr. Salih ÇEPNİ, Doç. Dr. Bülent GÜVEN ve Yrd. Doç. Dr. Mehmet PALANCI'ya ve her türlü yardımlarıyla bana destek olan değerli meslektaşlarım Yrd. Doç. Dr. Tuba GÖKÇEK, Öğr. Gör. Dr. Gönül GÜNEŞ, Arş. Gör. İlknur ÖZPINAR, Arş. Gör. Hava İPEK ve Okutman Yasemin ŞENGÜN'e teşekkür ederim.

Çalışmama gönüllü olarak katılan ve uygulamalarımda bana yardımcı olan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarına teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca bana her yönden destek olan sevgili eşim Metin İSKENDEROĞLU'na ve sevgili arkadaşım Deniz Meltem TANSIK'a ve ayrıca sevgileri ile birlikte maddi manevi her an yanımda olduklarını hissettiğim annem Güler AYDOĞDU'ya, babam Bayram AYDOĞDU'ya ve kardeşim Demet AYDOĞDU'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Son olarak gülen yüzünü gördükçe bütün sıkıntı ve dertlerimi unuttuğum canım kızım İrem Cemre İSKENDEROĞLU'na sabrından dolayı teşekkür ederim.

Tuba İSKENDEROĞLU
Trabzon 2010

# İÇİNDEKİLER

ÖZET

Kanıtlar, matematikte her durumun doğruluğunu veya yanlışlığını sağlamaktadır. Kanıtlama sürecinde kullanılan kanıt şemaları ise öğrencilerin matematiksel durumlardaki düşünme tepkilerini görmek açısından önemlidir. Bu nedenle yapılan araştırmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda ne tür kanıt şemaları kullandıklarını tespit etmek, farklı sınıf seviyelerinde kullanılan kanıt şemalarının nasıl farklılaştığını ortaya koymak, öğretmen adaylarının matematiksel kanıta yönelik görüşlerini belirlemek, bu görüşlerinin farklı sınıf düzeylerine göre nasıl değiştiğini ortaya koymak ve öğretmen adaylarının matematiksel kanıta yönelik görüşleri ile fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemaları arasında paralellik olup-olmadığını tespit etmektir. Bu nedenle ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları kanıt şemaları ve matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşleri irdelenmiştir.

Öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemalarını ortaya koymak için yazılı sınav ve klinik görüşmeler uygulanmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının kanıta yönelik görüşlerini tespit etmek için "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" adı altında geliştirilmiş olan bir ölçek kullanılmıştır. Gelişimci araştırma yönteminin benimsendiği bu çalışmada ölçek farklı sınıf seviyelerinden 187, yazılı sınav 158 ve klinik görüşmelerde 16 ilköğretim matematik öğretmeni adayına uygulanmıştır.

Çalışmanın sonucunda, öğretmen adaylarının kanıta yönelik olumlu bakış açılarının olduğu ve sınıf seviyesi arttıkça da kanıt şemalarında en üst düzey olarak kabul edilen analitik şemaların kullanımında bir artış olduğu ortaya konulmuştur. Bunun yanı sıra kullanılan kanıt şemalarının sınıflara göre farklılaştığı ve ölçekte yer alan bazı faktörler ile şemalar arasında paralellik olduğu tespit edilmiştir. Çalışma sonuçlarına dayanarak, öğretmen adaylarının matematiksel düşünme ve kanıt yapma becerilerinin nasıl geliştirileceğine yönelik ve ayrıca bu becerilerin lisans düzeyindeki programlarda olmasının gerekliliği düşünülerek program geliştiricilere ve araştırmacılara çeşitli önerilerde bulunulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Kanıt, Kanıt Şemaları, İlköğretim Matematik Öğretmeni Adayları, Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği.

## SUMMARY

### PROOF SCHEMES USED BY PRERSERVICE MATHEMATICS TEACHERS AND THEIR IDEAS ABOUT PROOF

Proofs obtain whether a mathematical process is true or false. Proof schemas used at the proof process is important to see student's thinking and reactions during the mathematical situations. For this reason, the aim of this study is to determine what kind of proof schemes preservice mathematics teachers use about the functions subject; to reveal how different proof schemes differentiate between different grade levels; to determine preservice teachers' views regarding on mathematical proof and present how these views changed based on different grade levels; ascertain if there is a relations between preservice teachers' views on mathematical proofs and proof schemes that they used at functions topic. For this aim, preservice mathematics teacher's opinions on proof schemes they used and their ideas about making mathematical proof were investigated in the study.

To expose the proof schemes used by preservice teachers, written exams and clinical interviews were utilized. Also, to determine the views of preservice mathematics teachers about proofs, a questionnaire developed under the named as "Questionnaire for Constructing Mathematical Proof" was used. In the study conducted by developmental research method, the questionnaire was applied to 187 elementary mathematics preservice teachers, the written exam was applied to 158 preservice mathematics teachers and clinical interviews were conducted with 16 preservice mathematics teachers at various grade levels.

The results of the study has demonstrated that preservice teachers have positive views about proof and the usage of the analytic proof schemes accepted as the highest level among the proof schemes were increased by grade level. In addition, it is determined that the proof schemes were differentiated with different class levels and there was a parallelism between the some factors in the questionnaire-scale and the proof schemes. Based on the results of the study, some suggestions have been offered to the program developers and the researchers to improve preservice teachers mathematical thinking and proof construction abilities.



**Key Words:** Proof, Proof Schemes, Preservice Elementary Mathematic Teachers, Questionnaire for Constructing Proof at Mathematics Course.

## ŞEKİLLER DİZİNİ

**Sayfa No**

# TABLOLAR/ÇİZELGELER DİZİNİ

**Sayfa No**

# 1.GENEL BİLGİLER

## 1.1. Giriş

Kanıtlar, matematiği matematik yapan şeylerin en önemli bölümünü oluşturmaktadır (Padula, 2006). Çünkü kanıt, matematikte her durumun doğruluğunu veya yanlışlığını sağlamaktadır (Tall ve Mejia-Ramos, 2006). Fakat kanıt bir durumun sadece doğru veya yanlış olduğunu değil aynı zamanda neden doğru olduğunu da göstermektedir (Hanna, 2000). Ayrıca kanıt matematik yapmak, matematiksel iletişim kurmak ve matematiği kaydetmektir (Schoenfeld, 1994). Kanıt oluşturma ise matematiksel problem çözme gibidir ve doğru zamanda akla doğru bir fikrin gelmesidir (Selden ve Selden, 2003). Bunun yanı sıra kanıtlama bir bireyin veya topluluğun bir iddianın doğruluğu hakkındaki şüphelerini kaldırmakta kullanılan zihinsel eylem olarak tanımlanmaktadır (Harel ve Sowder, 1998; Harel ve Sowder, 2007; Harel, 2008). Ayrıca kanıtlama sezgilerin geliştirilmesi ve anlatılması için de güçlü bir yoldur (NCTM, 2000). Bu nedenle kanıt matematikte çok önemli bir yere sahiptir (Martin ve Harel, 1989; Coe ve Ruthven, 1994). Kanıtların da oluşum süreçleri vardır.

Birçok kanıtın oluşumu önceki kanıtların ve önceki oluşumların hiyerarşik yapısını temel almaktadır (Selden ve Selden, 2003). Bu nedenle kanıtın matematiğin tarihinde ve günümüzde her zaman yeri bulunduğu görülmektedir.

Geçerli matematiksel kanıtlar Eski Yunan matematiğine dayanmaktadır. Eski Yunan matematiğinde matematiksel kanıt bir sonucu doğrulamakta ve keşfetmekte, matematiksel iletişim kurmakta, diğerlerini ikna etmekte ve sonuçları tümdengelim sisteminde düzenlemekte kullanılıyordu (Almeida, 1999). Kanıt 19. yüzyıldan bugüne bir disiplin olarak matematiğin ayırt edici özelliklerinden biri olarak görülmektedir (Coe ve Ruthven, 1994). Çünkü Schoenfeld'in (1994) dile getirdiği gibi matematiksel düşünmede ilk olarak insanlar kendilerini, sonra bir arkadaşlarını ve son olarak da düşmanlarını inandırmalıdırlar. Bunun için de doğru anlamalı, doğruluğuna inandırmalı ve matematiksel fikirleri tartışmalıdırlar (Schoenfeld, 1994). Çünkü matematiksel fikirlerin tartışılması ve açıklanarak savunulması matematiksel kanıtların oluşumuna fırsat tanımaktadır.

Bell (1976) öğrencilerin düşüncelerindeki bakış açısı ile matematiksel kanıt hakkında ilk yayın yapan araştırmacılardandır. Matematiksel kanıtı ise "aslında ikna etmeye çalışırken izlenen genel etkinlik, her ne kadar bir hayali şüpheliye karşı içten davranılsa da” şeklinde tanımlamıştır. Bell’e (1976) göre kanıt üç anlam taşımaktadır:

- Bir önermenin doğruluğu ile ilgili doğrulama veya savunma,
- Bir önermenin neden doğru veya yanlış olduğunu açıklama,
- Aksiyomların sonuçlarını, temel kavramların ve teoremlerin tümdengelimli sistemi içinde düzenleyerek sistemleştirme (Bell, 1976). Bell’in dile getirdiği kanıtın bu üç anlamı aslında kanıtın aşamalarını meydana getirmektedir.

Bir kanıt üç aşamadan oluşmaktadır. Buna bağlı olarak da bir kanıt üç aşamada tamamlanmaktadır:

- Birinci aşamada iddianın doğruluğu araştırılır. Bu nedenle bu aşama doğrulama aşaması olarak adlandırılmaktadır.
- İkinci aşamada iddianın niçin doğru olduğunun açıklaması yapılır. Bu ise açıklama aşamasıdır.
- Üçüncü ve son aşamada ise genelleme koşulları kontrol edilerek soyutlama yapılır. Bu aşamada kanıt için yapılanlar matematiksel dil kullanılarak en kısa yoldan soyutlaştırılır (Baki, 2008).

Bell’e göre matematiksel kanıt; savunma, açıklama (neden) ve sistemleştirme (nasıl)’dir. Bunlara bağlı olarak kanıtın en önemli işlevi öğrencilerin inançlarına zemin hazırlamaktır. Kanıtın ikinci işlevi öğrencilerin bir sonucu anlamalarını ve bu sonucun neden doğru olduğunu anlamalarını sağlamaktır. Üçüncü işlevi ise fikirlerin mantıksal yapısını açıklamak ve akıl yürütme ile tümdengelimsel çıkarımlar yapmalarını sağlamaktır (Coe ve Ruthven, 1994). Geleneksel bakış açısı ile ise matematiksel kanıtın temel rolü bir teoremin sonucunu doğrulamaktır (Avigad, 2005). Matematiksel kanıta dair çalışma yapan farklı araştırmacılarda bulunmaktadır.

Matematiksel kanıt bir arkadaşı veya bir düşmanı ikna etmekten ziyade iki önemli düşünceye dayanmaktadır. Bunlardan ilki tanımların ve durumların kesin ve açık olarak sağlanması ve diğeri de kabul edilen prosedürler yardımıyla bir durumdan diğerinin doğruluğunun anlaşılmasını sağlamaktır (Tall, 1989). Bunun yanı sıra bir durumun matematiksel kanıtı çoğunlukla dört ana işleve sahiptir: (i) bir durumun doğrulanması; (ii) bir durumun açıklanması; (iii) (i) ve (ii)’nin iletilmesi yani doğrulanan ve açıklanan durumun iletilmesi ve (iv) bir durumun tümdengelimli bir sistemde sistemleştirilmesi (Almeida, 2000). Diğer bir ifadeyle matematiksel kanıt, bir sonucu doğrulamak, başkalarını bilgilendirmek ve bu bilgiye ikna etmek, bir sonuç bulmak ve bu sonuçları bir sistem içine yerleştirmek için kullanılır (Almeida, 2003). Ayrıca matematiksel kanıt matematiksel bilgi için gerekçe sağlamasının yanı sıra matematik yapmak ve matematiği anlamak için de önemli bir etkinliktir (Ernest, 1991). Bunun yanı sıra matematiksel kanıt bir bireyin etkinliği olarak bir kavramın tanımını ve mantıksal sürecini anlamayı içermemekte aynı zamanda kavramın tanımının ve mantıksal sürecinin nasıl ve neden işlediğini de kavramayı içermektedir(Tall, 1992). Matematiksel kanıtın iki farklı öğesi bulunmaktadır.

Matematiksel kanıtın öğelerinden bir tanesi akıl yürütmedir (Mingus ve Grassl, 1999). Akıl yürütme kanıtlama sürecinde kullanılan araçlardan biri (Almeida, 1996) olmasının yanı sıra öğrencilerin sınıfta yaptıkları açıklamalar, keşfetmeler ve düzenlemeler akıl yürütme ile birleştiğinde genellemelere daha kolay ulaşmaktadırlar (Reid, 2002). Bu süreçte öğrencilerin kullandıkları çelişkiler akıl yürütme becerilerinin gelişmesini sağlamaktadır. Bunun için de verilen durum ile başlanmalı, yanlış olduğu görülmeli ve sonucunda da bir çelişkiye ulaşılmalıdır (Szombathelyi ve Szarvas, 1998).

Matematiksel kanıtın bir diğer öğesi de iletişimdir. Matematiksel kanıt, bulguların ve akıl yürütmelerin duyurulmasında, matematiksel fikirlerin inşasında, genellemeleri öğrenmekte ve sunmakta bir yol olarak kullanılmaktadır. Yani kanıt başkalarına bir açıklama yapma ve onları bir nedene ikna etme olarak kullanılmaktadır (Mingus ve Grassl, 1999; Hanna, 2000). Fakat öğrenciler buldukları sonuçları açıklamakta zorlanmaktadırlar. Oysaki öğrencilerin yanıtlarına delil göstermelerinin veya kanıtlamalarının matematiksel düşüncenin gelişmesinde ve değişmesinde önemli bir rolü bulunmaktadır (Flores, 2002). Çünkü öğrencilerin buldukları sonuçları açıklamaya ve savunmaya çalışmaları sembol ve algoritmaları daha anlamlı bir şekilde kullanmalarını sağlayacaktır (Forman vd., 1998).

Matematik bilimin kralı ve uşağı olduğu gibi kanıt da matematiğin kralı ve uşağı olarak düşünülmektedir. Bu nedenlerden dolayı da kanıt matematiğin temelidir (Mingus ve Grassl, 1999; Tall, 1998) ve matematikte çok önemli bir yere sahiptir (Hanna, 2000). Çünkü matematikte birçok şey daha önceki yapılara veya temellere dayanmaktadır. Matematikçiler ise kanıt yoluyla ve bu yapıları kullanarak kabul edilebilir yeni yapılar oluşturmaktadırlar. Bu da matematiğin gelişmesi ve büyümesi için bir temel yaratmaktadır (Mingus ve Grassl, 1999). Fakat öğrenciler genellikle matematiksel kanıtın gereğine inanmamaktadırlar. Oysa öğrencilerin matematik problemlerine ürettikleri çözümlerin doğruluğundan emin olmaları kadar bundan nasıl emin oldukları da önemlidir.

Savunma ve kanıtın gelişimi üzerine önceden yapılan araştırmalar öğrencilerin ortaokuldaki çalışmalarına veya öğrencilerin ilköğretimin ikinci kademesinden üniversite düzeyine kadar geçen süredeki çalışmalarına odaklanmaktadır (Bell, 1976; Martin ve Harel, 1998). Bununla birlikte öğrencilerin formal kanıt yapmayı veya daha soyut kanıtları yapmayı nasıl öğrendikleri ile ilgili de önemli çalışmalar bulunmaktadır (Maher ve Martino, 1996).

Matematiksel gerçeklik veya doğruluk yani matematiksel otorite pratikte insanların elleriyle ve zihinleriyle hazırlanmaktadır. Matematiksel doğruluk için de ortak standartlar vardır. Sınıfın bir amacı da sınıfı matematiksel karar verebilme topluluğu haline getirmektir (Schoenfeld, 1994). Çünkü öğrencilerin yanıtlarına delil göstermelerinin veya kanıtlamalarının öğrencilerdeki matematiksel düşüncenin gelişmesinde ve değişmesinde önemli bir yeri vardır (Flores, 2002). Bunun yanı sıra öğrencilerin buldukları sonuçları açıklamaya ve savunmaya çalışmaları onların sembol ve algoritmaları daha anlamlı bir şekilde kullanmalarını sağlayacaktır (Forman vd., 1998). Bu süreçte öğretmenlerin tutumları da önemlidir.

Birçok öğretmen çok az matematik bildiklerinin farkındadır fakat bazıları derinlemesine matematiksel bilgilerinin olmadığının farkında değildirler. Matematik öğretmenleri "matematik bilmek" üzerine derinlemesine düşünmelidirler. Çünkü matematik öğretmenlerinden beklenen; matematik bilmenin ne anlama geldiğini ve önemli matematiksel düşüncelerden ne anladıklarını düşünmeleridir. Matematik bilmek ne demek sorusuna bir lise öğretmeni "Eğer matematiksel bir fikri öğretebiliyorsan matematiksel fikri biliyorsundur" yanıtını vermiştir. Oysa öğretmek, bilme ile aynı değildir çünkü bir matematiksel fikri bilmek kavramsal ve işlemsel bilgiyi içeren matematiksel uzmanlık gerektirmektedir. Fakat öğretmene bilme, öğretmeyi çağrıştırmaktadır. Çünkü öğretmenler, öğretme ile ilgilenmektedirler (Masingila, 1998). Oysa ki öğretmenlerin matematik eğitiminde hangi değerleri öğrettiklerinin yanı sıra öğrencilerin öğretmenlerinden hangi değerleri öğrendikleri de önemlidir (Bishop, 2001). Eğer öğretmenlerin bu konuda kendi tereddütleri varsa öğrencileri kanıtlamaya teşvik etmeleri zorlaşabilir.

Öğretmen sınıfta problemleri kendisi çözerse, öğrenciler problemin sadece bir tek çözüm yolu olduğuna ve problemi hızlı çözmenin kavramsal anlamadan daha önemli olduğuna inanabilirler (Forman vd., 1998). Ayrıca öğrenciler öğretmenlerinin söylediklerinin doğruluğuna inandıkları için soru sormayabilirler. Bunun sonucunda da birçok öğrenci, matematikte öğrendiklerinin doğruluğunu anlamak için kendi yollarını geliştiremeyebilirler. Bu yüzden öğretmenlerin öğrencileri buldukları yanıtın doğruluğunu kanıtlamak konusunda desteklemeleri ve öğrencilerin matematikte geliştirdikleri stratejilere göre derslerini planlamaları önerilmektedir. Çünkü böylece çocuklar küçük yaşlarda matematikte öğrendikleri her şeyin doğruluğunu öğretmen veya kitap gibi bir otoriteye bağlayarak, her şeyin doğruluğunu kabul etmek yerine soru sormaya ve sorgulamaya da başlayarak kendi yöntemlerini geliştirebilirler (Flores, 2002). Böylece öğrenciler matematiksel bağlantıları kurarak matematiğin gerçek güzelliğini de görebileceklerdir (Szombathelyi ve Szarvas, 1998).

Sunulan deliller ve öğretmenlerin yaklaşımları öğrencilerin kanıtı anlamalarını sağlamaktadır. Çünkü öğrenciler öğretmenin sunduklarını, açıklamalarını ve düşüncelerini alarak daha sonra da var olan yapılarıyla birleştirmektedirler (Galbraith, 1995). Fakat öğretmenlerin birçoğu kanıtı öğrencilere nadiren amacına uygun olarak göstermektedirler (Knuth, 1999; Knuth, 2002b).

Öğretmenlerin ve öğrencilerin okul matematiğini anlamlı öğrenmeleri için kanıtın bir araç olduğunu fark etmeleri gerekmektedir. Öğrenciler, okullardaki kanıtı genellikle formal ve anlamsız bulmalarının yanı sıra öğretmen için yapılan anlamsız alıştırmalar olarak görmektedirler (Knuth, 2002a). Çünkü öğretmenler tipik olarak kanıtı öğretmekle uğraşmaktadırlar. Genellikle öğretmenlerin bu süreçte kullandıkları senaryo (1) tanımlanmış kanıtları tartışmak, (2) mantıksal basamakları sunmak fakat nedenleri öğrencilerin bulması için bırakmak, (3) bir kanıt yapmak ve (4) uygulamada öğrencilerin de aynı mantığı kullanacakları başka bir ifade vermek şeklindedir. Genelde bu süreçte sağlanan durum doğru olduğu bilinen bir durumdur. Yani öğretmenler bir kanıtı modellemekte, ne yapıldığını anlatmakta, mantığını açıklamakta ve öğrencilerin izlemesini ummaktadırlar (Galbraith, 1995). Diğer bir ifadeyle öğretmenler öğrencilerin zihinsel yapılarını oluşturmaları için gerekli fırsatı tanımadan her şeyi hazır olarak sunmaktadırlar. Oysaki kanıtın öğrencilere kazandırdığı becerilerin matematik eğitiminde önemli bir yeri vardır.

Martino ve Maher (1999) öğretmenlerin öğrencilere keşfedebilmeleri için gerekli zamanı tanımaları gerektiğini belirtmektedirler. Çünkü böylece öğrencilere yeni fikirler öğrenme, modeller inşa etme, diğer kaynaklardan dinleme ve bazen de kendi kavram yanılgılarını görme olanağı sağlanmış olacaktır. Diğer bir deyişle, bu öğrenme ortamında tartışarak yeni fikirleri savunmayı, kabul etmeyi ve önceki bilgileri ile birleştirmeyi öğrenmektedirler (Martino ve Maher, 1999). Bu da öğretmenlere öğrencilerin matematiksel fikirleri anlamalarını değerlendirme olanağı sağlamaktadır (Martine ve Maher, 1994). Oysa geleneksel sınıflarda matematik çoğu kez genel olarak ele alınmakta ve öğretmenler kanıtları öğrencilerin oluşturmalarına fırsat tanımadan doğrudan öğrencilere sunmaktadırlar. Bu durumda öğrenciler bilgi oluşumunda yer almayarak sadece pasif bilgi alıcısı durumuna geçmektedirler. Oysa kanıtlar ve teoremler insan etkinliklerinin bir ürünü olup matematik yapmanın bir parçasıdır. Bu yüzden öğrencilere matematiksel savunmayı kavramsallaştırma konusunda yardım edilmesi önerilmektedir (Harel ve Sowder, 1998). Çünkü savunmayı kavramsallaştırarak kullanan öğrenciler kendi kanıtlarını üreterek kanıt şemalarını kullanmaya başlayacaklardır.

Kanıt şemaları öğrencilerin matematiksel durumlardaki düşünme tepkilerini görmek açısından önemlidir. Kanıt şemaları bir insanın neyle ikna olduğunu ve diğerlerini ikna etmek için neyi tercih ettiğini göstermektedir (Harel ve Sowder, 1998). Bunun içinde matematik öğretiminde kanıtlara ve kanıt şemalarına yer verilmesi önemlidir.

Birçok araştırmacı kanıtın, matematik öğretiminde farklı işlevleri olduğuna dikkat çekmiştir (Bell, 1976; Hanna ve Jahnke 1996; de Villiers 1999; Hanna vd., 2006). Buna göre matematiksel kanıtın matematik öğretiminde yedi işlevi tanımlanmaktadır. Bunlar;

- Doğrulama (bir durumun doğruluğunu sağlama),
- Açıklama (bir durumun neden doğru olduğunu anlama),
- Keşfetme (yeni sonuçların icadı veya buluşu),
- Sistemleştirme (aksiyomların, kavramların ve temel teoremlerin birçok sonucunu tümdengelim sistemi içinde organize etme),
- Zihinsel meydan okuma (iyi bilinen bir olguyu yeni bir çatıda birleştirme ve yeni bir perspektiften bakma),
- İletişim (bir tanımın veya bir fikrin sonuçlarının anlamını araştırma),
- Deneysel bir teori oluşturma.

Bu açıklamalardan da görüldüğü üzere matematiğin temelini oluşturan kanıtın matematik eğitiminde de önemli bir yeri bulunmaktadır. Bu süreçte yer alan doğrulama, keşif ve sistemleştirme aksiyomatik kanıt şemasında kullanılırken açıklama, nedensellikte; iletişim ise kanıtın alt işlemleri, doğrusunu anlama ve ikna etmede kullanılmaktadır. Bunun yanı sıra zihinsel meydan okumanın kanıt şemalarında yeri yoktur (Harel ve Sowder, 2007).

### 1.2. Araştırmanın Gerekçesi

Eğitim fakültelerindeki matematik, ilköğretim ve ortaöğretim okullarındaki matematik konularıyla paralellik göstermekte ve o konuları kapsayarak daha üst düzeyde ele almaktadır. Bu süreçte ise nasıl öğrenilirse öyle öğretilir gerçeği göz önünde bulundurulduğunda eğitim fakültelerinde okutulan ders içeriklerinin daha çok ayrıntı içermesi gerekliliği ortaya çıkmaktadır (Baki, 1996; Baki, 2008). Çünkü öğretmenin, öğrencideki yeteneği ortaya çıkarabilmesi için öncelikle öğretmenin kazandırılacak beceride yetenekli ve yaratıcı olması gerekmektedir (Baki, 1999). Bunun için de öğretmenlerin gerekli donanıma sahip olmaları gerekmektedir (Moralı vd., 2006). Çünkü bu donanıma sahip bir öğretmen, öğrencilerdeki yaratıcılığın gelişebilmesi için sınıf içinde farklı yapıları ve farklı becerileri geliştirmeye yönelik durumlara yer verebilecektir. PISA'da da farklı becerilere yönelik olarak belirlenmiş matematik yeterlik düzeyleri bulunmaktadır.

PISA (**P**rogramme for **I**nternational **S**tudent **A**ssessment) 2006'da matematik testindeki sorular PISA 2003'de olduğu gibi matematik yeterlik için altı düzey olarak belirlenmiştir. PISA matematik yeterlik ölçeğinde yer alan 6. düzeyde "Öğrenciler kavramsallaştırabilirler, modelleyebilirler ve genelleyebilirler. Bilgi kaynakları ve gösterimleri arasında bağlantı kurabilir ve dönüşüm yapabilirler. Öğrenciler ileri seviyede matematiksel düşünme ve akıl yürütme yeteneğine sahiplerdir. Bu becerilerini yeni problem durumlarını çözmek için gerekli olan stratejileri geliştirmek amacı ile kullanıp uygulayabilirler. Ayrıca bulgularını, yorumlarını, görüşlerini ve tüm bunların verilen durum ile olan uygunluğunu tasarlayıp yapmış oldukları işlemleri doğru bir şekilde iletebilirler." şeklinde tanımlanmaktadır. Düzey 5'de karmaşık durumlar için modeller geliştirebilme, kapsamlı, iyi geliştirilmiş düşünme ve akıl yürütme becerilerini kullanarak stratejik bir biçimde çalışabilme, yorumlarını ve akıl yürütmelerini formüle edip matematiksel dili kullanarak iletebilme yer almaktadır. Düzey 4'de ise karmaşık somut durumlar için belirtilmiş modellerle etkili bir biçimde çalışabilme, yorumlarına, iddialarına ve eylemlerine dayanan açıklamalarını oluşturabilme ve matematiksel dili kullanarak iletişim becerileri sergileyebilme bulunmaktadır. Diğer üç düzey ise daha ziyade bilgi, kavrama ve uygulama düzeyindedir(MEB, 2005d; URL-2, 2006; URL-3; MEB, 2007; OECD, 2008).

PISA'da yer alan yeterliklere üst düzeyde sahip olma ile kanıt şemalarından analitik şemaların genel özellikleri birbiri ile paralellik göstermektedir. Oysa ki Türkiye'den PISA'ya katılan öğrencilerin yalnızca %1'i Düzey 6'ya ulaşırken %3'ü Düzey 5'de, %8'i Düzey 4'de, %15'i Düzey 3'de, %23'ü Düzey 2'de, %30'u Düzey 1'de ve %20'si de Düzey 1'in altında yer almaktadırlar (URL-3, 2006; MEB, 2007). Bunun yanı sıra Türkiye sekizinci sınıflar arasında yapılan PISA gibi uluslar arası bir sınav olan TIMMS-1999'da 38 ülke arasından matematik genelinde 31. ve geometri genelinde de 34. sırada yer alabilmiştir (URL-4, 2002; Olkun ve Aydoğdu, 2003; Toluk, 2003). Bunlara ek olarak Türkiye'deakıl yürütme ve matematiksel düşünme üzerine yapılan farklı bir çalışmada da sekizinci sınıf öğrencilerinin matematiksel akıl yürütme ve düşünmede sorun yaşadıkları ortaya konulmuştur (Yeşildere ve Türnüklü, 2007). Bununla birlikte Çolak, Bulut ve Argün de (2005) yaptıkları çalışmada öğrencilerin, kendilerinden beklenenin sadece sonuç olduğunu ve bu nedenle de çözüm süreci boyunca neyi neden yaptıklarını bildiklerini fakat ifade edemediklerini ortaya koymuşlardır. Buradan da öğrencilere kazandırılması beklenilen akıl yürütme, kavramsallaştırma, genelleştirme gibi üst düzey becerilere Türkiye'deki öğrencilerin yeterli ölçüde ulaşamadıkları görülmektedir. Oysaki öğrencilere tanınan fırsatlar farklı becerilerin gelişmesinde önemli bir rol oynamaktadır.

Geleneksel sınıflarda ise matematik çoğu kez genel olarak ele alınmakta ve öğretmenler kanıtları öğrencilerin oluşturmalarına fırsat tanımadan doğrudan öğrencilere sunmaktadırlar. Bu durumda öğrenciler bilgi oluşumunda yer alamamakta, sadece pasif bilgi alıcısı durumunda olmaktadırlar. Oysa kanıtlar ve teoremler insan etkinliklerinin bir ürünü olup matematik yapmanın bir parçasıdır (Harel ve Sowder, 1998). Kanıtlar, öğrencilerin öğretmenlerine veya kitaplarına güvenmelerini engelleyerek matematiksel doğruları kendilerinin görmelerine ve bağımsız düşünmelerine fırsat vermektedir (Knuth, 1999; Knuth, 2002b). Ayrıca öğrencilerin yanıtlarına delil göstermelerinin, savunmalarının veya kanıtlamalarının öğrencilerdeki matematiksel düşüncenin gelişmesinde ve değişmesinde önemli bir yeri vardır (Flores, 2002; Moralı vd., 2006). Çünkü öğrencilerin buldukları sonuçları açıklamaya ve savunmaya çalışmaları onların sembol ve algoritmaları daha anlamlı bir şekilde kullanmalarını sağlayacaktır (Forman vd., 1998).

Öğrencilerin kanıtlama sürecindekullandıkları kanıt şemalarıise düşünmenin bir yolu olmasının yanı sıra (Harel, 2008a) kanıt şemaları ile birlikte yapılan savunma öğrencilerdeki kavram yanılgılarını da ortaya koymaktadır (Sowder ve Harel, 1998; Martino ve Maher, 1999). Bunun yanı sıra kanıt şemaları genellemeleri tahmin ettirmekte, önseziyi zenginleştirmekte, yeni olguları keşfetmeyi sağlamakta ve zihni yaşama geçirmektedir. Böylece öğrenciler matematikteki önceki fikirleri de yeniden tahmin edebilmektedirler (Reid, 2002). Öğrenciye kanıt ve akıl yürütme becerisinin öğretimi ve gelişimi öğretmene bağlıdır(Riley, 2004; Altıparmak ve Öziş, 2005).

Eğer öğretmenler öğrencileri için geniş öğrenme ortamı sunar ve değişik kanıt yöntemlerini verirlerse, öğrenciler de matematiği ve mantıksal düşünceyi daha iyi anlayıp yaratıcılıklarını artıracaklardır (Altıparmak ve Öziş, 2005).Öğrencilerde matematiksel düşüncenin ve kavramsal bilginin gelişmesinde öğretmenlerin yanı sıra sınıf içinde yapılan sorgulamalar önemli bir rol oynamaktadır (Martino ve Maher, 1999). Ayrıca öğretmenlerin sınıf içinde kullandıkları materyaller de öğrencilerin kanıt kapasitelerini artırmakta etkilidir (Stylianides, 2007c). Bu yüzden öğretmenlerin kanıta ilişkin algıları, deneyimleri ve yetenekleri öğrencilerin kanıt becerilerini kazanma süreçlerinde etkili olmaktadır (Galbraith, 1995; Knuth, 1999; Knuth, 2002b; Almeida, 2003; Moralı, vd., 2006). Öğretmenlerin matematik derslerini etkili bir şekilde planlayarak uygulayabilmeleri için ise kazandıracakları kavramın nereden geldiğini, hangi matematiksel bilgi veya ilke üzerine kurulu olduğunu bilmeleri gerekmektedir. Bunun için de kendilerinin matematiksel kanıt yapma yönünden donanımlı olmaları gerekmektedir (Moralı vd., 2006). Bu donanımın sağlanabilmesi için ise kanıt etkinliklerine küçük yaşlarda başlanarak (Szombathelyi ve Szarvas, 1998; Stylianides, 2005; Stylianides, 2007b) yeni matematiksel bilgiler öğrencilerin informal bilgilerinin üstüne inşa edilmelidir (Ginsburg ve Seo, 1999).

Bunlara rağmen birçok öğretmen sınıf ortamlarını kanıtların değerini düşünerek düzenlememektedirler (Knuth, 1999; Knuth, 2002a). Bunun sonucunda da öğretmenlerin öğrencilere kanıt ve kanıt yapmanın doğasından uzak etkinlikler sundukları görülmektedir (Jones, 2000). Oysaki öğretmenlerin inançları ve fikirleri, öğretmenlerin davranışlarını önemli ölçüde etkilemektedir (Erickson, 1993). Bu nedenle matematik öğretmenlerinin matematik bilmenin ne anlama geldiğini ve önemli matematiksel düşüncelerden ne anladıklarını düşünmeleri gerekmektedir (Masingila, 1998). Bu süreçte öğretmenlerin matematik eğitiminde hangi değerleri öğrettiklerinin yanı sıra öğrencilerin öğretmenlerinden hangi değerleri öğrendikleri de önemlidir (Bishop, 2001). Çünkü öğrencilerin gelişiminde öğretmenlerin önemli bir yeri vardır.

Araştırmalar gösteriyor ki her düzeydeki öğrenciler matematiksel kanıtı anlamakta, anlayıp sevmekte ve oluşturmakta büyük zorluklar yaşamaktadırlar (Martin ve Harel, 1989; Moore, 1994; Harel ve Sowder, 1998; Jones, 2000; Güven vd., 2005). Oysa matematik derslerinin amaçlarından biri öğrencilere kanıtlama becerisini kazandırmaktır. Bu nedenle öğrencilerin performanslarının değerlendirilmesinde kanıttaki yeterlilikleri göz önünde bulundurulmaktadır (Weber, 2001). Kanıtlama matematikte önemli bir etkinlik olmasına rağmen kanıtı vermekte lisans düzeyinde ciddi zorluklar bulunmaktadır (Almeida, 2000). Bunun sonucunda üniversite öğrencileri kanıtlamada zorluklar yaşamaktadırlar (Senk, 1983; Moore, 1994; Harel ve Sowder, 1998; Dreyfus, 1999; Almeida, 2000; Jones, 2000; Recio ve Godino, 2001; Weber, 2001; Weber, 2004; Knapp, 2005; Stylianides vd., 2005; Stylianides vd., 2007) ve kanıt stratejileri genellikle yetersizdir (Weber, 2001). Çünkü kanıtla deneyimleri genellikle öğrencilere anlamlı gelmemektedir (Galindo, 1998). Bunun sonucunda da üniversite öğrencilerinin kanıtı algılama şekilleri, kanıt yapmalarını etkilemektedir (Moore, 1994; Tatar ve Dikici, 2008).

Bu noktada ise ilköğretim öğretmen adaylarının kanıta bakış açıları önem kazanmaktadır. Bu nedenle de öğrencilerin doğrulama ve kanıt ile deneyimlerinin ana kaynağı ilköğretim öğretmenleridir ve kanıt, ilköğretim programında çok sınırlı da olsa yer almaktadır (Martin ve Harel, 1989). NCTM (2000), öğretim programlarının matematiksel tartışmaları ve kanıtları geliştirmeye ve değerlendirmeye yer vermesi gerektiğini ifade etmektedir. İlköğretim düzeyinde kanıt becerilerinin ne düzeyde ve nasıl olması gerektiğine dair araştırmalar yapıldığında NCTM (2007) standartlarında akıl yürütme ve kanıt ölçütlerine rastlanmaktadır. Türkiye'de ise ilköğretim matematik öğretim programında doğrudan kanıt ve kanıtlama ile ilgili herhangi bir kazanım bulunmamaktadır fakat akıl yürütme ve ilişkilendirme gibi bazı becerilerin geliştirilmesi ile çözümlerin açıklanması ve savunulmasına yer verilmektedir (MEB, 2005a; MEB, 2005b). Bu nedenle öğrenciler doğrulama, açıklama, savunma ve kanıt ile deneyimlerine ilköğretim düzeyinde bir giriş yapmaktadırlar (Martin ve Harel, 1989).

Matematik ve eğitiminde kanıtın anlamı ve önemi giderek artmaktadır. Bu nedenle ileride matematikçi olabilecek öğrencileri yetiştirecek öğretmen ve öğretmen adaylarının kanıt yapma düzeyleri, kanıt hakkındaki görüşleri ve algıları önemlidir (Moralı vd., 2006). Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının kanıtın matematiksel ve pedagojik görünüşü ile ilgilenirken ne anladıklarını ve bildiklerini anlamak da önemlidir (Dickersen, 2006). Fakat matematik öğretmeni adaylarının mantık yürütme ve kanıt yapmada sorun yaşadıkları görülmektedir (Moralı vd., 2004). Bu sorunlardan biri de kanıtı sadece bir açıklama olarak görmeleridir. Bu da öğretmen adaylarının kanıt kavramını anlamadıklarını göstermektedir (Dane, 2008). Bu nedenle de öğretmen adayları kanıtlara yeterince değer vermemektedirler

(Yıldız, 2006). Oysa ki öğretmen adaylarının kullandıkları kanıtlar, kanıta bakış açıları ve kanıtı yapma sürecinde izledikleri yol ilerde öğretmen olduklarında kanıt ile ilgili yapacakları sınıf içi etkinliklerini etkileyecektir. Bu nedenle öğretmen adaylarının öğretmenlik yapacakları yaş gruplarına kazandırmaları gereken kanıt becerilerinin ne düzeyde ve nasıl olması gerektiğinden de haberdar olmaları gerekmektedir. Bu süreçte öğrencilerin öğrenmesi beklenilen kavram da çok önemlidir.

Fonksiyon kavramı yaklaşık olarak son 10 yıldır matematik eğitiminin odaklandığı önemli konulardan biridir (DeMarois ve Tall, 1996a). Fonksiyon kavramı bütün matematiğin temelinde yer almakta (Carlson, 1995; (Dubinsky ve Harel, 1992; DeMarois ve Tall, 1996b; LeVeque, 2003) ve matematikteki kavramları birleştirmektedir. Ayrıca matematiğin farklı dalları (Carlson, 1995) ve matematiksel düşünmelerde de temel oluşturmaktadır (LeVeque, 2003). Dünyadaki birçok ülkede matematik programlarına bakıldığında fonksiyon kavramı üzerine inşa edildikleri görülmektedir (Akkoç, 2006). NCTM (1989) standartlarına göre fonksiyon kavramı programdaki diğer birçok kavramın üst kavramıdır. Bu nedenle fonksiyonlar konusu tüm programa yayılmıştır. Fakat matematik eğitimcilerinin önemle üzerinde durdukları fonksiyon kavramı matematiğin temel taşlarından biri olmasına rağmen öğrencilerin çoğunun pek çok güçlük ve dolayısıyla kavram yanılgısı yaşadıkları bir konu olmaktan çıkamamıştır (Kabael, 2010).

Fonksiyonlar konusunun zihinde yapılanma sürecinde ortamın da önemli etkileri olduğu söylenebilir. Çünkü bilgi bireyin çevresiyle aktif etkileşimi sonucunda kurulmaktadır (Baki, 2002). Bu nedenle bilgi bireye doğrudan aktarılmamalı çünkü bilgi bireyin hem fiziksel ve hem de sosyal çevresi ile etkileşimi sonucunda oluşmaktadır (Lefoe, 1998). Öğrencilerin akıl yürütme, varsayımda bulunma, doğrulama ve genelleme becerilerini geliştirme noktasında sınıftaki öğrenme ortamları devreye girmektedir.

Öğretmen sınıfta problemleri kendisi çözerse, öğrenciler problemin sadece bir tek çözüm yolu olduğuna ve problemi hızlı çözmenin kavramsal anlamadan daha önemli olduğuna inanabilirler (Forman vd., 1998). Ayrıca öğrenciler öğretmenlerinin söylediklerinin doğruluğuna inandıkları için soru sormayabilirler. Bunun sonucunda da birçok öğrenci matematikte öğrendiklerinin doğruluğunu anlamak için kendi yollarını geliştiremeyebilirler. Bu yüzden öğretmenlerin, öğrencileri buldukları yanıtın doğruluğunu kanıtlamak konusunda desteklemeleri ve öğrencilerin matematikte geliştirdikleri stratejilere göre derslerini planlamaları önerilmektedir. Çünkü böylece çocuklar küçük yaşlarda matematikte öğrendikleri her şeyin doğruluğunu öğretmen veya kitap gibi bir otoriteye bağlayarak, her şeyin doğruluğunu kabul etmek yerine soru sormaya ve sorgulamaya da başlayarak kendi yöntemlerini geliştirebilirler (Flores, 2002). Böylece öğrenciler matematiksel bağlantıları kurarak matematiğin gerçek güzelliğini de görebileceklerdir (Szombathelyi ve Szarvas, 1998).

Son yıllarda, matematik derslerinde ve aynı zamanda da matematik eğitimi araştırmalarında akıl yürütme ve kanıt gibi konular ön plana çıkmaktadır (Heinze ve Reiss, 2003). Bütün bunlara rağmen öğrencilerin matematik problemlerine ürettikleri çözümleri savunmak gereğini pek duymadıkları görülmektedir (Sowder ve Harel, 1998; Flores, 2002; Flores, 2006). Çünkü öğrenciler geleneksel materyaller ile matematiği anlamsız kurallar olarak öğrenmektedirler (Research Advisory Committee, 1996). Oysa ki öğrencilerin kanıtlamaları ve kendi kanıtlarını üretmeye başlamaları uzun bir süreç gerektirmektedir (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003). Fakat eğer istenirse de çok değişik kanıtlar üreterek farklı şemalar kullandıkları görülmektedir (Sowder ve Harel, 1998; Flores, 2002; Flores, 2006). Öğrencilerin değişik şemalar kullanmalarında ise öğrencilerde matematiğin temelini oluşturan ilköğretim öğretmenlerinin etkisi son derece önemli bir yer tutmaktadır. Bu nedenle de ilköğretim öğretmenlerine ve dolayısıyla da geleceğin öğretmenleri olacak öğretmen adaylarına çok önemli görevler düşmektedir. Bu sebeple öğretmen adaylarının matematiğin temelini oluşturan fonksiyonlar konusunda bir düşünme biçimi olarak ne tür kanıt şemaları kullandıkları son derece önemlidir.

Yurtdışında öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin kanıt hakkındaki düşüncelerini, kanıta bakış açılarını ve kanıtlama süreçlerini ortaya çıkarmaya yönelik çok sayıda araştırma yapılmıştır (Jones, 1997; Harel ve Sowder, 1998; Almeida, 2000; Jones, 2000; Recio ve Godino, 2001; Raman, 2001; Weber, 2001; Knuth, 2002b; Raman, 2002; Almeida, 2003; Housman ve Porter, 2003; Raman, 2003; Solomon, 2006; Stylianides vd., 2007). Yurtdışında kanıt konusunda birçok çalışma yapılmış olmasına rağmen ülkemizde bu alanda sınırlı sayıda çalışmaya rastlanmakta ve bu konu ile ilgili yeterli çalışma yapılmadığı görülmektedir (Özer ve Arıkan, 2002).

Yukarıda açıklanan tüm bu sebeplerden dolayı ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıta bakış açılarını ve kullandıkları kanıt şemalarını incelemek şu an için oldukça yeni ve üzerinde çalışılması gereken bir alandır. Çünkü literatürde ve özellikle de Türkiye’de fonksiyonlar konusunda ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları kanıt şemaları ile ilgili sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır.

### 1.3. Araştırmanın Problemi

Matematik ve matematik eğitiminde kanıtın önemi giderek artmaktadır. Buna bağlı olarak da matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının da kanıt yapma konusundaki görüşleri ile ne düzeyde kanıt yaptıkları da önemli olacaktır (Moralı vd., 2006). Çünkü öğretmenlerin kanıta ilişkin algıları ve deneyimleri öğrencilerin kanıt yapma becerisi kazanma süreçlerinde etkili olmaktadır (Almeida, 2003). Kanıtların ardından ise kanıt şemaları gelmektedir.

Kanıt şemaları, kanıtlama ile işbirliği içinde olan bir düşünme biçimi (URL-1, 2006) olduğundan dolayı öğrencilerin kanıt kavramlarının bir taksonomisidir (Harel ve Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 1998; Harel, 1999; Harel, 2001). Kanıt şemaları bir insanın veya bir topluluğun bir şeyden nasıl emin olduğunu/olduklarını ve nasıl ikna ettiğini/ettiklerini ortaya koymaktadır. Bu tanım bilişsel, epistemolojik ve öğretici düşüncelerden doğmuştur ve bir bireyin veya bir topluluğun kanıt kavramını içermektedir (Harel ve Sowder, 2007). Bir düşünme biçimi olan kanıt şemaları bir bireyin tespitlerini ve ikna etme biçimlerini birlikte tanımlamaktadır (URL-1, 2006). Bu nedenle bir bireyin kanıt şeması kendisi için araştırma yaparken ve kendisini ikna etmeye çalışırken oluşmaktadır (Harel ve Sowder, 1998; Harel, 2001). Yani bir insanın kanıt şeması araştırarak öğrendiği ve kendisini ikna ettiği oluşumlardan meydana gelmektedir. Bunun yanı sıra kanıt şemaları bireyin savunma metotlarından oluşmaktadır (Harel, 2005). Bu da kanıt şemalarının düşünmenin bir yolu olduğunu göstermektedir (Harel, 2008a) ve kanıt şemaları bir hiyerarşi göstermemektedir. Bu nedenle de bir birey aynı zamanda farklı içeriklerde farklı kanıt şemaları kullanabilmektedir (Harel ve Sowder, 1998; Nardi ve Iannone, 2008**).** Ayrıca kanıt şemaları içerikten içeriğe, kişiden kişiye, topluluktan topluluğa ve aynı topluluktaki nesilden nesile de değişmektedir (Harel ve Sowder, 1998; Weber, 2001; Raman, 2003; Harel ve Sowder, 2007). Bunun için kanıt şemalarının hepsi gerçek öğrenciler ile yapılan araştırmalarda öğrencilerin eylemlerinden türetilmiştir (Harel ve Sowder, 1998; Harel, 2001).

Kanıt şemaları öğrencilerin matematiksel gelişimlerindeki zihinsel aşamaları sunmaktadır. Kanıt şemaları ile öğrencilerin anlama düzeylerini ve öğrencilerin ikna oldukları kanıt tekniklerini belirlemek mümkün olmaktadır (Knapp, 2006). Kanıt şemaları öğrencilerin matematiksel durumlardaki düşünme tepkilerini görmek açısından önemlidir. Kanıt şemaları; bir insanın matematiksel bir durumun doğruluğuna veya yanlışlığına neyle ikna olduğunu ve diğerlerini ikna etmek için neyi tercih ettiğini göstermektedir (Harel ve Sowder, 1998). Öğrencilerin düşünme tepkilerini gösteren farklı kanıt şemaları farklı araştırmacılar için merak konusu olmuştur. Buna bağlı olarak da kanıt şemaları ile ilgili farklı çalışmalar bulunmaktadır (Harel ve Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 1998; Flores, 2002; Flores, 2006). Fakat Türkiye'de bu konu ile ilgili sadece birkaç tane çalışma bulunmaktadır. Bu nedenle bu çalışmada aşağıdaki problem ve alt problemlere yanıt aranacaktır.

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları kanıt şemalarını irdelemeyi amaçlayan bu çalışmanın temel problemini "İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemaları nelerdir ve kanıta yönelik görüşleri farklı sınıf seviyelerine göre nasıl bir değişim göstermektedir?" sorusu oluşturmaktadır. Bu temel probleme bağlı olarak aşağıdaki alt problemlere yanıt aranacaktır.

1. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıta yönelik görüşleri nelerdir ve farklı sınıf seviyelerine göre görüşleri nasıl farklılaşmaktadır?
2. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemaları nelerdir ve farklı sınıf seviyelerine göre fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemaları nasıl farklılaşmaktadır?
3. Farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarının matematiksel kanıta yönelik görüşleri ile fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemaları arasında paralellik var mıdır?

### 1.4. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın temel amacı ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda ne tür kanıt şemaları kullandıklarını tespit etmenin yanı sıra farklı sınıf seviyelerinde kullanılan kanıt şemalarının nasıl farklılaştığını ortaya koymaktır. Bunun yanı sıra bu araştırmanın amaçlarından bir diğeri ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıta yönelik görüşlerini belirlemek ve bu görüşlerinin farklı sınıf düzeylerine göre nasıl farklılaştığını ortaya koymaktır. Ayrıca bunların sonucunda farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarının matematiksel kanıta yönelik görüşleri ile fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemaları arasında paralellik olup olmadığını tespit etmektir. Bu bağlamda da ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemaları ve matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşleri irdelenmiştir.

Bu araştırmanın amacını gerçekleştirmede öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemalarını ortaya koymak için bir yazılı sınav uygulanmıştır. Fakat katılımcıların kullandıkları kanıt şemalarını ortaya koymak için derinlemesine inceleme yapılması gerektiği için yazılı sınav yeterli olmayacaktır. Bu nedenle yazılı sınavın yanı sıra seçilmiş olan katılımcılar ile klinik görüşmeler de yapılması uygundur. Ayrıca katılımcıların matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşlerinin alınmasında da likert türü maddeler ile açık uçlu sorular içeren bir ölçeğin uygulanmasına gerek duyulmaktadır. Dolayısıyla bu araştırma kapsamında farklı sınıf seviyelerindeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemalarını, matematiksel kanıta yönelik görüşlerini ve kullanılan şemalar ile görüşler arasında paralellik olup olmadığını ortaya koymaya yönelik olarak gelişimci araştırma yöntemi yürütülerek gerçek resmin ortaya çıkarılmasına katkı yapılmaya çalışılmıştır.

### 1.5. Araştırmanın Önemi

Matematiksel kavramlar çocuklar dünyaya geldikten sonra ilk birkaç ayda oluşmaya başlamaktadır (Wynn, 1992). Bu yüzden çocuklar formal eğitime başlamadan önce matematiksel kavramlarını ve becerilerini oluşturmaya başlamaktadırlar. Bu süreçte matematiksel bilgiyi dışarıdan alamadıkları için anladıkları biçimde bireysel yapılarını oluşturmaktadırlar. Bu yüzden öğrenciler okul matematiğine başladıklarında informal bilgilerini kullanarak oluşturdukları matematiksel kavramlara güvenmekteler ve daha ileri yapıları bunların üzerine inşa etmektedirler (Ginsburg ve Seo, 1999). Güvendikleri bu matematiksel kavramlar matematiğin ne olduğunu anlamalarına da yardımcı olmaktadır. Bu süreçte ise onlara matematiğin ne olduğunu açıklamalıyız.

Matematik sadece neyin doğru olduğunu veya neyin işlediğini anlamak değil aynı zamanda neden doğru olduğunu veya neden işlediğini de açıklamak ve diğerlerini ikna etmektir (Almeida, 1996). Çünkü matematik yaşayan ve nefes alan bir disiplindir. Bu disiplinde doğruluk; bireysel ve ortak olarak yani matematiksel iletişimin üyeleri ile karar verebilme etrafında yaşamını sürdürmektedir. Matematik bilimin deseni ve matematiksel etkinliklerin konusu olduğu için matematikte yapıların farkına varma, bağlantıları görebilme, sembolik desenlere etki edebilme, tahmin etme, kanıtlama, uygulama ve genelleme ifadelerinin hepsi de değerlidir (Schoenfeld, 1994). Bu değerlerden kanıtın matematikteki yeri ise daha farklıdır.

Matematik eğitimcileri için açıklamalardan, iddia ve kanıta geçiş değişmez ve süreklidir (Dreyfus, 1999). Çünkü matematik yapmanın temel yollarından biri kanıttır. Eğer öğretmenler matematik bilmenin ne anlama geldiğini bilirlerse bazı temel matematiksel fikirleri de bilmediklerini görebileceklerdir (Masingila, 1998). Çünkü araştırmalara göre öğrenciler gibi birçok öğretmen de kanıt kavramında zorluklarla karşılaşmaktadırlar (Galindo, 1998). Öğretmenler kanıtın ne olduğunu anlamalılar, kanıt için neye ihtiyaç olduğunu ve bir tahmin kanıtlanırken nasıl yapıldığını bilmelilerdir. Öğretmenler kanıtlamaktalar ama kanıtlamanın ne anlama geldiğini düşünürken zorlanmaktadırlar (Masingila, 1998). Bunun için öncelikle matematik eğitimcileri kanıtın öğretimdeki rolünü anlamalılar ki sınıf içinde kullanımını artırabilsinler (Hanna, 2000). Bu noktada ise ilerde öğretmen olacak öğretmen adaylarının kanıt ve kanıtlama hakkındaki düşünceleri önemlidir.

Bu nedenle bu çalışmada ilerde ilköğretim 6-8. sınıflarda matematik öğretmeni olacak öğretmen adayları ile öğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemalarına odaklanılmıştır. Çünkü öğretmen adayları ilerde öğretmen olduklarında geleceğin bireylerini yetiştireceklerdir. Bu bireyleri yetiştirme sürecinde ise kanıt şemalarının önemli bir yeri bulunmaktadır. Çünkü kanıt şemaları bir bireyin veya bir topluluğun kanıt kavramını ortaya koymasının yanı sıra düşünmenin de bir yoludur (Harel ve Sowder, 2007). Böylece öğretmen adaylarının bir kanıtı oluştururken nasıl bir düşünce yapısı geliştirdikleri de ortaya konabilir. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının bir kavram hakkındaki yanlış anlamaları veya varsa kavram yanılgıları da düşünme ve açıklama sürecinde ortaya çıkabilir. Böylece öğretmen adayları kendilerindeki eksiklikleri görerek bunları giderme olanağı da bulmuş olurlar.

Öğrencilerin değişik şemalar kullanabilmeleri için kanıtlara erken yaşlarda başlanması uygun görülmektedir. Çünkü böylece öğrencilerin kanıtlamadan önce kanıtlama sürecinde kullandıkları farklı becerileri oluşmakta ve gelişmektedir. Bu süreçte ise öncelikle öğrencilerde akıl yürütme becerisi gelişmektedir. Öğrenciler akıl yürütme sürecinde ise sorgulamakta, kritik düşünebilmekte, açıklamakta ve matematiksel savunma yapabilmektedirler (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003). Bu becerileri gelişen öğrencilerin kendi kanıtlarını üretmeleri daha kolay olmaktadır. Bu becerilerin gelişiminde ise öğretmenlere önemli roller düşmektedir. Çünkü öğrencilerin kanıt ile deneyimlerinin ana kaynağı matematik öğretmenleridir. Bu yüzden matematik öğretmenlerinin matematiksel kanıt oluşturmaktan ne anladıkları kanıtı doğrudan öğretmemeleri için önemlidir (Martin ve Harel, 1989). Çünkü öğretmenler kanıtı doğrudan öğrettiklerinde öğrenciler doğru kanıtın sadece bu yol olduğunu düşünerek öğretmeni bir otorite olarak görebilirler.

Kanıtlama sürecinde önemli olan öğrencilerin açıklamalarını herhangi bir otoriteye dayandırmalarından ziyade kendilerinin yapmalarıdır. Çünkü eğer öğrenci konuyu genel olarak ezberlemiş ve konu hakkında düşünme sürecine girmemişse açıklamasını herhangi bir otoriteye dayandırmaktadır. Fakat önemli olan öğrencinin ezberlemesinden ziyade kendi zihinsel yapısını oluşturarak konu hakkında düşünce geliştirmesidir. Bu da ancak öğrencilerin nedenlerini açıklamaları ile gelişmektedir. Böylece de öğrenciler matematiksel düşüncelerini geliştirme fırsatı bularak kendi kanıt şemalarını kullanmaya başlayacaklardır. Bu nedenle de ilerde öğretmen olacak öğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemalarını görmek önemlidir.

Ayrıca, öğrencilerin çoğu nasıl kanıtlayacağını, kanıtlamaya nereden başlaması gerektiğini, kanıtlama sürecinde kullanması gereken kavramsal bilgileri, tanımları ve bunları nasıl kullanması gerektiğini bilmemektedir. Bu nedenle öğrencilerin kanıtlarken düştükleri hataların nedenini anlamak için öğrencilerin kanıtlama süreçlerini incelemek gerekmektedir (Weber, 2001). Oysa literatürde öğrencilerin kullandıkları kanıt şemalarını belirlemeye yönelik olarak uluslar arası alanda farklı çalışmalar bulunsa da Türkiye'de bu konu ile ilgili sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır. Bunun yanı sıra farklı sınıf seviyelerindeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları kanıt şemalarına dair bir tek çalışma bulunurken kullanılan şemaların farklı sınıf seviyelerine göre değişimini ortaya koyan ulusal ve uluslar arası bir araştırmaya rastlanmamıştır. Ayrıca şu ana kadar yapılan çalışmalar ilköğretim ve ortaöğretim düzeyindedir. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarını konu alan çalışmaların ise daha sınırlı olduğu görülmüştür. Bu çalışmalardan biri sınıf öğretmenliği adayları ile Baki, İskenderoğlu ve İskenderoğlu'nun (2009) yaptığı bir çalışmadır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları kanıt şemaları hakkında ise şu ana kadar sadece Sarı, Altun ve Aşkar'ın (2007) bir çalışmasının olması sebebiyle, yapılan bu araştırmanın literatürde yer alan boşluğu dolduracağı düşünülmektedir. Bu nedenle bu çalışma farklı öğrenim seviyelerindeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları kanıt şemalarını ve sınıf seviyelerine göre değişimi ilk kez ortaya koymaya yönelik olarak ulusal ve uluslar arası literatüre önemli bir katkı sağlayacaktır.

Bu çalışma her ne kadar gelecekte öğretmen olacak öğretmen adayları üzerinde yürütülmüş olsa da onlar aynı zamanda öğrencidirler. Kanıt ve kanıt yapmaya ilköğretim ve ortaöğretim programlarında sınırlı yer verilmektedir. Bu nedenle de öğrenciler üniversiteye geldiklerinde bu konuda eksiklikleri bulunmaktadır. Dolayısıyla bir öğrenci olarak öğretmen adaylarının kanıt hakkında nasıl düşündüklerini ortaya koyma eğitimcilere, öğretmen adaylarının sahip oldukları akıl yürütme, sorgulama yaptıkları soyutlamalar hakkında varsayımda bulunma fırsatı vermesinin yanında kullandıkları kanıt şemalarını da ortaya koyacaktır. Bu ise ilköğretimde ve ortaöğretimde mevcut matematik öğretim programının ve uygulamalarının yeniden gözden geçirilmesine katkıda bulunacaktır. Süregelen uygulamaların tasarım ve işleyişine ışık tutacaktır. Bunun yanı sıra matematikte birçok konunun temelini oluşturan fonksiyonlar konusunda ki eksikliklerini de görmek mümkün olacaktır. Bütün bunlar ise kanıt ve kanıt yapma konusunda çıkarımlarda bulunmaya yardımcı olacaktır. Dolayısıyla bu çalışma öğretim ve değerlendirme boyutlarında matematik eğitimine katkı sağlayacak, program geliştirme çalışmalarına da ışıktutacaktır.

Yurtdışında kanıt konusunda son yıllarda birçok çalışma yapılmıştır (Almeida, 2000; Jones, 2000; Recio ve Godino, 2001; Raman, 2001; Weber, 2001; Knuth, 2002b). Bu da gösteriyor ki matematik ve eğitiminde kanıtın anlamı ve önemi giderek artmaktadır (Heinze ve Reiss, 2003) fakat ülkemizde bu alanda sınırlı sayıda çalışmaya rastlanmakta ve bu konu ile ilgili yeterli çalışma yapılmadığı görülmektedir (Özer ve Arıkan, 2002). Oysa matematikçi olabilecek öğrencileri yetiştirecek öğretmen ve öğretmen adaylarının kanıt yapma düzeyleri, kanıt hakkındaki görüşleri ve algıları önemlidir (Moralı vd., 2006). Bu araştırmada kullanılacak olan “Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği” de ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıta yönelik görüşlerini gösteren bir araçtır. Bu ölçek yurt dışında lisans seviyesindeki matematik öğrencilerinin kanıta yönelik görüşlerini değerlendirmek için kullanılmasına rağmen (Lee, 1999) bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarına uygulanacaktır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıta yönelik görüşlerinin tespit edilmesi sebebiyle hem ileride uluslar arası ve hem de ulusal düzeyde yapılacak benzer araştırma sonuçlarıyla karsılaştırma olanağı sunması bakımından ulusal ve uluslar arası literatüre önemli bir katkı sağlayacaktır.

Yukarıda açıklanan nedenlerden dolayı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları kanıt şemalarını ve kanıta bakış açılarını tespit etmek üzerinde durulması gereken bir konudur. Öğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemalarını ve kanıta yönelik bakış açılarını ortaya koymak, öğretmen adaylarının düşünce biçimlerini ve ne tür kanıtlar kullandıklarını ortaya koymak açısından da önemlidir.

### 1.6. Araştırmanın Sınırlılıkları

1. Araştırma Karadeniz Teknik Üniversitesi'nde öğrenimlerine devam eden ilköğretim matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Bu süreçte 16 öğretmen adayı ile klinik görüşme yapılmıştır. Böylece daha derinlemesine bilgi elde edileceği düşünülmüştür. Bu nedenle bu araştırmanın sonuçları başka üniversitelerde öğrenimlerine devam eden öğretmen adaylarına genellenemez.
2. Öğretmen adaylarının kanıt şemalarının analizi, klinik görüşmede yer alan fonksiyonlar konusu ile ilgili problemlerle sınırlıdır.

### 1.7. Araştırmanın Varsayımları

1. Katılımcıların ölçeği içtenlikle yanıtlandırdıkları kabul edilmektedir.
2. Klinik görüşmeye katılan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının görüşmeler boyunca tüm sorulara içtenlikle yanıt verdikleri kabul edilmektedir.
3. Öğretmen adaylarına uygulanan ölçeğin kapsam ve dil geçerliği ile görüşmelerde kullanılan problemlerin uygunluğu konusunda alınan uzman görüşlerinin yeterli olduğu varsayılmaktadır.

### 1.8. Kuramsal Çerçeve ve Konuyla İlgili Çalışmalar

Bu bölümde matematiksel kanıtın öğelerinden olan matematiksel akıl yürütme, matematiksel iletişim ve matematiksel savunmadan, kanıtların sonucunda meydana gelen kanıt şemalarından, öğrencilerin ve öğretmenlerin kanıta bakış açılarından ve kanıt şemaları ile ilgili yapılmış olan uluslar arası ve ulusal çalışmalardan bahsedilecektir.

### 1.8.1.Akıl Yürütme

Çocuklardaki akıl yürütme becerisini geliştirmek matematik eğitiminin önemli amaçlarından biridir (Fitzgerald, 1996). Akıl yürütme becerisinin gelişmesi için ise öncelikle öğrencilerde farklı becerilerin gelişmesi gerekmektedir. Bunardan bir tanesi de yüksek düzeyde sorgulama yapabilmektir.

Matematikte, çocuklarda sorgulamanın gelişmesi yıllar alabilmektedir. Yüksek düzeyde sorgulama sürecinde öğretmenlerin yönelttikleri açık uçlu sorular (Martino ve Maher, 1999) öğrencilerde yüksek düzeyde düşünmeyi sağlamaktadır (Wimer vd., 2001). Öğrenciler sorgulama ile daha karmaşık problem çözme stratejileri geliştirmektedirler (Martino ve Maher, 1999). Öğretmenlerin problemleri gerçek hayattan seçmeleri, öğrencilerin problem çözerken hesap makinesi ve bilgisayar kullanmalarına fırsat tanımaları, öğrencilerin yüksek düzey konulara odaklanmasına olanak sağlamaktadır. Bu da öğrencilerin yüksek düzeyde düşünme becerilerini geliştirmelerine ortam yaratmaktadır (Nicely, 1989). Yüksek düzeyde sorgulama ile gelişen akıl yürütmenin matematik eğitiminde önemli bir yeri bulunmaktadır.

Matematiksel akıl yürütmeyi geliştirmek matematik eğitiminin merkezinde yer almaktadır. Çünkü matematiksel akıl yürütme matematik eğitiminde açıklamalarda kullanılan yollardan biridir (Reid, 2002). Ayrıca akıl yürütme, delili değerlendirme, açıklama yapma ve karşısındakini inandırmayı da içermektedir. Bunun yanı sıra genelleme sürecinde de akıl yürütmenin yeri bulunmaktadır (Zack, 1999). Genelleme sürecinde yer alan akıl yürütme bazı basamaklardan oluşmaktadır.

Kanıt üretiminde kullanılan ilk düşünce türü olan buluşsal düşüncenin (Raman, 2003) ardından kanıt üretimine kuralları gözlemlemekle başlanmaktadır (Raman, 2003; Tall, 2006). Akıl yürütmenin ilk basamağında da somut deliller bulunmaktadır. “2+3 nedir?” veya “3+2 nedir?” soruları öğrenciler için gayet açık sorulardır. Öğrenciler bir sayıyı diğerinin üstüne sayarak sonuca ulaşabilmektedirler. Başka örneklerden sonra da çocuklar 2+3=3+2’nin geçerliliğini görerek bu sonucun doğru olduğuna başka bir çocuğu kolayca inandırmaktadırlar. Bu özel örnekler akıl yürütmenin veya kanıtlamanın en düşük basamağını oluşturmaktadır. Daha sonra tekrarlanan örneklerden a+b=b+a genellemesine giderek a ve b’ye hangi değerleri verirlerse versinler doğru olduğunu görmektedirler (Fitzgerald, 1996). Formal bir ifadeyle a+b=b+a özel bir matematiksel yapıdır, çünkü bir aksiyomdur (Tall, 2006). Çocuklar somut deliller ile başlayan akıl yürütmenin sonucunda genellemeye ve hatta bazı durumlarda da aksiyomlara ulaşmaktadırlar.

Akıl yürütme matematiksel nedenleri içermektedir. Matematiksel nedenlerin gelişmesinde başka birisine kendi fikrini/fikirlerini açıklamak önemlidir. Çünkü birisi fikrini açıklarken diğerlerinin de düşünceleri oluşmaktadır (Whitenack ve Yackel, 2002). Bunun sonucunda da sınıfta aktif katılımcıların olduğu bir topluluk oluşmaktadır (Martino ve Maher, 1999). Öğrencinin aktif katılımını sağlayan diğer bir etmen de yerinde kullanılan teknolojidir. Teknoloji grafiksel, sayısal veya sembolik verilerle matematiksel akıl yürütmeye yardım etmektedir (Baki, 2002; Heid vd., 2002). Böylece teknoloji ile ilgileri artan öğrenciler akıl yürütmenin yardımıyla problemlerin çözümleri için yeni fikirler oluşturabilmektedirler. Yeni fikirlerin keşfedilmesi sürecinde bir durumun doğruluğunun açıklanmasının veya matematiksel savunmanın da yeri bulunmaktadır.

### 1.8.2. Matematiksel Savunma

Öğrencilere göre bir başkasına bir çözümün geçerliliğini savunma yani kanıt inşa etme doğal gelmemektedir (Martino ve Maher, 1999). Bunun yerine öğrenciler seçtikleri stratejileri paylaşmaktadırlar (Martin vd., 2000). Çünkü birçok öğrenci çözümün savunma için yeterli bir delil olduğunu düşünmektedir (Martino ve Maher, 1999). Oysa matematiksel savunma bilişsel ve sosyal bir ilerlemedir (Simon ve Blume, 1996). Çünkü matematiksel tartışmalar savunma içermektedir ve matematiksel savunmalarda da öğrencilerin açıklamaları bulunmaktadır (Whitenack ve Yackel, 2002). Bu süreçte ise öğrenciler çözümü oluşturup, birbirleriyle anlaşıp, sunulan çözümün geçerliğine inandıktan sonra çözümü savunmaya veya genellemeye hazır olmaktadırlar (Martino ve Maher, 1999). Çünkü öğrenciler bir düşüncelerini açıklarken diğer öğrenciler için kendi düşüncelerini açıklığa kavuşturmaktadırlar. Savunmada ise öğrenciler kendi düşüncelerini doğrulamaktadırlar (Whitenack ve Yackel, 2002).

Bilginin topluluklarla paylaşılmasını ve bu süreçte oluşturulan nedenlerin gelişmesini sağlayan matematiksel savunma beş düzeyden oluşmaktadır. Çözümün doğruluğunu savunma düzeyleri Simon ve Blume (1996) tarafından şu şekilde belirlenmiştir.

Düzey 0: Savunma yerine motivasyon içeren yanıtlar,

Düzey 1: Dışsal otoriteye başvuru,

Düzey 2: Deneysel gösteri,

Düzey 3: Genel örneklerle savunulan tümdengelim,

Düzey 4: Özel örneklerle savunulan tümdengelim (Simon ve Blume, 1996).

Genç öğrenciler için savunma, bir durumun doğruluğuna ikna etmekte durumun yetersiz derecede tekrar edilmesini içermektedir. Bu nedenle de bir önermenin savunmasını yaparken verilen durumla ilgisi olmayan önceki bilgilerini veya önyargı içeren fikirlerini kullanmaktadırlar. İleriki düzeylerde ise öğrenciler delil ve neden gösterme ihtiyacını hissetmektedirler (Galbraith, 1995). Bu ihtiyaçlarının sonucunda da savunmanın ardından kanıtlara yönelmektedirler.

Matematiksel kanıtlar savunmanın son noktasıdır (Sowder & Harel, 1998). Bu nedenle matematiksel savunma öğrencilerde matematiksel kanıtların oluşumuna fırsat tanımaktadır.

### 1.8.3. Kanıtın Matematik Eğitimindeki Yeri

Kanıt, matematik eğitiminde seçkin bir yere sahip olmasına rağmen (Hanna, 2000 birçok öğrenci için anlaşılmazdır (Galbraith, 1995). Oysa anlamanın bir yolu olan kanıt (URL-1, 2006) farklı içeriklerde farklı anlamlara gelmektedir. Bir yargıca veya jüriye göre mantıklı bir şüphe etrafında kurulmuş delilleri ifade etmektedir. Bir istatistikçiye göre random olarak gerçekleşen olayların olabilirliği hakkındaki beklentilerin olasılıkla hesaplanmasından meydana gelmektedir. Bir fenciye göre ise test edilebilir, suyun $100^0$C'de kaynadığı bir deney ile kanıtlanabilir. Bir matematikçi ise öngörmek ve test etmekten fazlasını istemektedir (Tall, 1989). Bu nedenle ileri düzey matematikte kanıt oluşturma yeteneği matematikçiler için çok önemli bir beceridir (Weber, 2001). Bu beceriyi gerçekleştirmenin ise farklı yolları bulunmaktadır.

Matematikte farklı kanıt yöntemleri bulunmaktadır ve bütün kanıtların amacı iddiaların doğruluğunu veya yanlışlığını kanıtlamaktır. Bunun sonucunda iddianın her şartta genellenebilirliği gösterildiğinde kanıt tamamlanmış kabul edilmektedir (Baki, 2006). Bu süreçte ise kanıtların, matematikte öğrencilere farklı katkıları bulunmaktadır.

Kanıtlar matematiği (Herbst, 2002) ve bir teoremin anlamını anlamaya yardım etmelerinin yanı sıra gelecekteki araştırmalara da ışık tutmaktadırlar (Hanna, 2000). Çünkü kanıt tahminlerden, aksiyomlardan veya kabullerden oluşan bir beyandır (Rodd, 2000). Matematikçiler ise bu aksiyomları, teoremleri oluşturmak ve kanıtlamak için deneyim ve teknik sahibidirler (Tall, 2006). Ayrıca kanıt matematik yapmak, matematiksel iletişim kurmak ve matematiği kaydetmektir (Schoenfeld, 1994; Hanna, 2000). Çünkü matematiksel toplulukların kanıta yönelik farklı bakış açıları bulunmaktadır. Bunun nedeni ise toplulukların kanıta yönelik farklı düşüncelerinin bulunmasıdır (Mejia-Ramos ve Tall, 2005). Bu da insanların kanıta farklı bakmalarını sağlamaktadır.

Günlük hayatta insanlar, kanıtı pratik olarak "beni ne ikna eder" ile eşanlamlı düşünmektedirler. Oysa kanıt deneyimin bir sonucudur ve kanıtın matematiksel anlamı günlük hayattaki bu anlamından ayrılmalıdır (Martin ve Harel, 1989). Çünkü kanıt oluşturma matematiksel problem çözme gibidir ve doğru zamanda akla doğru bir fikrin gelmesidir (Selden ve Selden, 2003). Kanıtın önemli rollerinden biri de matematiksel fikirler yaratmaktır. Çünkü matematikçiler kanıt ile bilgi üretmekte, düzenlemekte ve değerli hale getirmektedirler (Herbst, 2002). Kanıtın bu rollerinden eğitim sürecinde öğrenciler de yararlanmaktadırlar.

Kanıtın okuldaki rolü bir sonucun doğruluğunu göstermesidir (Knuth, 2002a). Aynı zamanda okul matematiğinde önceden bilinen sonuçların doğruluğunun gösterilmesinde (Knuth, 1999; Knuth, 2002b) ve öğrencileri matematiksel durumlara ikna etmekte de kullanılmaktadır (Rodd, 2000). Kanıtın sınıftaki ana rolü ise matematiksel anlamayı geliştirmektir (Hanna, 2000). Ayrıca, kanıt öğrencilerde analitik yetenekleri geliştirmesinin yanı sıra matematiksel fikirlerle denemeler yapmalarına da fırsat vermektedir (Herbst, 2002). Bu nedenle öğrencilerin meraklarını arttırmak için kanıtları görmeleri gerekmektedir. Böylece kabullerinde, genellemelerinde ve kanıtlarında daha dikkatli olurlar (Fitzgerald, 1996). Bu nedenle kanıt kavramının gelişmesi, özellikle de ilköğretim ikinci kademede, okul matematiğinin merkezindeki amaçlardan biridir (Coe ve Ruthven, 1994). Kanıtın kazandırdığı bu becerilere rağmen okullarda kanıtlara çok fazla yer verilmemektedir. Oysa kanıtlama sürecinde kullanılan yöntemler öğrencinin konu hakkındaki düşünce yapılarını ortaya çıkarmaktadır. Kanıt şemaları dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere 3'e ayrılabilir (Sowder ve Harel, 1998). Kanıt şemaları daha ayrıntılı ele alındığında aşağıdaki gibi alt şemalarından söz edilebilir.

### 1.8.4. Kanıt Şemalarının Sınıflandırılması

Farklı sınıf seviyelerinde yapılan araştırmalar sonucunda alt kanıt şemaları belirlenmiştir. Sowder ve Harel (1998) üniversite öğrencilerinin matematik problemlerine ürettikleri çözümleri savunurken kullandıkları şemaları dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç ana şemaya ve bazı alt şemalara ayırmışlardır. Şekil 1'deki ana kanıt şemaları ve bu ana şemalara ait alt şemalar Sowder ve Harel'dan (1998) alınmıştır. Flores (2002) ise ilköğretim düzeyinde farklı sınıflardan öğrenciler ile görüşmüş ve öğrencilere kendilerinin belirledikleri konular ile ilgili problemler yöneltmiştir. Öğrenciler bu problemleri çözdükten sonra "Doğruluğunu nereden biliyorsun?", "Bulduğun sonucun doğruluğunu nasıl kanıtlarsın?" gibi sorular sormuştur ve ilköğretim öğrencilerinin de üniversite öğrencilerine benzer şemalar kullandıklarını ortaya çıkarmıştır. Bu süreçte Flores de (2002) Sowder ve Harel'ın (1998) kullandıkları kanıt şemalarını kullanmıştır. Flores (2006) ortaöğretim öğrencileri ile yaptığı bir başka çalışmada da yine Sowder ve Harel'ın kullandıkları kanıt şemalarını kullanmıştır.

**KANIT ŞEMALARI**

| **Dışsal Kanıt Şemaları** | **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Analitik Kanıt Şemaları** |
|---|---|---|
| - Otorite | - Sezgisel | - Dönüştürülebilen |
| - Alışkanlık edinilmiş | - Temel örnekler | - Aksiyomatik |
| - Sembolik | | |

Şekil 1. Kanıt Şemaları ve Alt Şemaları (Sowder ve Harel, 1998).

Kanıt şemalarındaki her bir sınıflama öğrencilerin matematiksel gelişimlerindeki bilişsel düzeyi ve zihinsel yeteneği temsil etmektedir. Bu şemaların tamamı gerçek öğrencilerin kanıtlama sürecindeki eylemlerinden türetilmiştir (Harel ve Sowder, 1998). Kanıt şemalarının karakterizasyonun da ise sosyal bir içerikte bireysel kuşkular, doğrular ve inançlar göz önünde bulundurulmuştur (Harel ve Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 199;). Kanıt şemalarındaki bu sınıflama, öğrencilerin kanıt kavramının doğasını keşfetmekte ve öğretmenlerin eylemlerinin, öğrencilerin kavramlarına etkisini analiz etmekte kullanılmaktadır (Martin vd., 2005).

Üç kategoriden ve alt kategorilerden oluşan kanıt şemaları uzun bir çalışmanın ürünüdür. Fakat bu şemalar tümünü kapsayacak şekilde bir kişiye özel değildir çünkü insanlar aynı zamanda birden fazla şemaya dâhil olabilirler (Harel ve Sowder, 1998). İnsanların dâhil oldukları kanıt şemalarının ise alt şemaları bulunmaktadır.

#### 1.8.4.1. Dışsal Kanıt Şemaları

Bu kanıt şemasında öğrenciye önce onu ikna edecek kaynaklar sunulmaktadır. Daha sonra öğrenciler de bu kaynakları diğerlerini ikna etmek için sunmaktadırlar (Sowder ve Harel, 1998). Bu kaynaklar genellikle kitaplar veya otorite figürleri, aile veya öğretmen gibi dış etmenlerden oluşmaktadır. Yani öğrenciler matematikte öğrendiklerinin doğruluğunu kitaplara veya başka insanlara dayandırmaktadırlar. Bunun yanı sıra çocuklar dışsal şemalarda bir fikrin doğruluğunu güvendikleri biri söylediği için de kabul etmektedirler (Flores, 2002; Flores, 2006). Yani kanıt şemalarından dışsal kanıt şemasında öğrenciler matematiksel geçerliliği tanımlamak için dışsal otoriteye veya biçimlendirilmiş nedenlere güvenmektedirler (Martin vd., 2005). Dışsal şemalar otorite, alışkanlık edinilmiş ve sembolik olmak üzere üç alt şemadan oluşmaktadır.

a) Otorite kanıt şeması: “Neden birçok öğrenci bir teoremin veya formülün doğru olma sebebini merak edip eksikliğini duymuyorlar?” Bu sorunun yanıtı ise mevcut matematik programının doğruların nedenlerinden çok doğruları vurgulamasıdır. Buna ise daha ilköğretim düzeyinde aritmetik problemleri çözmek için izlenecek matematik adımlarına acele ile karar verilerek kullanılmaları ile başlanmaktadır. Bunun sonucunda da öğrenciler matematiği doğal, savunma gerektirmeyen bir konu olarak inşa etmektedirler (Harel, 1995). Buna rağmen öğrenciler matematiği doğru yapmaları gerektiğinin farkındalar, kanıt ile ilgilenmemekte ve bir sorumluluk olarak görmemekteler, doğrulamalarındaki asıl kaynak ise ders kitapları veya öğretmenleridir (Harel ve Sowder, 1998). Bunun sonucunda ise öğrenciler otorite kanıt şemasında bir kitaba, bir öğretmenin yaptığı hesaplamaya veya sınıfta sonucu kanıtlayan veya doğrulayan daha bilgili birisine güvenerek ona inanmaktadır (Sowder ve Harel, 1998). Ayrıca buldukları bir sonucun doğruluğunu anlamını bilmeden kurallara da dayandırmaktadırlar (Harel, 2001). Otorite kanıt şemaları yaygın olarak kullanılmakta ve vazgeçilmesi de zor bir kanıt şemasıdır. Bunun nedenlerinden biri ise sınıflarda genellikle “neden” sorusu yerine “nasıl” sorusunun sorulmasıdır. Bir otoriteye güvenmek kötü değildir. Fakat bunun sonucunda öğrenciler kendi zihinsel yapılarını oluşturmakta zorlanmaktadırlar (Harel ve Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 1998).

b) Alışkanlık edinilmiş kanıt şeması: Bu şemada öğrenciler tartışmanın doğruluğunu akıl yürüterek araştırmaktan ziyade sadece doğruları göstermektedirler. Yani öğrenciler akıl yürütmektense karşılarındakileri ikna etmek için önceden öğrendikleri delilleri, sebepleri öne sürmektedirler. Örneğin, üniversite öğrencileri geleneksel öğretim programında lisede iki sütunlu kanıt formatını gördükleri için kanıt olarak sadece bu formatı kabul etmektedirler (Sowder ve Harel, 1998). Martin veHarel (1989) öğrencilerin bir nedeni savunurken, nedenin doğruluğundan ziyade matematiksel kanıt formundaki görüntüsünden etkilendiklerine işaret etmektedirler. Çünkü öğrencilerin yanlış kanıtı doğrulama sürecinde verdikleri yanıtlar, belirli bir matematiksel durum için tümdengelimsel kanıt gibi görünmektedir. Genel kanıt doğrulamasını doğru kabul eden birçok öğrenci yanlış kanıt doğrulamasını kabul etmemekte çünkü nedenin doğruluğundan ziyade kanıtın alışılagelmiş görüntüsünden etkilenmektedirler. Yani burada ikna edicilik kanıtın içeriğinden ziyade biçimine bağlı olarak yapılmaktadır (Martin ve Harel, 1989; Stylianou vd., 2006). Yanlış kanıtın doğruluğunu, görünüşlerini temel alarak kabul etmek bir bireyin matematik eğitiminde kanıt yazma, anlama, üretme ve değerlendirme gibi konularda yetersizliğine neden olacaktır (Harel ve Sowder, 1998).

c) Sembolik kanıt şeması: Sembolleri düşünmek olası fonksiyonel veya niceliksel referanslarına referans olmadan kendi hayatlarına sahip olmak gibi, buna ise sembolik akıl yürütme denilmektedir. Sembolik akıl yürütme yüzeysel ve matematiksel olarak anlamsız olabileceği gibi çok güçlü bir teknik de olabilir. Sembolik kanıt şemaları ise matematiksel düşüncelerin sembolik akıl yürütme ile kanıtlanmasıdır (Harel ve Sowder, 1998). Sembolik kanıt şemalarında öğrenciler kanıt olarak bir şekilde anlamsız sembolleri kullanmaktadırlar. Örneğin, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ veya $2^5.2^3=4^{15}$ veya sin(x+y)=sinx+siny veya $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ gibi (Sowder ve Harel, 1998). Oysa ki sembollerin böyle yanlış kullanımı sonucunda öğrenciler yanlış genellemeler yapabilmektedirler. Fakat sembolik akıl yürütme öğrencilerin okul hayatları boyunca ilköğretimden liseye kadar kazandıkları zihinsel bir alışkanlık ve öyle bir alışkanlık ki vazgeçmek çok zordur. Tarihe bakıldığında da sembolik akıl yürütmenin matematiğin gelişmesinde önemli bir yeri olduğu görülmektedir (Harel ve Sowder, 1998). Bunun yanı sıra sembolik kanıt şemasını doğru biçimde kullanan bir birey dönüştürülebilen kanıt şemasına sahiptir (Flores, 2006).

#### 1.8.4.2. Deneysel Kanıt Şemaları

Deneysel kanıt şemasında fiziksel gerçeklerin veya duyusal deneyimlerin yardımıyla tahminlerin geçerliliği denetlenmekte, yalanlanmakta veya yok edilmektedir (Harel ve

Sowder, 1998). Bunun yanı sıra deneysel kanıt şemaları öğrencilerin geçerlik için kullandıkları özel örnekleri ve sezgisel desenleri içermektedir (Martin vd., 2005). Öğrencilerin deneysel kanıt şemaları daha erken yaşlarda oluştuğu için okula başlayana kadar yok olmuyor. Okula başladıktan sonra ise yavaş yavaş yok oluyor fakat bu süreçte öğrencilerin ürettikleri kanıtları da etkilemeye devam ediyor (Harel, 2008c). Deneysel şemalar sezgisel ve temel örnekler olmak üzere alt şemalardan oluşmaktadır.

a) Sezgisel kanıt şeması: Algısal düşünceler sezgi ve sezgilerin koordinasyonunu içeren temel zihinsel görüntüler tarafından yapılmaktadır (Harel ve Sowder, 1998). Bu süreçte geometri derslerinde öğretmenler öğrencilerin basit çizimlerini veya sezgilerini temel alarak sonuca ulaşmalarını sağlamaktadırlar (Sowder ve Harel, 1998). Öğrencilerin bir başkasını ikna ederken bu yöntemi kullanmaları sezgisel kanıt şeması olarak adlandırılmaktadır (Sowder ve Harel, 1998; Flores, 2002). Bu nedenle bireyin görsel algıları da bu şemaya dâhildir (Harel, 2007; Harel, 2008b). Diğer bir ifadeyle öğrenciler hisleri ile bir durumun doğru olduğunu sezinlemekte fakat güçlü bir kanıt bulamamaktadırlar (Mejia-Ramos ve Tall, 2005).

b) Temel örnekler kanıt şeması: Bu kanıt şeması örnekler üzerine kurulu olup kanıtlar genellikle örneklere dayandırılmaktadır (Sowder ve Harel, 1998). Yani insanlar kavramları oluştururken genellikle örneklere güvenmektedirler. Öğrenciler de örnekleri genellikle öğrendikleri fikirleri anlamakta ya da kontrol etmekte kullanmaktadırlar (Flores, 2002). Bu kanıt şeması kanıtlamaya yeni başlayanlar için anlaşılır bir kanıt şemasıdır ve matematiksel olarak da geçerli (aksi örneklerle bir durumun kurulması veya yalanlanması) veya geçersiz (evrensel bir durumu destekleyen örnekler) olabilir (Hanna ve de Villiers, 2008). Temel örneklerde öğrenciler kendilerine ve diğerlerine inandırıcı sözler söyleyerek önceden öğrendikleri bir veya birkaç örneği kanıt olarak kullanmanın yanı sıra aksi örnekleri de kullanmaktadırlar. Oysa öğrencilerin matematiksel durumlar için gösterdikleri örnekler sayısal durumlar için doğru olurken her durum için doğru olmayabilmektedir (Harel ve Sowder, 1998; Flores, 2002).

### 1.8.4.3. Analitik Kanıt Şemaları

Analitik kanıt şemaları mantıksal çıkarımların anlamlarıyla tahminlerin geçerliliğini sağlamaktır (Harel ve Sowder, 1998). Burada gösterilen nedenler genel nedenlerden oluşmakta ve akıl yürütmeyi içermektedir (Flores, 2002). Bu akıl yürütmeler ise örneklere dayanmalarından ziyade daha matematikseldirler. Bu şemada öğrenciler sayma stratejileri kullanmanın ve bunları geliştirmenin yanı sıra matematiksel ilişkileri de kullanmaktadırlar (Flores, 2002; Flores, 2006). Matematik öğretmenleri analitik kanıt şemalarını matematikte kanıtlamada son nokta olarak görmektedirler (Sowder ve Harel, 1998). Kısaca bu şemada öğrenciler tahminlerinin geçerliğini sağlamak için mantıksal sonuçları kullanmaktadırlar (Martin vd., 2005). Analitik kanıt şemaları dönüştürülebilen ve aksiyomatik olmak üzere iki alt şemadan oluşmaktadır.

a) Dönüştürülebilen kanıt şeması: Bu şemada öğrenciler kanıtlarında bir durumun genel kabulünü ve tahminlerinde akıl yürütmeyi kullanmaktadırlar. Öğrenciler akıl yürütmenin yardımı ile özelden genelleme yoluna gitmektedirler (Sowder ve Harel, 1998). Dönüştürülebilen kanıt şemaları tahminlere genel bir bakış sağlamasının yanı sıra zihinsel işlemlerin uygulanmasını da sağlamaktadır (Harel, 2001). Dönüştürülebilen kanıt şeması tümdengelimsel akıl yürütme ile öğrencilerin tahminlerinin sonuçlarını ve zihinsel işlemlerini içermektedir. Dönüşümler; öğrencilerin matematiksel içerikleri, gereksinimleri ve savunmanın türüne göre sınırlanabilir. Bu nedenle dönüştürülebilen kanıt şemaları sınırlayıcı bir analitik kanıt şeması gibi görünmektedir (Martin vd., 2005). Bütün bunlar göz önünde bulundurulduğunda dönüştürülebilen kanıt şemasının üç özelliği ortaya çıkmaktadır: genelleme, işlemsel düşünme ve mantıksal çıkarım (Harel ve Sowder, 2007).

b) Aksiyomatik kanıt şeması: Bu kanıt şeması dönüştürülebilen kanıt şemasının genelleme, işlemsel düşünme ve mantıksal çıkarım olan üç özelliğini içermesinin yanı sıra (Harel ve Sowder, 2007) tanımsız terimleri, tanımları, tahminleri, sonuçları, teoremleri ve neden-sonuç ilişkisini içermektedir. Bir öğrencinin bir sistemle rahat çalışması aksiyomatik kanıt şemasını kullandığını göstermektedir. Analitik kanıt şemalarında öğrencilerin yazdıklarından ziyade düşünceleri önemlidir. En yüksek düzeyde de aksiyomatik kanıt şemaları yer almaktadır. Çünkü burada aynı zamanda alternatif aksiyomların geliştirilmesi de yer almaktadır (Harel ve Sowder, 1998). Aksiyomatik kanıt şemaları bir kişinin tanımlanmamış terimleri ve aksiyomları içeren bir kanıtı anlamalarına odaklanmaktadır. Bu da öğrencilerin matematiksel yapılardaki sezgisel duyularıyla sınırlanabilmektedir (Martin vd., 2005). Bunun yanı sıra aksiyomatik kanıt şeması yeni teoremlerin kanıtlanma sürecinde sadece aksiyomlara veya önceden kanıtlanmış teoremlere odaklanmaktadır (Flores, 2006). Aşağıda kanıt şemalarının özet halleri Tablo 1’de verilmiştir.

Tablo 1. Kanıt şemalarının özeti (Lee, 1999).

| Kanıt Şemaları | Kanıt Şemasının Karakteristiği | Gerçekleşme Metotları |
|---|---|---|
| **Dışsal Kanıt Şemaları** | | |
| Otorite Kanıt Şeması | ➢ Bir kanıtın neden doğru olduğu hakkında sebep geliştirmede yetersiz kalmak<br>➢ Kanıtın doğruluğunun birey tarafından belirlenememesi | ➢ Teoremleri ezberlemek<br>➢ Formülleri uygulamak |
| Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şeması | ➢ Yüzeysel deliller sunmak<br>➢ Bir kanıtın delilleri arasında sınırlı bağlantı kurmak | ➢ Tanıdık kanıt süreçlerini kullanmak<br>➢ Diğer kanıt süreçlerine benzeyen süreçleri kullanmak |
| Sembolik Kanıt Şeması | ➢ Sembollerin anlamını anlamak<br>➢ Sembolleri anlamsız deliller olarak sunmak<br>➢ Bir kanıtın sembollerin içinde olduğuna inanmak<br>➢ Matematiksel sembollerle kanıtlamak | ➢ Matematiksel durumları sembolleri kullanarak yazmak<br>➢ İyi bilinen sembolik algoritmaları kullanmak<br>➢ Bir kanıtın ilk ve takip eden adımlarında sembolik işlemler yapmak |
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | | |
| Temel Örnekler Kanıt Şeması | ➢ Mantıksal delillerin bulunmaması<br>➢ Sonuçları hızlıca yapmak<br>➢ Bir kanıtın doğruluğunu örneklerle belirtmek | ➢ Akranlarını çizimlerle ikna etmek<br>➢ Bir veya daha fazla çizime odaklanarak sonuçlar çıkarmak |
| Sezgisel Kanıt Şeması | ➢ Çizimler aracılığıyla kanıt basamaklarıyla hipotezleri ilişkilendirmek, bu süreçte mantıksal delilleri göz ardı etmek<br>➢ Bir kanıtın doğruluğunu çizimlerle belirtmek | ➢ Örnekler göstererek diğerlerini ikna etmek<br>➢ Bir kanıtı örnekler göstererek oluşturmak |
| **Analitik Kanıt Şemaları** | | |
| Dönüştürülebilen Kanıt Şeması | ➢ Tutarlı basamaklar oluşturmak<br>➢ Bir kanıtın önceki durumlarına mantıklı kurallar uygulamak | ➢ Temel konuyu belirlemek<br>➢ Akıl yürütmeyle diğerlerini ikna etmek |
| Aksiyomatik Kanıt Şeması | ➢ Tanımsız terimlerle sınırlı bir küme kurmak<br>➢ Lineer metotları kullanarak kanıtlamak<br>➢ Geleneksel kanıt süreçlerini kullanmak | ➢ Aksiyomatik bir sistem geliştirmek<br>➢ Bir teoremi aksiyomatik sistemi kullanarak kanıtlamak |

Matematiksel akıl yürütmenin merkezinde analitik kanıt şemaları bulunduğu için dışsal ve deneysel kanıt şemaları çok fazla kullanılması istenilmeyen kanıt şemalarıdır. Dışsal şemalardan otorite kanıt şemaları tamamen zararlı değil ve kullanılması da kaçınılmaz bu nedenle bireyler bilmedikleri bir alanda örnekleme yapmak için bu şemayı kullanabilmektedirler. Otorite kanıt şemalarından biraz daha değerli olan deneysel kanıt şemalarında örnekler ve aksi örnekler düşünceleri genellemekte ve bakış açılarını ortaya çıkarmakta kullanılabilirler. Analitik kanıt şemaları ise diğer kanıt şemalarına göre daha üst düzeyde kanıt şemalarıdır. Bu nedenle de öğrencilerin kullanmaları istenilen kanıt şemasıdır (URL-1, 2006). Kanıtın sınıf içindeki kullanımının artması için öğretmenlerin ve öğrencilerin kanıta yaklaşımlarının yanıs sıra matematik öğretim programlarındaki yeri de önemlidir. Farklı ülkelerin matematik öğretim programlarının ise kanıta yaklaşımları bazı farklılıklar göstermektedir.

### 1.8.5. Milli Eğitim Bakanlığı ve Diğer Bazı Ülkelerin Matematik Öğretim Programlarında Kanıtın Yeri

Kanıt sürekli canlı ve uygulamalar için iyi bir araç olduğundan dolayı matematik öğretim programında seçkin bir yerde olmaya layıktır (Hanna, 2000). Artık kanıt okul matematiğinin programlarında daha önemli bir rol almaktadır (Knuth, 2002a). Çünkü programlardaki son değişiklikler matematiksel becerileri geliştirmeye yöneliktir (Wimer, Ridenour, Thomas ve Place, 2001). Böylece kanıtın, öğrencilerin okul matematiğindeki deneyimlerinde de yer alması umulmaktadır (Knuth, 2002a). Çünkü kanıtlar okul matematiğinde öğrencilerin deneyimlerinde yer almadığında kanıtlar öğrenciler için zorlaşmaktadır.

Amerika Birleşik Devletleri'nin 4–12. sınıflar için hazırlanmış olan matematik programında (NCTM, 1989; NCTM, 2000) yani standartlarında 4–12. sınıfların her düzeyinde akıl yürütmeye yer verilmektedir. Dördüncü sınıflarda akıl yürütme ile öğrencilerin mantıksal sonuçlarını açıklamaları beklenmektedir. Sınıf seviyesi 5–8 olduğunda öğrencilerin akıl yürütmeler ile tümevarım ve tümdengelimi tanımaları ve uygulamaları; akıl yürütmeyi anlamaları ve uygulamaları; matematiksel tahminler ve nedenler oluşturarak değerlendirmeleri beklenmektedir. Sınıf seviyesi 9–12 olduğunda akıl yürütme ile ilgili beklentiler de yükselmektedir. Bu seviyede öğrencilerin tahminler üreterek onları test etmeleri; nedenlerin doğruluğunu savunmaları; basit doğru nedenler oluşturmaları; matematiksel iddialar için dolaylı ve tümevarım kanıtları oluşturmaları beklenmektedir (NCTM, 1989; NCTM 2000).

Benzer şekilde Avustralya Matematik Öğretmenleri Derneği'de (AAMT, 2003) yayınladığı standartlarda matematiksel düşünmeye ve akıl yürütmeye yer vermekte ve desteklemektedir. Bunların yanı sıra öğretimleri yaratıcı düşünmeyi, çözümleri bulmayı ve açıklamayı, uygun yardımlarla stratejik sağlamaların gelişmesini beklemekte ve desteklemektedir (AAMT, 2003).

Bu farklı ülkelerin standartlarına rağmen Türkiye'de matematik eğitiminde diğer ülkelerinki gibi standartlar henüz bulunmamakla birlikte 1–5. ve 6–8. sınıflarda doğrudan kanıt yapmaya yönelik bir kazanım da bulunmamaktadır. Fakat genel hedeflerden biri "Mantıksal tümevarım ve tümdengelimle ilgili çıkarımlar yapabilecektir" biçimindeyken bir diğeri de "Matematiksel problemleri çözme süreci içinde kendi matematiksel düşünce ve akıl yürütmelerini ifade edebilecektir" şeklindedir. 1–8 Matematik Programı bu şekilde akıl yürütmeyi ve dolaylı olarak kanıt yapmayı desteklemektedir. (MEB, 2005a; MEB, 2005b). Bunun yanı sıra Türkiye'de Ortaöğretim Matematik (9–12. sınıflarda) Dersi Öğretim Programı'na bakıldığında "Mantık Öğrenme Alanı" içersinde "Kanıt Yöntemleri Alt Öğrenme Alanı" adı altında kanıt kavramına yönelik iki kazanım bulunmaktadır. Bunlardan ilki "Tanım, aksiyom, teorem ve kanıt kavramlarını açıklar, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtir" şeklindeyken bir diğeri de "Kanıt yöntemlerini kullanarak basit kanıtlar yapar" biçiminde ifade edilmektedir (MEB, 2005c).

### 1.8.6. Öğrencilerin Kanıta Yaklaşımları ve Kullandıkları Kanıtlar ile Kanıt Şemaları

Çocuklar genetik yapıları ile doğarlar fakat algılama ve eylemleri soysal yetenekleriyle düzenlenmeli ve incelik kazanmalıdır. Bazı öğrenciler matematik yapmak için prosedürlere odaklanabilirler fakat genellikle başarılı öğrenciler süreç ve kavram olarak sembollerin esnek kullanımını geliştirmektedirler (Tall ve Mejia-Ramos, 2006). Bu sürece yardımcı olabilecek etkinliklerden biri de kanıtlardır. Kanıt ise öğrencilere farklı anlamlar ifade etmektedir (Tall, 1989).

Öğrenciler kanıt oluşturmakta ciddi zorluklar yaşamaktadırlar (Senk, 1983) ve birçok öğrenci kanıt yapmayı zor bulmaktadır (Knuth, 2002a). Bu nedenle de öğrencilerin kanıt yeteneklerini inceleyen birçok eğitim araştırması bulunmaktadır. Kanıt üzerine yapılan araştırmaların birçoğu ise öğrencilerin ürettikleri kanıtların geçerli mi, geçersiz mi olduğu yönündedir (Senk, 1983).

Matematikte yetişkinler teoremleri kanıtlayabilirler fakat formal kanıtları oluşturmak karmaşık olduğundan dolayı çocuklar için zor bir süreçtir (Godino ve Recio, 1997; Flores, 2002). Öğrenciler üniversiteye geldiklerinde formal matematiksel kanıtlar ile karşılaşmalarına rağmen formal kanıt yapılanmaları daha önceki deneyimleri ile oluşmaya başlamaktadır (Tall, 2005). Bu nedenle gelişimlerinin farklı düzeylerindeki çocuklar için kanıt düşünceleri çok farklıdır (Tall, 2006). Çünkü matematiğin gelişimiyle birlikte kanıt fikri de gelişir (Corry, 2009). Matematik eğitimcileri ve eğitim araştırmacıları öğrencilerin matematiksel kanıt ile ilgili zorlanmalarını dile getirmişler ve matematiksel etkinliğin doğası ile geçerli öğretme yaklaşımları arasındaki çelişkileri belirtmişlerdir (Moore, 1994; Harel ve Sowder, 1998; Weber, 2001; Raman, 2003).

Üniversite öğrencileri de dahil olmak üzere birçok öğrenci kanıtları anlamakta, anlayıp sevmekte ve üretmekte zorlanmaktadırlar (Jones, 2000). Bu zorlanmalarını da farklı şekillerde ifade etmektedirler. Matematik bölümündeki üniversite öğrencilerine kanıt hakkındaki deneyimleri sorulduğunda "Matematiksel kanıt sözcükleri benim için kötü bir anlama geliyor" veya "Lise geometrisinde kanıtlardan nefret ederdim. 'Neden kanıta ihtiyacım var? Yeterince açık' diye düşünürdüm" veya "Önemli olduklarını düşünmedim, zeki matematikçiler teoremleri düşünmüşler" şeklinde yanıtlar vermişlerdir (Sowder ve Harel, 1998). Oysa öğrencilerin seçtikleri kanıtlar önemlidir çünkü öğrencilerin seçtikleri kanıtlardan kanıta bakışları da anlaşılmaktadır (Healy ve Hoyles, 2000). Bu nedenle öğrenciler ile matematikte kanıtın işlevi hakkında tartışılmalı, kanıtın önemi ve sınırlılıklarına işaret edilmelidir (Hanna, 2000). Bunların yanı sıra kanıta daha farklı anlamlar yükleyen öğrenciler de vardır.

Winicki-Landman (1998) ilköğretim öğrencileri ile yaptığı çalışmada öğrencilerin sunduğu aynı matematiksel sonuç üzerinde farklı kanıtlar ile tartışmalarını sağlamıştır. Bunun sonucunda da yaptığı gözlemler ile ilköğretim öğrencilerinin kanıt ile ilgili düşüncelerini belirlemiştir. Bunlar;

- Öğrenciler kanıtın avantajlarını ve sınırlılıklarını analiz edebilmekteler,
- Estetik düşünceler öğrencilere yabancı değil,
- Eğer öğrenciler önceden olup biteni anlayamadılarsa kanıtın gelişimi sürecinde kişisel tercihleri bulunmaktadır. Bazen tercihleri sonuçlar olabilmekte, fakat diğer

zamanlarda öğrencinin sınırlılıkları ve hataları ile farkında olduğu sonuç ortaya çıkabilmekte,

➢ Öğrenciler “kanıtı, kanıt olarak düzenleme” ve “kanıtı, açıklama olarak düzenleme” yi ayırt edebilmekteler fakat kanıtı açıklama olarak düzenlemeyi daha iyi yapmaktalar,

➢ Eğer öğrenciler kanıtı kendileri düzenlemediyseler hoşlanmaktalar (Winicki-Landman, 1998). Bu düşüncelerine rağmen öğrencilerin farklı kanıt kavramları bulunmaktadır.

Birçok öğrenciye göre kanıtlar, bir durum için kesinlik sağlayarak o durumu anlamalarına yardımcı olmaktadır. Bir öğrenci kanıtın “Kanıt doğru olduğu kesin olan bir durumun gösterilmesi” yani kontrol etmekte kullanılan bir form olduğunu dile getirirken bir başka öğrenci için kanıt “Genel bir formül” ifade etmektedir. Başka bir öğrenci “Kendinizi daha emin hissetmenizi sağlar” şeklinde açıklarken bir diğeri “Kanıt bir durumun her zaman doğru olduğunu gösterir” şeklinde tanımlamıştır (Coe ve Ruthven, 1994). Kanıt matematiksel dilde ise bir 5. sınıf öğrencisine “Birisini bir iddiaya inandırmak” ve bir başkasına da “Mantıksal bir açıklama” ifade etmektedir (Zack, 1999).

Farklı araştırmalar gösteriyor ki öğrencilerin çoğu kanıtlama sürecinde mantıksal nedenlerden çok deneysel delilleri yani deneysel kanıtları kullanmaktadırlar (Galindo, 1998; Almeida, 2001, Knapp ve Zandieh, 2004a). Deneysel kanıtları geometride de sık sık kullanmaktadırlar (Knapp ve Zandieh, 2004b). Buna bağlı olarak da birçok öğrenci kanıtlarını doğrulama sürecinde de deneysel delilleri kullanmaktadırlar (Almeida, 2001). Kanıtlama sürecinde kullanılan deneysel nedenler örneklere dayanırken tümdengelimli nedenler ise mantıksal akıl yürütmeye dayanmaktadır (Galindo, 1998).

Şu anki araştırmalar öğrencilerin kuralları ve genellemeleri açıklamak için büyük ölçüde deneysel şemaları kullandıklarını göstermektedir (Almeida, 1996). Bunun yanı sıra öğrencilerin çoğu kanıtlama sürecinde de deneysel deliller ile gösterdikleri kanıtları doğrulamaktadırlar (Coe ve Ruthven, 1994; Healy ve Hoyles, 2000; Almeida, 2001; Heid vd., 2002;). Öğrencilere göre örnekler veya özel sayısal değerler vermek bir durumun doğruluğunun açıklanmasında yeterlidir (Healy ve Hoyles, 2000; Özer ve Arıkan, 2002). Bu yüzden öğrenciler tahminlerini ve desenlerini birkaç örnekle test ederken (Coe ve Ruthven, 1994) deneysel yaklaşımı kullanma sürecinde (Galbraith, 1995; Galindo, 1998) görsel veya sayısal yorumlarla oluşturdukları çizimleri delil olarak göstermektedirler (Galindo, 1998). Bu nedenle de deneysel nedenleri tümdengelimsel nedenlere tercih etmektedirler (Heid vd., 2002). Bu süreçte öğrenciler savunmayı da kullanmaktadırlar ve savunmayı kanıt olarak algılayabilmektedirler.

Öğrenciler savunmanın kanıt olduğunu düşünmekteler çünkü savunma ile ikna olmaktadırlar. Fakat yine de birçok öğrenci bir formülün veya teoremin neden doğru olduğunu merak ederek zihinsel bir eksiklik hissetmelerine rağmen savunmaya gerek duymamaktadırlar. Bu yüzden öğrenciler problemlerde kanıtın sorumluluğunu düşünmeyerek problemleri çözerken prosedürde ısrarcı davranmaktadırlar (Harel ve Sowder, 1998). Çünkü kanıtı, savunma veya birsisini bir nedene ikna etme olarak görmemektedirler (Weber, 2005). Bunun sonucunda da kanıtın oluşumunda yer almaktan ziyade kanıtın söylenmesini tercih etmektedirler. Çünkü öğrenciler öğretmeni bilginin tek kaynağı olarak görmekte ve ihtiyaçları olan bilgiyi vermesini onun sorumluluğu olarak düşünmektedirler (Harel ve Sowder, 1998). Bu yüzden öğretmene güvenen öğrenciler kendi kanıtlarına geometride de çok fazla yer vermemektedirler.

Okulların %77'sinde kanıt sadece incelemelerde yer almasına rağmen Healy ve Hoyles'in (2000) yaptıkları çalışmada öğrencilerin yarısı kanıtın matematiksel durumların gerçekliğini kurmakta kullanıldığını dile getirmişlerdir. Az sayıda öğrenci ise kanıtın yeni fikirleri veya teorileri keşfetmekte veya sistematize etmekte kullanıldığını düşünmektedirler. Öğrencilerin %25'inin kanıt hakkında az veya hiçbir düşünceleri yoktur. Bir kısmı ise kanıtı açıklayıcı görmelerinin yanı sıra matematiksel fikirlerin iletilmesinde önemli olduğunu düşünmektedirler. Çalışmadaki öğrenciler nedenlerini bireysel olarak seçtiklerinden dolayı kanıt oluşturmakta da başarılı bulunmuşlardır. Bunun yanı sıra kızlar kanıt oluşturmakta erkeklerden daha yüksek puanlar elde ederken 16 yaşındaki öğrenciler de 14-15 yaşındakilerden daha yüksek puanlar elde etmişlerdir (Healy ve Hoyles, 2000). Öğrenciler kanıt ile deneyimlerine ilerleyen yaşlarda başladıkları için kanıt oluşturmaya da ileriki yaşlarında başlıyor olabilirler. Bu süreçte öğrenciler farklı kanıtlar kullanmaktadırlar.

Stylianides (2007a) çalışmasında ilköğretim okul matematiğinde kanıt kavramının anlaşılmasına ve tanımlanmasına odaklanmıştır. Çalışmanın sonunda öğrencilerin "tek+tek=çift" ifadesine tümdengelimsel bir neden göstermeleri istenmiştir. Bu ifade ilköğretim düzeyinde bir kanıt olarak kabul edilmektedir. Fakat çalışmanın sonunda nitelikli olmayan sınırlı kanıtlar pek de aydınlatıcı olmamıştır (Stylianides, 2007a).

Birçok öğrenci açıklamanın gerekliliğine inanmamakta ve görüşmeci açıklamasını isteyene kadar da herhangi bir açıklama yapmamaktadır. Fakat bunun yanı sıra açıklamanın gerekliliğine inanan öğrenciler de bulunmaktadır. Açıklamanın gerekliliğine inanan öğrenciler ise bunu “Önemli çünkü bir şeyin neden olduğunu bildiğinizde anlamak çok daha kolay olur” şeklinde ifade etmektedirler (Almeida, 2001). Bu öğrencilerin yanı sıra kanıtı yapmaya başladığında devam ettirebilip, sonuçlarla bilgi üretimi arasındaki bağlantıyı kuramayan öğrenciler de bulunmaktadır. Öğrenciler bu durumu ifade ederken “Ne yapmam gerektiğini biliyorum ama ne anlama geldiğini bilmiyorum” gibi açıklamalar yapmaktadırlar (Rodd, 2000). Bu tür bir düşünceye sahip olan bazı öğrenciler buldukları sonuçların neden doğru olduğunu kontrol etmeye de gerek duymaktadırlar (Coe ve Ruthven, 1994). Çünkü bazı öğrenciler sadece kontrollerle buldukları sonuçların doğruluğuna ikna olmaktadırlar (Galbraith, 1995). Fakat birçok öğrenci buldukları sonuçların neden doğru olduğunu kontrol etmemektedirler (Coe ve Ruthven, 1994).

Maher ve Martino (1996) yaptıkları çalışmada bir kız öğrencinin boylamsal gelişimci araştırma yöntemiyle 1-5. sınıflar arasındaki matematiksel savunma yaklaşımındaki gelişimini incelemişlerdir. Öğrenci bu süreçte küçük grup çalışmaları, tüm sınıf ile çalışmalar ve bireysel çalışmalarda bulunmuş ve yine aynı çalışma biçimlerinde görüşmeler yapılmıştır. Bu çalışmanın sonunda öğrencinin ilk açıklamasını 1. sınıfta 6 yaşındayken yaptığı ortaya çıkmıştır. Öğrenci 4. sınıfta daha karmaşık savunmalar yaparak bunları arkadaşlarına sunarken 5. sınıfta 10 yaşına geldiğinde savunmalardan kanıtlara geçmiş ve düşüncelerini açıklayarak arkadaşlarını ikna etmiştir (Maher ve Martino, 1996). Bu gelişimde öğretmenlerin de rolü bulunmaktadır.

Almeida’nın (2001) yaptığı çalışmanın sonuçlarına göre öğretmen ile sosyal etkileşim öğrencilerin kanıtlama için yeni kuralları kabul etmelerini ve kullanmalarını, daha açık açıklamalar yaparak bulduklarını paylaşmalarını ve sonuçlarını savunmada gerekli dili geliştirmelerini sağlamaktadır (Almeida, 2001).

Öğrenciler teoremi kanıtladıktan sonra aksi örneklere bakmaya devam etmekte ve hala durumu kanıtladıklarına inanmamaktadırlar (Heid vd., 2002). Çünkü öğrenciler talep edilen basit bir durumun aksini kanıtlamanın yeterli olduğuna inanmamaktadırlar. “Bir örnek aksini kanıtlamak için yeterli değil” ve “Bir örnek yeterli ama daha fazlası olmalı, daha fazla aksi kanıt yapılmalı” gibi ifadeler kullanmaktadırlar (Galbraith, 1995).

Matematiksel kanıt, matematik eğitiminin önemli parçalarından biridir. Kanıt konusunda yurt dışında birçok araştırma yapılmış olup bu konu ile ilgili pek çok yayına rastlanmaktadır. Ülkemizde bu konu ile ilgili olarak yeterli düzeyde araştırmanın yapılmış olmadığı görülmektedir. Fakat yinede Türkiye'de de kanıt ve kanıt yapmaya yönelik sınırlıda olsa farklı çalışmalar bulunmaktadır.

Bunlardan Özer ve Arıkan (2002) çalışmalarında lise 2 öğrencilerinin matematik derslerinde kanıt yapabilme becerilerini tespit ederek öğrencilerin kanıt düzeylerini incelemişlerdir. Bu süreçte ayrıca materyal kullanarak kanıt yapıp yapamadıklarını da gözlemişlerdir. Bu amaçla 2000-2001 eğitim öğretim yılında toplam 110 lise 2 öğrencisi üzerinde araştırma yapılmışlardır. Ayrıca 3 lise 1 öğrencisi ile de görüşme yapmışlardır. Bu süreçte 110 öğrencinin 6 tane açık uçlu soruya verdikleri yanıtlar sonucunda aldıkları puanlar gruplandırılarak tablolar oluşturulmuştur. Görüşme sırasında farklı zamanlarda 3 öğrencinin verdikleri yanıtlar kasetlere kaydedilmiş ve bu kayıtlar yazılı görüşme metinlerine dönüştürülmüştür. Araştırma sonucunda lise 2 öğrencilerinin hemen hemen tamamının amaçlanan düzeyde tümdengelim ve tümevarım yoluyla kanıt yapamadıkları ortaya çıkmıştır. Çalışmaya katılan öğrenciler, verilen bir ifadenin doğruluğunu gösterebilmek için özel sayısal değerler vermişler ve böylece de bu ifadenin doğruluğunu gösterdiklerine inanmışlardır. Sonuç olarak bu çalışmada sorulan 6 tane açık uçlu soruya öğrenciler genel olarak sayısal değerler vererek yanıtlamışlardır. Diğer taraftan bu çalışmada üç öğrenci ile yapılan görüşme sonucunda, öğrencilerin materyal kullanarak kanıt yapamadıkları gözlenmiştir. Çalışmada öğrencilere bir ifade verilip, doğruluğunu göstermeleri istenmiştir fakat öğrenciler bulundukları yerde gerekli materyal olmasına karşın, sayısal değerler vererek veya tümevarım yöntemini kullanarak göstermeyi tercih etmişlerdir. Katılımcılar görüşmecinin yardımıyla materyalleri kullanarak kanıt yapmaya çalışmışlardır. Buradan da görüldüğü üzere bu konuda öğrencilerdeki eksiklik dikkat çekici bir şekilde ortaya çıkmıştır (Özer ve Arıkan, 2002). Kanıta yönelik tutum ve bakış açısının yanı sıra kanıt şemaları ile ilgili de ulusal ve uluslar arası farklı çalışmalar bulunmaktadır.

Flores (2002) ilköğretimde farklı sınıflardaki bir grup öğrenci ile matematik öğretmeni adayları ile birlikte görüşmeler yapmıştır. Flores bu araştırmada öğrencilerden matematik dersinde öğrendikleri dört konuyu söylemelerini istemiştir. Eğer öğrenciler toplama gibi genel bir ifade kullandıysalar bu tür ifadeleri 2 artı 1 eşittir 3 gibi daha özel durumlara indirgemiştir. Daha sonra da öğrencilere 2 artı 1'in 3 yaptığını nasıl bildiklerini sormuştur ve Sowder ve Harel'ın (1998) şemalarına benzer şemalar kullandıklarını ortaya koymuştur. Bunun yanı sıra çalışmaya katılan ilköğretim öğrencilerinin öğrendikleri olguların neden doğru olduğunu açıklamakta zorlandıklarını bulmuştur. Ayrıca birçok öğrenci matematikteki düşüncelerini açıklarken veya matematikte öğrendikleri şeylerin doğru olduğunu gösterirken sınırlı açıklamalar yapmışlardır. Bunun yanı sıra Flores'in araştırmasında çocukların çoğu matematikte öğrendiklerinin sorgulanmasından rahatsız olmuşlardır. Fakat buna rağmen kendilerine olan güvenlerini ve öğrendikleri olguları doğru anladıklarını göstermek için çözümlerinin doğru olduğunu gösterirken kendi metotlarını kullanmışlardır (Flores, 2002).

Daha sonra Martin ve diğerleri de (2005) lisede geometri sınıflarında kanıtı öğretme ve öğrenme arasındaki ilişkiye bakmışlardır. Dört aylık çalışma sürecinde öğrencilerin kanıtın doğası hakkındaki inanışlarına, öğrencilerin formal kanıt oluşturma yeteneklerine, öğretmen ve öğrencilerin eylemlerine ve öğrencilerin kanıtı öğrenme potansiyellerine odaklanmışlardır. Bu çalışmada sınıf analizleri yardımıyla öğretmen eylemleri ile öğrenci eylemleri arasındaki etkileşime, sınıf içi konuşmaların doğasına ve bunların öğrencilerin matematiksel kanıtı öğrenmelerindeki etkisine bakmışlardır. Bu süreçte aksiyomatik sistem içinde kanıt yazma öğretimi devam etmiş ve bunun sonucunda da formal kanıtlar oluşmaya başlamıştır. Öğrencilerden birçoğu analitik kanıt şemaları ile alt şemalarını kullanmaya başlamışlardır. Kısacası bu çalışmada sınıfın sosyal içeriğinde öğrenci ve öğretmen eylemleri arasındaki karşılıklı etkileşim tanımlanmıştır (Martin vd., 2005). Bu çalışma gösteriyor ki kanıt oluşturmada öğrenci ve öğretmen etkileşimlerinin önemli bir rolü bulunmaktadır.

Flores (2006) yaptığı bir başka çalışmada da 5-12. sınıfa devam etmekte olan toplam 70 öğrenciyle çalışmıştır. Araştırmacı bu çalışmada da öğrencilerinden matematikte öğrendikleri olguların neden doğru olduğunu açıklamalarını istemiştir. Bunun içinde öğretmen adayları ve öğretmenler öğrencilerle bireysel görüşmeler yapmışlardır. Görüşmelerde öğrencilerden matematikte öğrendikleri iki tane olgu, prosedür veya kuralı söylemelerini istemişlerdir. Daha sonra görüşmeci katılımcıya söylemiş olduğu olgunun neden doğru olduğunu veya prosedürün neden doğru yanıtı verdiğini sormuştur. Bunun ardından da öğrencilerin verdikleri yanıtları Sowder ve Harel'in (1998) ortaya attıkları kanıt şemalarına göre sınıflamıştır. Bunun sonucunda öğrencilerin çoğunun matematikte öğrendikleri ile ilgili konuşmakta zorlandıklarını görmüştür. Bunun yanı sıra öğrencilerin birçoğu da öğrendiklerini anımsamakta zorlanmışlardır. Sonuç olarak öğrenciler Sowder ve Harel'ın (1998) kanıt şemalarına benzer şemalar kullanmışlardır. Fakat bu süreçte katılımcılar çoğunlukla dışsal kanıt şemalarından otoriteyi kullanmışlardır. Bunun yanı sıra çok sayıda katılımcı deneysel şemaları da kullanırken az sayıda öğrencide analitik şemaları kullanmayı tercih etmişlerdir (Flores, 2006).

Bazı şemalar diğerlerinden daha gelişmiştir (Sowder ve Harel, 1998). Fakat aynı kişi farklı ortamlarda veya farklı zamanlarda farklı kategorilere dâhil olmasının yanı sıra özel durumlarda kanıt şemalarının birleşimini de kullanabilmektedir (Sowder ve Harel, 1998; Flores, 2002). Bunun sebebi öğrencilerin bilgi birikimleri ve kanıt ile ilgili tecrübeleri olabilir.

Araştırmaların sonuçları birlikte ele alındığında öğrencilerin genellikle buldukları sonuçların doğruluğunu savunurken dışsal ve deneysel kanıt şemalarını kullandıkları görülmüştür (Harel, 2001; Flores, 2002; Flores, 2006). Dışsal şemalardan ise en çok kullanılanı otorite kanıt şemasıdır. Öğrencilerin sezgileri veya temel örnekler güvendikleri diğer delillerdir. Bunların yanı sıra öğrenciler için geçerli olan kanıt şemaları otorite, sembolik veya deneysel kanıt şemalarıdır. Desen genelleme yani dönüştürülebilen kanıt şemaları ise öğrencilerde eksiktir (Harel, 2001). Türkiye'de yapılan çalışmalarda da benzer sonuçlara ulaşılmıştır.

Türkiye'de yapılan farklı araştırmalarda 6, 7 ve 8. sınıflarda öğrenimlerine devam etmekte olan öğrencilerle yürütülen klinik görüşmelerden elde edilen verilere bakıldığında dışsal, deneysel ve analitik şemalardan her üçünün de bulunduğu görülmektedir. Bu araştırmalarda öğrenciler problemlerin sonuçlarının doğruluğunu açıklarken genellikle dışsal şemalardan otoriteyi kullanmışlardır. Kullanılan deneysel şemalarda genellikle temel örnekler yer alırken analitik şemalardan da aksiyomatik kanıt şemaları kullanılmıştır. Problemleri çözdükten sonra bazı öğrenciler buldukları sonuçların nedenlerini açıklayabilirken bazı öğrenciler herhangi bir açıklama getirememişlerdir. Bunların yanı sıra bazıları da problemi çözmeyi reddetmişlerdir. Bazı öğrenciler ise problemi çözmelerine rağmen buldukları sonuçların doğru olup-olmadığından emin olamadıkları için bir açıklama yapmamışlardır (Aydoğdu vd., 2002; Aydoğdu vd., 2003).

Aydoğdu İskenderoğlu (2003) 5-9. sınıflar ile yapmış olduğu çalışmada da benzer sonuçlara ulaşmıştır (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003). Yapılan bu çalışmanın amacı; ilköğretim 5, 6, 7 ve 8. sınıflardaki öğrenciler ile ortaöğretim 9. sınıftaki öğrencilerin matematik problemlerine buldukları sonuçlardan nasıl emin olduklarını araştırmaktır. Bu amaçla her sınıf seviyesinden 4'er tane öğrenci olmak üzere toplam 20 öğrenci ile klinik görüşmeler yapılmıştır. Görüşmeler sırasında her öğrenciye araştırmacı tarafından hazırlanan 5'er tane problem yöneltilmiştir. Veriler nitel yöntemlerle analiz edilmiştir. Bulgulara bakıldığında öğrencilerin genellikle dışsal şemalardan otoriteyi kullandıkları görülmüştür. Deneysel şemaları kullanan öğrenciler ise genellikle temel örnekleri kullanmayı tercih etmişlerdir. Ayrıca kanıtlamada son nokta olarak görülen analitik şemalar diğer şemalara göre daha az kullanılmıştır. Bu da öğrencilerin matematiği öğrenirken kendi zihinsel yapılarını oluşturmaktan ziyade ezberleme yoluna gittiklerini ve kendibilgilerinden ziyade öğretmen, kitap veya çevrelerinde kendilerinden büyük birine güvendiklerini göstermektedir. Oysa önemli olan öğrencilerin buldukları sonuçları herhangi bir otoriteye dayandırmalarından ziyade akıl yürüterek kendi zihinsel yapılarını oluşturmalarıdır (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003). Bu araştırma ile benzer bir biçimde yürütülen farklı bir araştırmada da benzer sonuçlara ulaşılmıştır (İskenderoğlu ve Olkun, 2004).

Özetle; öğrenciler matematiksel kanıtı ve kanıt yapmayı zor bulmaktadırlar. Kanıtlama sürecinde ise deneysel delilleri ve deneysel kanıtları kullanmayı tercih ediyorlar. Çünkü bir durumun doğruluğunu veya yanlışlığını, tahminlerini ve desenlerini seçtikleri bir veya daha fazla örnekle göstermek öğrencilere geçerli bir kanıt olarak gelmektedir. Bunun yanı sıra öğrencilerin birçoğu açıklamanın gerekliliğine inanmamaktadırlar fakat istenirse de yapmaktadırlar. Kullanılan kanıt şemalarına bakıldığında en çok tercih edilen kanıt şemasının dışsal şemalardan otorite ve deneysel şemalardan da temel örnekler olduğu görülmektedir.

Öğrencilerin fikirlerini anlamlı olarak savunmaları kolay değildir. Fakat öğretmenlerin, öğretmen adaylarının ve öğrencilerin fikirlerini anlamlı olarak savunmaları önemlidir (Galindo, 1998). Bu nedenle öğretmen adaylarının kanıta nasıl yaklaştıkları da önemlidir.

#### 1.8.7. Üniversite Öğrencileri ve Öğretmen Adaylarının Kanıta Yaklaşımları ve Kullandıkları Kanıtlar ile Kanıt Şemaları

Yapılan çalışmalara bakıldığında öğrencilerin kanıta yaklaşımları gibi öğretmen adaylarının ve üniversite öğrencilerinin de kanıta yaklaşımlarının farklılık gösterdiği görülmektedir. Jones (2000) yaptığı çalışmada üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıtla olan deneyimlerini görmeye çalışmış ve bunun için de kavram haritalarını kullanmıştır. Çalışmanın sonunda ise öğrencilerin zayıf bir kanıt kavramına sahip olduklarını ortaya koymuştur (Jones, 2000). Bunun yanı sıra öğrenciler düşüncelerini açıklarken kendilerini rahatsız hissetmekte ve çözümlerinin sonuçlarını nasıl açıklayacaklarını bilememektedirler (Stylianou ve Blanton, 2001). Bazı öğrenciler de kanıtları problem çözme olarak görürken (Campbell vd., 2008) diğer bazıları da tanımlar, teoremler ve örnekler olarak görmektedirler (Gondek vd., 2009). Fakat üniversitede öğrenimlerine devam eden öğrenciler genellikle önce deneysel delilleri tercih etmektedirler.

Çünkü Stylianou ve Blanton (2001) yaptıkları çalışmada lisans düzeyinde 50 matematik öğrencisi ile çalışmışlar ve bu süreçte de öğrencilerin sosyal normlar dâhilinde düşüncelerini ve çözümlerini genel olarak açıklamalarını ve sosyal etkileşimlerini incelemişlerdir. Dönem ilerledikçe öğrencilerin açıklamalarını ve kanıtlarını sunmaya ve kullanmaya başladıkları ortaya çıkarken öğrencilerin ikna yöntemlerinin deneysel ve prosedürden tümdengelim ve kavramsala doğru yönelmeye başladığı görülmüştür. Çünkü araştırmada öğrenciler ilk haftalarda kanıtlarında prosedürü veya örnekleri kullanırlarken birkaç hafta sonra sebeplerini açıklamaya başlamışlardır (Stylianou ve Blanton, 2001). Öğrenciler farklı yöntemlerin kanıt oluşturduğunu düşünmektedirler.

Raman'da (2001) 11 üniversite öğrencisi ile yaptığı çalışmada öğrenciler ile "çift fonksiyonun türevinin tek olduğunu kanıtlayınız" sorusu üzerinden yapılandırılmış görüşmeler yapmıştır. Bu süreçte öğrenciler önce verilen soruyu çözmüşler ve ardından da farklı çözümler gösterilerek bunları değerlendirmeleri istenmiştir. Bu değerlendirmenin sonucunda da 5 tane yanıtı seçmeleri istenmiştir. Öğrencilerin seçtikleri yanıtlar (1) deneysel, (2) grafiksel, (3) kitaba bağlı olarak türevin tanımının kullanılması, (4) zincir kuralı ile yapılan kısa kanıt ve (5) formal kanıt gibi görünen yanlış çözümdür. Bu yanıtlardan ise öğrencilerin en çok kanıt olarak benimsedikleri, türevin kitaba bağlı olarak tanımının kullanıldığı 3. yanıt türüdür (Raman, 2001). Aslında bu yanıt öğrencilerin formal tanımlarla yapılan kanıtları daha geçerli saydıklarına bir delil oluşturuyor olabilir. Bunun yanı sıra bu tür kanıtlarla ikna olmalarından da kaynaklanıyor olabilir. Fakat öğrenciler zaman zaman doğru ve yanlış kanıtı birbirinden ayırmakta zorluklar da yaşamaktadırlar.

Selden ve Selden (2003) yaptıkları çalışmada üniversitede matematik öğrenimlerine devam eden 12 öğrencinin geçerlilik yeteneklerine ve basit bir teoremin kanıtına nasıl bir anlam yüklediklerine odaklanmışlardır. Bu süreçte çalışmalarında matematik öğrencilerine bir seri kanıt sunmuşlar ve bu kanıtlardan geçerli ve geçersiz olanlarını belirlemeleri istenmiştir. Çalışmanın sonunda üniversite öğrencilerinin verilen kanıtları %81 oranında değerlendirdiklerini ortaya koyarak doğru ve yanlış kanıtı ayırmakta zorluklar yaşadıklarını dile getirmişlerdir. Bunun yanı sıra kanıtları tanımlama yeteneklerinin çok sınırlı olduğunu da görmüşlerdir (Selden ve Selden, 2003). Bunun en önemli nedeni ise katılımcıların kanıt oluşturma nedenleri olabilir.

Weber (2004) araştırmasını 14 üniversite öğrencisi ile real analiz ve soyut cebir derslerinde yürütmüştür. Bu süreçte araştırmacı verileri çeşitli deneysel çalışmalar ile elde etmiş ve öğrencilerin oluşturduğu kanıtları derslere göre ayrı ayrı ele alarak değerlendirmiştir. Öğrencilerden bir dizi durumu kanıtlarken sesli düşünmeleri istenmiş ve bunun sonunda da öğrencilerden verilen durumu kanıtlarken kullandıkları yolu neden kullandıklarını açıklamaları istenmiştir. Çalışmanın sonunda öğrencilerin kanıt oluşturmak için en önemli nedenlerinin öğretmenlerini ikna etmek olduğu ve kanıt oluştururken de yöntemsel, sözdizimsel ve anlamsal kanıtların her üçünü de kullandıkları görülmüştür (Weber, 2004). Katılımcıların kanıt oluşturma nedenlerinin öğretmenlerini ikna etme olması aslında öğrencilerin kanıt yapmaya gerek duymadıklarının ve istenirse kanıt yaptıklarının bir göstergesi olabilir. Kanıt yapma sürecinde ise katılımcıların izledikleri aşamalar da önemlidir.

Smith (2006) çalışmasında sayılar teorisi dersinde üniversite öğrencilerinin kanıtlama süreçlerini ve kanıt oluşturma stratejilerini incelemiştir. Bu derste öğrenciler problemleri sınıfın dışında çözmelerinin yanı sıra teoremlerin kanıtlarını da sınıf dışında gerçekleştirmişlerdir. Daha sonra da öğrenciler çözümlerini sınıfta sunmuşlar ve öğrencilerin çalışmaları tüm sınıfla birlikte tartışılmıştır. Bunun ardından da araştırmacı, özel durum çalışmasıyla geleneksel olmayan bu içerikte öğrencilerin matematiksel kanıt oluşturmayı nasıl öğrendiklerini incelemiştir. Veriler 6 katılımcı ile 4 kez yapılan görüşmeler ile elde edilmiş ve bu süreçte öğrencilerden farklı durumlarda kanıt oluşturmaları istenmiştir. Bu çalışmanın sonunda öğrencilerin kanıtlama süreçlerinin 4 aşama içerdiğini ortaya koymuştur. Bunlar: önceki stratejileri kullanma, informal iddialar oluşturma, formal kanıt oluşturma ve kanıtın/iddianın son halini onaylama veya derinlemesine düşünmektir. Fakat bu aşamalar hiyerarşik değildir. Bunun yanı sıra öğrencilerin kanıt oluşturma stratejileri farklılık göstermektedir. Öğrencilerin her kanıt denemelerinde aşamaları aynı dizide tercih etmedikleri ve her seferinde aynı stratejileri kullanmadıkları görülmüştür. Bunun yanı sıra problem odaklı yapının öğrencilerin karmaşık kanıt stratejileri geliştirmelerini kolaylaştırdığı ortaya çıkmıştır (Smith, 2006). Kanıtlama sürecinde ortaya çıkan bu aşamalar ise Sowder ve Harel'in (1998) ortaya attıkları kanıt şemaları gibi bir hiyerarşi göstermemekte ve öğrenciler her zaman aynı stratejileri kullanmamaktadırlar. Smith'in (2006) ortaya attığı aşamalarda ilk basamakta yer alan önceki stratejileri kullanma dışsal kanıt şemalarından alışkanlık edinilmiş şemalar ile örtüşürken formal kanıt oluşturma ve kanıtın/iddianın son halini onaylama veya derinlemesine düşünme de analitik şemalardan aksiyomatik kanıt şemaları ile örtüşmektedir. Bu süreçte öğretmen adaylarının ne tür kanıt kullandıkları da önemlidir.

Martin ve Harel (1989) yaptıkları çalışmada 2. sınıfa devam etmekte olan 101 ilköğretim öğretmeni adayından matematik dersi kapsamında tümevarımsal ve tümdengelimsel doğrulamalarını matematiksel doğruluk açısından savunmalarını istemişlerdir. Bu süreçte öğretmen adaylarına iki tane 30 dakikalık testler sunulmuştur. Yapılan çalışmanın sonunda birçok öğretmen adayının tümevarımsal ve tümdengelimsel iddiaları bir matematiksel durumun kanıtı olarak kabul ettikleri ortaya çıkmıştır. Bu ise öğrencilerin tümevarımsal ve tümdengelimsel iddiaları günlük hayatlarındaki deneyimlerinin sonucunda ve matematik sınıflarında oluşturduklarını göstermektedir. Bu süreçte öğrencilerin matematiksel kanıt olarak kabul ettikleri tümevarımsal ve tümdengelimsel iddialar çok özel bulunmamıştır. Çünkü genel kanıt doğrulamasını doğru kabul eden birçok öğrenci yanlış kanıt doğrulamasını reddetmiş; iddianın doğruluğundan ziyade alışkın oldukları formatta ortaya çıkmasından etkilenmişlerdir (Martin ve Harel, 1989). Bu da aslında öğretmen adaylarının dışsal şemalardan alışkanlık edinilmiş şemaları geçerli bulduklarını göstermektedir. Bunun yanı sıra kanıtları gereksiz bulan öğretmen adayları da bulunmaktadır.

Pandiscio (2002) araştırmasında dört ortaokul matematik öğretmeni adayı ile çalışarak özel durum çalışması yöntemini kullanarak verilerini gözlem, görüşme ve anket ile toplamıştır. Bu çalışmada araştırmacının amacı formal kanıtlar, geometri dersinde dinamik geometri programlarıyla verildiğinde öğretmen adaylarının formal kanıtlara gereksinimi ve yararını nasıl anladıklarını ortaya çıkarmaktır. Pandiscio (2002) araştırmaya başladığında öğretmen adaylarının, lise öğrencileri için geometri programları ile anlatılan derste formal kanıtı gereksiz bulduklarını görmüştür. Fakat öğretmen adayları dinamik geometri programları ile çalıştıktan sonra lise öğrencileri için formal kanıtın değerini sorgulayarak kanıtın, geometrinin kalbi olduğuna ve dinamik programlarla öğrencilerin kanıtta kullanılan matematiksel ilişkileri daha kolay anlayacaklarına inanmaya başlamışlardır. Dolayısıyla öğretmen adaylarına göre dinamik programlar ile öğrencileri inandırmak daha kolaydır. Öğretmen adaylarına göre programlar öğrencilerin kanıtlamalarda yeterlik kazanmalarına yardım etmekte ve teoremler ile problemleri anlamalarına yardımcı olmaktadır (Pandiscio, 2002). Ülkemizdeki öğretmen adaylarının ise kanıta bakışları zaman zaman farklılaşmaktadır.

Moralı vd. (2006) yaptıkları çalışmada, matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşlerinin ne olduğunu araştırmışlardır. Araştırmanın örneklemini, Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi, İlk ve Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümlerinin birinci ve sonuncu sınıflarında okuyan 337 öğretmen adayı oluşturmuştur. Örneklemin 182'si birinci sınıf, 155'i son sınıf öğrencilerinden; 59'u ortaöğretim ve 278'i de ilköğretim matematik öğretmenliği bölümleri öğrencilerinden oluşmaktadır. Çalışmada matematik öğretmeni adaylarının kanıt ve kanıt yapmaya ilişkin görüşlerini ortaya çıkarmaya yönelik geliştirilen 20 maddelik bir ölçek kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar matematik öğretmeni adaylarının büyük bir kısmının kanıt yapmaya yönelik ya görüşlerinin olmadığını ya da görüşlerinin yetersiz olduğunu ortaya koymuştur. Yapılan araştırmanın sonuçlarına bakıldığında, matematik öğretmeni adaylarının kanıt yapmayayönelik görüşlerinin tam olarak oluşmadığı görülmüştür. Bu da matematik öğretmeni adaylarınınkanıt yapmanın, matematik ve matematik öğretimi açısından önemini bilmediklerini veüzerinde düşünmediklerini göstermiştir. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının aldıkları eğitimboyunca öğrendikleri teorem ve bunların kanıtlarını belki de ezberledikleri düşünülebilir (Moralı vd., 2006). Oysa ki önemli olan kanıtları ezberlemek değil öğretmen adaylarının üzerinde düşünerek geliştirdikleri stratejiler sonucunda kanıtı tamamlamalarıdır. Öğretmen adaylarının yaptıkları kanıtlarda ise kanıta bakış açılarının da önemli bir yeri bulunmaktadır.

Üzel ve Özdemir (2009) yaptıkları çalışmada, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt ve kanıt yapmaya yönelik tutumlarını belirlemek amacıyla tarama modeli kullanılmışlardır. Bunun için 21 maddeden oluşan ve 5'li likert tarzında kanıt ve kanıt yapmaya yönelik bir tutum ölçeği geliştirilmiştir. Ölçek ilköğretim matematik öğretmenliğinde öğrenimlerine devam etmekte olan 95 birinci sınıf ve 70 üçüncü sınıf öğretmen adayına uygulanmıştır. Verileri analiz etmek amacıyla bağımsız örneklemler için t-testi ve Manova kullanılmıştır. t- testi sonucunda sınıf düzeyi ve cinsiyetin ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt ve kanıt yapmaya yönelik tutum puanları üzerinde etkili olduğu görülmüştür. Manova analizine göre "kanıt yapmaya yönelik tutum" ve "kanıta yönelik genel bakış" puanlarının öğrenim görülen sınıf düzeyine ve cinsiyete göre anlamlı bir farklılık gösterdiği ortaya çıkmıştır. Diğer bir ifadeyle çalışmanın sonucunda birinci sınıf öğretmen adaylarının kanıt hakkında üçüncü sınıflardan daha olumlu tutum ve bakış açısına sahip oldukları ortaya konulmuştur (Üzel ve Özdemir, 2009) .Birinci sınıf öğretmen adaylarının kanıta yönelik tutumlarının olumlu olmasında henüz formal kanıtın nasıl yapıldığından haberdar olmamaları olabilir. Bunun yanı sıra yapılan farklı kanıtlar farklı kanıt şemalarına dahil olmaktadır.

Harel ve Sowder (1998) öğrencilerin kanıt kavramlarının ne olduğu, öğrencilerin savunmalarını değerlendirip değerlendirmedikleri ve bir sebebe ikna etmede kanıtın rolünün ne olduğu gibi sorular ile üniversite öğrencileri üzerinde bir araştırma yapmışlardır. Fakat araştırmanın odaklandığı temel konu öğrencilerin kanıt şemalarıdır. Bu araştırmaya bağlı olarak altı öğretim deneyinde 128 üniversite öğrencisi ile klinik görüşmeler yapılmasının yanı sıra grup tartışmaları, ödevler, quizler ve yazılı testler de yapılmıştır. Verilerin analizlerinden sonra öğrencilerin kullandıkları kanıt şemaları dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemaları olmak üzere üç ana şema ve bu ana şemaların alt şemaları olarak belirlenmiştir (Harel ve Sowder, 1998). Öğrenciler ise bu kanıt şemalarının tamamını kullanmaktadırlar.

Housman ve Porter (2003) üniversitede öğrenimlerine devam etmekte olan 11 matematik öğrencisi ile yaptıkları yapılandırılmış görüşmeler ile kullandıkları kanıt şemalarını belirlemişlerdir. Bu öğrencilerin hepsi de kızların devam ettiği bir üniversitedirler. Görüşmeler sırasında öğrenciler ile kanıt okuma ve yazma üzerine çalışmalar yapılmıştır. Görüşmeler sırasında öğrencilere bazıları doğru ve diğer bazıları da yanlış olan 7 tane varsayım verilmiştir. Öğrencilere ise bu varsayımların doğru mu yanlış mı olduğu sorularak savunmaları istenmiştir ve bu savunmaları da Harel ve Sowder'ın (1998) kanıt şemalarına göre sınıflandırılmıştır. Bunun sonucunda öğrencilerin bir tanesi dört farklı kanıt şeması kullanırken diğerleri bir veya daha fazla kanıt şeması kullanmışlardır. Ayrıca bu katılımcılardan sadece dışsal şemaları kullanan olmazken sadece deneysel ve sadece analitik şemaları kullanan öğrenciler olmuştur. Verilmiş olan yedi varsayımı savunma sürecinde dışsal ile analitik şemaları kullananlar, deneysel ile analitik şemaları kullananlar ve her üç şemayı da kullanalar olmuştur. Bu öğrencilerden dışsal faktörleri kullananlar örnek oluşturmakta, örnekleri kullanmakta ve kavramları tekrar formülleştirmede başarısız olmuşlardır. Ayrıca bu öğrencilerden deneysel şemaları kullananlardan sadece bir öğrenci ise örnek oluşturmada diğer öğrencilerden daha başarılı olmuştur (Housman ve Porter, 2003).

Öğretmen adayları ise kanıtlama sürecinde genellikle tümevarımsal doğrulama ve ikna etmeyi kullanmaktadırlar (Martin ve Harel, 1989). Öğretmen adaylarına göre öğrencilere rehberlik etmek, onların kendi kanıtlarını oluşturmalarına yardım etmektedir. Dickersen'da (2006) yapmış olduğu çalışmada on matematik öğretmeni adayı ile 21 tane görev (task) yardımıyla yapılandırılmış görüşmeler yaparak öğretmen adaylarının kanıt yazarken iletişimin rolünü nasıl algıladıklarını ve ilişkileri açıklarken kanıta ne değeri yüklediklerini araştırmıştır. Bu çalışmanın sonunda görülmüş ki bütün katılımcılar kanıtı matematiksel tümevarım olarak kabul etmiş ve sunmuşlardır fakat metottaki inançları bazen dışsal kanıt şemalarını kullandıklarını göstermektedir. Bunun yanı sıra öğretmen adayları kanıtların çoğunu anlamadıklarını ve bu nedenle de dışsal şemalardan otorite kanıt şemalarını kullanabileceklerini çünkü hazır formatta olduğu için anlamaya gerek kalmadığını dile getirmişlerdir (Dickersen, 2006). Ülkemizde yapılan çalışmalarda ise öğretmen adaylarının her üç şemayı da kullandıkları görülmüştür.

Sarı, Altun ve Aşkar (2007) yaptıkları çalışmada Matematik Eğitimi Anabilim Dalı birinci sınıf öğrencileriyle Analize Giriş II dersi kapsamında öğrencilerle görüşme, ders gözlemleri ve öğrencilerin kanıtlarının bulunduğu kâğıtlar yardımıyla öğrencilerin kanıt yapma yaklaşımları ve kanıt şemalarında nasıl bir bilişsel örüntü bulunmaktadır sorusuna yanıt aramışlardır. Bu süreçte farklı seviyelerdeki üç öğrenci ile görüşme yapılmıştır. Bu çalışmanın sonunda araştırmacılar öğrencilerin kanıtlama sürecindeki başarıları ile analiz dersindeki başarılarının birbirine paralel olduğunu, başarılı olan öğrencinin daha formal kanıtlar yaptığını ve analitik kanıt şemalarından dönüştürülebilen kanıt şemalarını kullandığını ortaya koymuşlardır. Bunun yanı sıra orta düzeydeki öğrenci deneysel kanıt şemalarından temel örnekleri ve analitik şemalardan dönüştürülebilen şemaları kullanırken düşük seviyede ki öğrenci de dışsal şemalardan otorite kanıt şemasını ve deneysel kanıt şemalarından da sezgisel kanıt şemasını kullanmıştır (Sarı vd., 2007). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının yanı sıra sınıf öğretmeni adayları ile de yapılmış çalışmalar bulunmaktadır.

Baki, İskenderoğlu ve İskenderoğlu (2009) çalışmalarında altı sınıf öğretmeni adayının her birine fonksiyonlar konusu ile ilgili toplam on beş adet problem yönelterek klinik görüşmeler yapmışlardır. Yöneltilen bu problemlerin çoğu öğretmen adayları tarafından çözülürken çözemedikleri problemler de olmuştur. Bunun yanı sıra dışsal, deneysel ve analitik şemaların her üçü de kullanılmıştır. Kullanılan dışsal şemalar genellikle otorite kanıt şeması iken analitik şemalardan da genellikle aksiyomatik kanıt şemaları kullanılmıştır. Bu süreçte öğretmen adayları genellikle deneysel kanıt şemalarından temel örnekleri kullanmışlardır. Sınıf öğretmeni adaylarının problemlerin sonuçlarını doğrulama sürecinde kullandıkları kanıt şemaları arasında çok büyük farklılıklar bulunmamakla birlikte verilere bakıldığında öğretmen adaylarından bir tanesinin analitik şemaları hiç kullanmadığı ortaya çıkmıştır. Öğretmen adayları toplam 90 problemden 20 tanesinde dışsal şemaları kullanmışlardır. Kullanılan dışsal şemalardan da genellikle otorite kanıt şeması kullanılırken deneysel şemalardan temel örnekler ve analitik şemalardan da aksiyomatik kanıt şemaları kullanılmıştır. Çalışılan grup üniversite öğrencileri olmasına rağmen kanıtlamada son nokta olarak kabul edilen analitik kanıt şemaları en az kullanılan şema olmuştur.

Kısaca; üniversitede öğrenimlerine devam etmekte olan öğrenciler ve öğretmen adayları zayıf kanıt kavramına sahiptirler ve bunun sonucunda da düşüncelerini açıklamaktan rahatsız olmaktadırlar. Bunun yanı sıra çözümlerini nasıl açıklayacaklarını ise bilmemektedirler. Bir problemin çözümünde formal tanımlar varsa onu daha geçerli sayarken doğru-yanlış kanıtı ayırmakta zorlanmaktadırlar. Ayrıca bazıları kanıtı problem çözme, bazıları tanım, bazıları teorem ve diğer bazıları da örnek olarak görmektedirler. Bunlara ek olarak kullandıkları üç farklı kanıt şeması bulunmasına rağmen genellikle deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmaktadırlar. Oysa özellikle Türkiye'de farklı sınıf seviyelerindeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ne tür kanıt şemaları kullandıklarını ortaya koyan yeterli sayıda çalışma bulunmamaktadır. Bunun yanı sıra literatüre bakıldığında kanıt şemalarını ortaya çıkarmaya yönelik olarak genellikle klinik görüşmelerin yapıldığı görülmektedir. Buna bağlı olarak da bu çalışmanın yöntemi tasarlanmıştır.

## 2.YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu araştırmada farklı düzeylerdeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ne tür kanıt şemaları kullandıkları, düzeylere göre kullanılan kanıt şemalarının ne tür farklılıklar gösterdiği, öğretmen adaylarının kanıta bakış açıları ve bu bakış açıları ile kullanılan kanıt şemaları arasında bir bağlantı olup-olmadığını ortaya koymak amaçlanmıştır. Bundan önceki bölümde de bu problemlere bağlı olarak araştırmanın gerekçesi, önemi ve amacının yanı sıra literatür taraması ile uluslar arası ve ulusal çalışmalara yer verilmiştir. Tezin bu bölümünde ise araştırmanın yürütülmesi sırasında izlenilen yöntem, veri toplama araçları ve verilerin analizinde takip edilen adımlar ayrıntıları ile açıklanacaktır.

### 2.1. Araştırmanın Yöntemi

Bu çalışma gelişimci araştırmalardan enlemesine yürütülen bir çalışmadır. Gelişimci araştırmaların tanımlayıcı bir özelliği vardır. Tanımlayıcı araştırmalar genellikle bireyleri, toplulukları, kurumları, metotları veya materyalleri karşılaştırmak, tanımlamak, sınıflamak, benzerliklerini veya farklılıklarını anlamak, analiz etmek ve analiz sonuçlarını yorumlamak için yapılmaktadır. Bunun yanı sıra gelişimci araştırmalar neydi ve ne oldu gibi soruları da araştırmaktadır (Çepni, 2009).

Gelişimci araştırmalar enlemesine (cross-sectional study) ve boylamasına (longitudinal study) olmak üzere iki biçimde yürütülmektedir. Bunlardan boylamasına yürütülen çalışmalarda aynı yaş grubundan katılımcıları devam eden süreçte tekrar test etmek ve enlemesine çalışmalarda da farklı yaşlardaki farklı grupları test etmek yer almaktadır (Miller, 1998). Bu süreçte enlemesine çalışmalarda bir veya birden fazla değişken içeren veriler bir zaman diliminde toplanırken boylamasına çalışmalarda iki veya daha fazla zaman diliminde toplanmakta ve bu süreçte de ölçme araçları değişebilmektedir (Menard, 2008). Bu nedenle de gelişimci araştırmaların merkezinde yaş karşılaştırması bulunmakta ve gelişimci araştırmacılar tam olarak farklı kaynaklardan farklı yaşlardaki örneklemlerin resmini çizmektedirler. Çünkü boylamasına çalışmalarda aynı yıl doğanlarla tekrarlayan çalışmalar yapılırken enlemesine seçilen örneklemde farklı zamanlarda doğan ama aynı zamanda çalışılan bir gruptur (Miller, 1998).

Bu çalışmada kullanılan gelişimci araştırmalardan enlemesine yürütülen çalışmalarda ise farklı yaşlardaki farklı bireyler test edilmekte ve karşılaştırılmaktadır (Miller, 1998). Bu tür çalışmalarda aynı konunun bir örneklem üzerinde uzun süre çalışılarak gelişim düzeyinin ortaya çıkarılması amaçlanmaktadır (Çepni, 2009). Böylece bir topluluğa anlık görüntü de sağlanmış olmaktadır. Çünkü bu topluluk farklı yaşlarda, farklı işlerde, farklı eğitim düzeyinde, farklı gelire sahip, farklı şehirlerde yaşıyor olabilir (Cohen, Manion ve Morrison, 2005). Böylece bir çalışmada, farklı yıllardaki örneklemler takip edilerek çalışma daha kısa sürede bitirilebilmektedir (Çepni, 2009).

Enlemesine çalışmalarda farklı yaşlardaki farklı katılımcılar ile çalışılmaktadır. Bu nedenle boylamasına çalışmalardan daha ekonomiktir (Miller, 1998; Mann, 2003). Bunun sonucunda da enlemesine çalışmalar birçok araştırma problemine daha uygundur (Miller, 1998). Bunlara ek olarak enlemesine çalışmalarda geçmişteki olaylarla ilgili sorular sorularak (örneğin; önceki iş, doğum tarihi, evlilik tarihi gibi) geçmişle ilgili veriler de toplanabilir ve kullanılabilir (Cohen, Manion ve Morrison, 2005).

Enlemesine çalışmalarda sınırlılıklar da bulunmaktadır (Miller, 1998). Çünkü her katılımcı ile ancak bir kez çalışılmakta ve yaşla birlikte meydana gelen doğrudan değişimlere delil sağlanamayabilmektedir (Miller, 1998; Babbie, 2001). Diğer bir ifadeyle farklı yaş gruplarındaki seçim düzeni yaşların karşılaştırılmasını engelleyebilir. Bunu ortadan kaldırabilmek için ise yaş grupları arasındaki farklar tanımlanırken bireylerin gelişimlerindeki doğal değişimin yaşıyla birlikte gerçekten yansıtılması gerekmektedir. Bunun sonucunda da hem enlemesine ve hem de boylamasına çalışmalarda ölçme eşitliği ortak bir sorun olarak karşımıza çıkmaktadır. Bunun ortadan kaldırılabilmesi için de seçilen ölçme aracının karşılaştırılan yaş grupları için eşit düzeyde uygun olması gerekmektedir (Miller, 1998). Enlemesine çalışmaların ölçme eşitliği gibi problemlerinin yanı sıra avantaj ve dezavantajları da bulunmaktadır. Bu avantaj ve dezavantajlara aşağıdaki Tablo 2'de yer verilmiştir.

Tablo 2. Enlemesine çalışmaların avantaj ve dezavantajları (URL-5, 2009).

| **Avantajlar** | **Dezavantajlar** |
|---|---|
| Birçok değişkenin verisi | Yanlışların gittikçe artma ihtimali |
| Geniş bir örneklemden veri | Daha fazla bireyle gittikçe artan maliyet |
| Dağınık bireylerden veri | Her konumun gittikçe artan maliyeti |
| Tutum ve davranış verisi | Değişimleri ölçemez |
| Kim, ne, nerede, ne zaman sorularının yanıtları | Neden sonuç kuramaz |
| İnceleyici araştırmalar için iyi | Bağımsız değişkenlerin kontrolünün olmaması |
| Gelecekteki araştırmalar için hipotezler üretir | Karşıt hipotezleri kabul etmenin zorluğu |
| Birçok araştırmacı için yararlı | Durağan, zaman sınırlaması |

Enlemesine çalışmaların en önemli avantajları sadece bir grup ile çalışılması, verinin bir kerede toplanması, çoklu sonuçların çalışılabilmesi, zaman kazandırması ve ucuz olmasıdır. Enlemesine çalışmaların birçoğu anket, ölçek gibi veri toplama araçları kullanılarak yürütülür ve alternatif olarak da bireyler ile görüşmeler yapılabilir.

Bu çalışmada veriler nitel veri toplama tekniklerinden klinik görüşmeler, bir yazılı sınav ve bir ölçek yardımıyla elde edilmiştir. Çalışmada sayısal veri elde etmekten ziyade öğrencilerin düşünceleri ortaya çıkarılmak istenmektedir. Bu araştırmada klinik görüşmelerin kullanılmış olmasındaki temel nedenlerden biri öğrencilere herhangi bir yönlendirme yapmadan kullandıkları kanıt şemalarını belirlemeye çalışmaktır. Bir diğer nedeni ise öğrencilerden konu ile ilgili daha derinlemesine bilgi elde etmek ve düşüncelerini ortaya çıkarmaktır. Ayrıca kanıt şemaları ile ilgili teorik çerçeve daha önce farklı araştırmalar ile ortaya konulduğu için ilköğretim matematik öğretmenliği öğretmen adaylarının ne tür şemalar kullandıklarını görmek için klinik görüşmelerin yeterli olacağı düşünülmektedir.

### 2.2. Araştırmanın Tasarımı

Gelişimci araştırmalardan enlemesine çalışmalar gözlemsel çalışmalar olmasının yanı sıra (Mann, 2003) inceleyici ve tanımlayıcı çalışmalar olarak da karşımıza çıkmaktadır (Babbie, 2001). Bunun yanı sıra bu tür çalışmalar nedenleri ve sebepleri ortaya çıkarmakta da kullanılmaktadır (Mann, 2003). Bu çalışmada da enlemesine çalışmalarda genellikle veri toplama aracı olarak kullanılan bir ölçek ile ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının farklı sınıflarda matematiksel kanıta bakış açıları incelenerek tanımlanacaktır.

Bunun yanı sıra farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarının ne tür kanıt şemaları kullandıkları ve bu sınıf seviyelerine göre ne tür farklılıklar gösterdiği ise yapılan görüşmeler sonucunda tanımlanacaktır. Bunun için de nitel araştırma yöntemi kullanılacaktır. Buna bağlı olarak da matematiksel kanıta bakış açılarının kullandıkları kanıt şemalarını nasıl etkilediği açıklanacaktır.

Bu araştırmada; açık uçlu sorulardan oluşan yazılı sınavlar nicel verileri toplamada kullanılırken, klinik görüşme problemleri de araştırmanın nitel verilerini toplamada kullanılmıştır. Ancak farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemalarınının incelenmesine odaklanılan bu çalışmada, nitel veriler üzerine daha çok vurgu yapılmıştır.

Nitel araştırmalar kişilerin ne düşündüklerini ve nasıl düşündüklerini derinlemesine araştırmaya ve açıklamaya yardımcı olmaktadır (Bogdan ve Biklen, 1998; Creswell, 2002). Bu çalışmada da ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları kanıt şemalarını belirlemek için nitel araştırma yöntemlerinde veri toplama aracı olarak kullanılan klinik görüşme kullanılmıştır. Çünkü nicel araştırma yöntemleri ile öğretmen adaylarının zihinsel süreçlerini ve düşünme yollarını ortaya çıkarmak mümkün olmayacaktır. Literatürde bireylerin düşünme yollarını ortaya koyan kanıt şemalarının belirlenmesine yönelik yapılan çalışmalarda nitel araştırma yöntemlerinde temel veri toplama kaynağı olarak da klinik görüşmelerin kullanıldığı görülmektedir (Martin ve Harel, 1989; Sowder ve Harel, 1989; Harel, 2001; Flores, 2002; Flores, 2006; Harel ve Sowder, 2007). Bu şekilde öğretmen adaylarının ne yaptıklarının yanı sıra nasıl ve neden yaptıkları sorularına da yanıt vermek mümkün olacaktır. Bu çalışmada da veriler klinik görüşmeler ile toplanmıştır. Bu çalışmaya katılan ilköğretim matematik öğretmeni adayları, üniversite düzeyinde fonksiyonlar konusundaki formal eğitimlerini tamamlamışlardır. Bu nedenle fonksiyonlar konusu ile ilgili herhangi bir öğretme deneyimi yapılmamış, bu konu ışığında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları kanıt şemaları belirlenmeye çalışılmıştır.

1. Kanıt şemaları öğrencilerin kanıt kavramlarının bir taksonomisi olmasının yanı sıra bir düşünme biçimi olarak bir bireyin tespitlerini ve ikna etme biçimlerini de birlikte tanımlamaktadır. Bir insanın kanıt şeması, araştırarak öğrendiği ve kendisini ikna ettiği oluşumlardan meydana gelmektedir. Bu nedenle de kanıt şemaları düşünmenin bir yoludur. Kanıt şemalarının bu işlevleri göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adaylarının kanıt şemalarını belirleme sürecinde fonksiyonlar konusu kullanılmaya karar verilmiştir. Çünkü fonksiyon kavramı bütün matematiğin temelinde yer almakta ve matematikteki kavramları

birleştirmektedir. Ayrıca matematiğin farklı dalları için temel oluşturmasının yanı sıra sayı ve küme kavramlarıyla birlikte bütün matematiksel düşünmelerde de temel oluşturmaktadır.

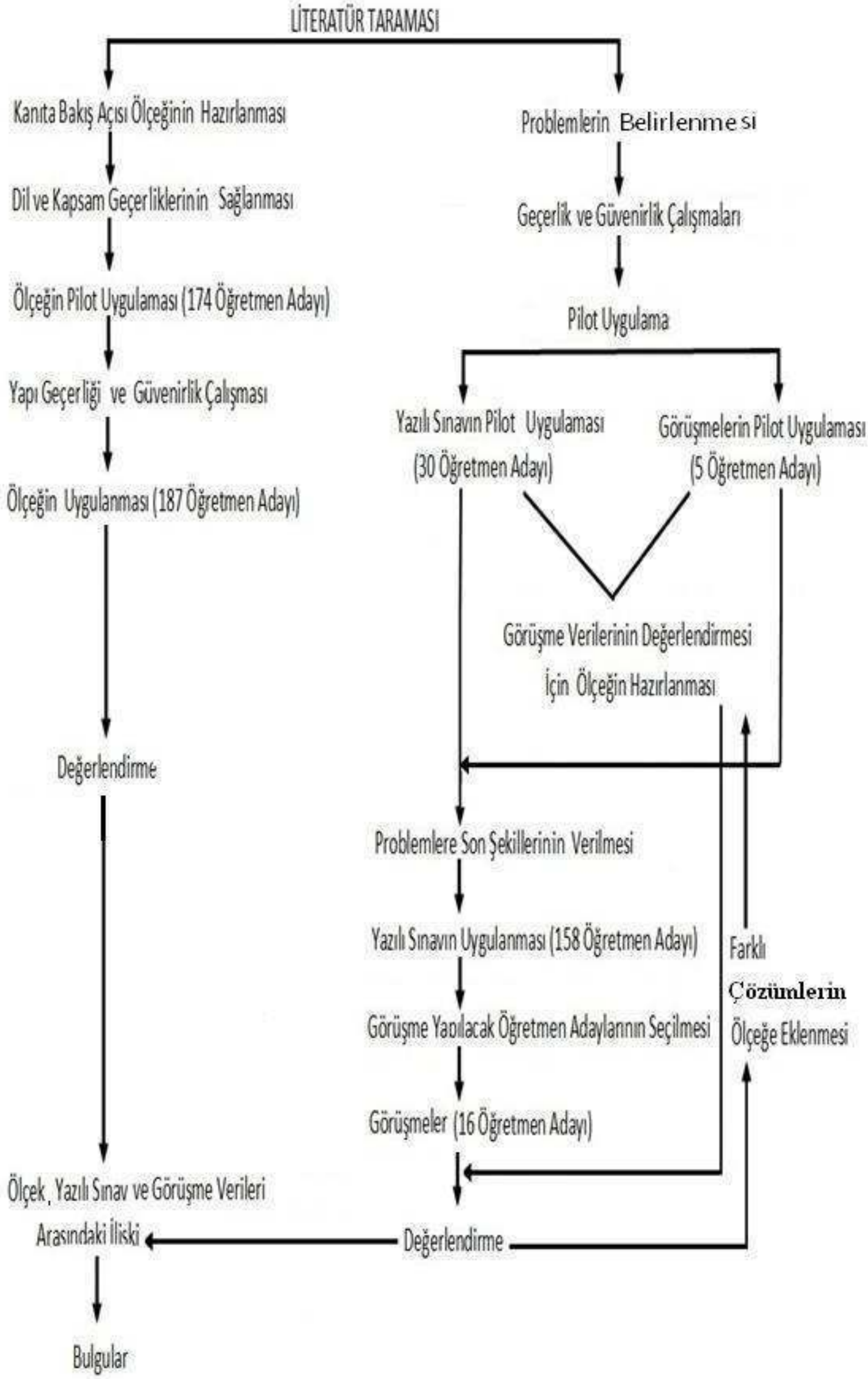
2. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları kanıt şemalarını ortaya çıkarmaya yönelik olarak klinik görüşmelerde kullanılan problemler için fonksiyonlar konusu ve bu konuda literatürde kullanılan problemler göz önünde bulundurularak problemler araştırmacı tarafından geliştirilmiştir.

3. Öğretmenlerin kanıta ilişkin algıları ve deneyimleri öğrencilerin kanıt becerilerini kazanma süreçlerinde etkili olmaktadır. Bu nedenle de ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıta bakış açıları önemlidir çünkü kullandıkları kanıtları ve kanıt şemalarını etkilemektedir. Bu durum göz önünde bulundurularak öğretmen adaylarının kanıta ilişkin görüşleri bir ölçek yardımıyla belirlenmeye çalışılacaktır. Pilot çalışmanın sonunda "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" ne son şekli verilmiştir (bkz. Ek 1).

4. Pilot çalışma ile kanıt şemaları ve kanıt şemalarının alt şemaları için her bir şema için şemada gösterge olan davranışlar ayrı ayrı belirlenmeye çalışılmıştır. Böylece ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt şemalarını belirlemek için ölçekler elde edilmiştir (bkz. Ek 2). Ayrıca pilot çalışmaların sonunda klinik görüşmelerde öğretmen adaylarına yöneltilecek problemler geliştirilerek problemlere son şekilleri verilmiştir (bkz. Ek 2).

### 2.2.1. Araştırmanın Yürütülmesi

Bu bölümde araştırmanın asıl uygulamasından önce yapılan pilot çalışmadan ve asıl uygulama sürecinde yapılanlardan, araştırma yürütülürken nasıl bir yol izlendiğinden bahsedilecektir. Aşağıda yer alan Şekil 2'de araştırmanın yürütülmesinde izlenen adımları gösteren şemadır.




Şekil 2. Araştırmanın uygulanmasında izlenen adımlar

Şekil 2'deki şema göz önünde bulundurularak araştırmanın yürütülmesi esnasında izlenen adımlar aşağıdaki gibi sırasıyla açıklanabilir.

1. Araştırmanın hazırlık aşamasında, öncelikle yurt içi daha sonra da yurtdışında yürütülen kanıt yapmaya ve kanıta yönelik görüşlere ait kapsamlı bir literatür taraması yapılmıştır. İlgili literatür incelemesi sırasında, Sowder ve Harel'ın (1989) kanıt yapmaya dair ortaya attıkları kanıt şemalarının araştırmada kullanılmasına karar verilmesi üzerine bu konuyla ilgili çalışmaların bir derlemesi oluşturulmuştur. Bu süreçte farklı sınıf seviyesindeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemalarının belirlenmesine karar verilmiştir. Bunun içinde literatür destekli olarak araştırmacı tarafından fonksiyonlar konusunu içeren problemler geliştirilmiştir. Bu problemler farklı sınıf seviyelerindeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları kanıt şemaları araştırmanın nicel boyutu için yazılı sınav olarak kullanılırken aynı zamanda araştırmanın nitel boyutu için gerekli olan klinik görüşmelerde de kullanılmak üzere geliştirilmiştir. Bu problemler geliştirilirken ise önce literatür destekli olarak lisans düzeyinde fonksiyonlar konusunu içeren problemlerden oluşan bir havuz oluşturulmuştur. Daha sonra bu problemlerin bazıları iptal edilerek çalışmanın amacına uygun olabilecek olanlar ayrılmıştır. Ayrıca araştırmada kanıta yönelik bakış açısını ortaya koymak için incelemeler sonucunda, araştırmada kullanılmak üzere Lee (1999) tarafından hazırlanmış olan ölçek geliştirilmiştir.

2. Kanıta bakış açısını görmeye dair kullanılan "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği"nin Türkçe'ye çevrilip kullanılması için ilk olarak orijinal ölçeği geliştirmişolan yazardan kullanma izni alınmış, daha sonra pilot çalışma kapsamında ölçeğin dil ve kapsam geçerlikleri yapılmıştır. Ölçeğin yapı geçerliği ve güvenirliğini test etmek amacıyla pilot çalışma kapsamında farklı sınıf seviyelerindeki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarına ölçek uygulanmıştır. Ölçek toplam 174 öğretmen adayına uygulanarak geçerlik ve güvenirlik çalışmaları için kullanılmıştır.

3. Pilot çalışma sonunda elde edilen sonuçlar ışığında ölçekte gerekli düzenlemeler yapılarak asıl uygulamaya hazır hale getirilmiştir (bkz. Ek 1.). Ayrıca, ölçeğin başındaki bilgiler bölümü, yazılı sınavda kullanılan şemalar ile kanıta bakış açısı arasında paralellik olup-olmadığını görme sürecinde hem yazılı sınava giren ve hem de ölçeği yanıtlandıran aynı öğretmen adaylarını belirlemede kolaylık sağlamıştır. Bunun yanı sıra bu bilgiler katılımcı hakkında bilgi sahibi olmaya da yardımcı olmuştur. Ölçeğin pilot çalışmaları ile paralel olarak yazılı sınavların ve klinik görüşmelerin de pilot çalışmaları

yapılmıştır. Bunun içinde öncelikle problemlerin geçerlik ve güvenirlikleri tamamlanmıştır. Bunun sonucunda da hem yazılı sınavda ve hem de klinik görüşmelerde kullanılan fonksiyonlar konusu ile ilgili problemlere son şekli verilmiştir. Yazılı sınavların pilot çalışmaları sırasında da görüşme verilerini değerlendirmek üzere bir ölçek (bkz. Ek 2.) geliştirilmiştir.

4. Pilot çalışmaların sonrasında asıl çalışma için önce yazılı sınav uygulanarak her bir katılımcının her bir problemde hangi kanıt şemasını kullandığı belirlenerek görüşme yapılacak öğretmen adayları seçilmiştir. Yazılı sınavdan bir ay sonra ise her bir öğretmen adayı ile görüşmeler yapılmaya başlanmıştır. Bu süreçte her bir katılımcı ile ikişer kez 30 ila 60 dakika arası süren klinik görüşme yapılmıştır. Bunun sonucunda klinik görüşmeler tamamlanmış ve çözümlemeleri yapılarak analizleri yapılmıştır. Bu süreçte problemlerin çözümünde eğer farklı çözümler ortaya çıkmışsa bu farklılıklar görüşme verilerinin değerlendirilmesi için hazırlanmış olan ölçeğe eklenmiştir. Bunun yanı sıra kanıta yönelik görüş ölçeğinin de asıl uygulaması yapılarak analizleri tamamlanmıştır. Daha sonra da yazılı sınavdan elde edilen veriler ile kanıta bakış açıları arasında paralellik olup-olmadığına dair analizler yapılmıştır.

5. Verilerin analizleri tamamlandıktan sonra "Bulgular"ın yazımına başlanmıştır.

### 2.2.2. Pilot Çalışmanın Yapılması

Bu bölümde pilot çalışmada meydana gelen gelişmelere, ölçeklerde yapılan değişikliklere, ölçeklerin geçerlik ve güvenirlik çalışmalarına ve pilot çalışmanın araştırmacıya katkılarına yer verilecektir.

#### 2.2.2.1. Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği

Bir ölçeğin geliştirilmesinde ilk adım literatür taramasıdır (Pilten, 2008). Buna bağlı olarak literatürde öğrencilerin kanıt hakkındaki tutumlarını-inançlarını, güvenlerini, zihinsel süreçlerini ve özdeğerlendirmelerini ölçmeye yönelik çok az sayıda ölçek veya anket bulunduğu görülmüştür (Lee, 1999; Almeida, 2000). Bu ölçeklerden bir tanesi de Lee (1999) tarafından hazırlanmış ve kullanılmış olan ölçektir.

Bu çalışmada da ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşlerini belirlemek amacıyla Lee (1999) tarafından hazırlanmış olan ölçek geliştirilerek kullanılmıştır. Bu süreçte ölçek Türkçe'ye çevrilerek geçerlik ve güvenirlik çalışmaları yapılmış ve bunun ardından da ölçeğe açık uçlu sorular eklenmiştir. Bu ölçek öğretmen adaylarının kanıta bakış açılarını ve kanıta karşı olan tutumlarını, inançlarını, güvenlerini, özdeğerlendirmelerini ve zihinsel süreçlerini değerlendirmek için hazırlanmıştır. Lee (1999)'nin hazırlamış olduğu ölçek ilk olarak toplam 40 madde halinde düzenlenmiştir. Bu maddelerden 36 tanesi 5'li likert tarzında hazırlanmış ve geriye kalan 4 madde ise boşluk doldurma şeklinde çoktan seçmeli olarak verilmiştir. Çoktan seçmeli olarak verilen 4 madde Lee'nin araştırması kapsamında farklı bir araştırma problemine yönelik olarak hazırlanmış soruları içermektedir.

Lee (1999) tarafından hazırlanan ölçek ilk olarak üç faktör olarak hazırlanmıştır. Fakat daha sonra Lee tarafından yapılan pilot çalışmanın sonucunda 4 maddenin herhangi bir faktöre dahil olmaması nedeniyle likert türü maddelerinin sayısı 32'ye indirilmiştir. Bunun sonucunda da toplam madde sayısı 36'ya inerek ölçek 4 faktöre ayrılmıştır. Bu boyutlar "Güven", "İnanç ve Tutum", "Zihinsel Süreç" ve "Özdeğerlendirme" olarak düzenlenmiştir. Bu boyutların açıklamalarına aşağıda yer verilmiştir.

- Güven: Güven boyutu, bireyin kendi bakış açısıyla kanıt yapmaya ve kanıta olan güveni ve kendine olan inancı olarak tanımlanmaktadır. Bu boyuta dâhil olan maddeler aynı zamanda kanıtlanması istenen duruma karşı bir meydan okuma içermektedir. Kısaca ölçekte yer alan güven faktörü bireyin kanıtlama konusunda probleme meydan okuma biçimini ve kendine olan güvenini içermektedir.
- Tutum ve İnanç: İnanç ve tutum boyutu kişinin kanıtı nasıl anladığını ve kanıt hakkındaki duygularını içermektedir. Bu kategorideki maddeler öğrencinin kişisel özelliklerini, öğrencinin bir probleme nasıl baktığını ve akranlarıyla nasıl çalıştığını da içermektedir.
- Zihinsel Süreç: Zihinsel süreç boyutu bireyin bilme hakkında veya bireysel düşünme hakkında ne düşündüğünü kapsamaktadır. Bu boyuttaki maddeler öğrencilerin kanıt yaparken geliştirdikleri düşünme yeteneklerini, bilgi kaynaklarını, motivasyonlarını ve yardımı nasıl bulduklarına dair sorular içermektedir.
- Özdeğerlendirme: Özdeğerlendirme boyutunda bireyin kanıta yönelik olarak nasıl bir çalışma biçimi olduğu, yani kanıt yaparken bireyin nasıl bir yol izlediği görülmeye çalışılmaktadır. Bu boyuttaki maddeler bireyin kanıta yönelik olarak kendini ne

kadar bağımsız gördüğünü ve probleme meydan okuma ile ilgili karakteristiğini ortaya koymaya yöneliktir. Bunun yanı sıra bu süreçte bireyin zaman zaman kendini değerlendirmesi de bulunmaktadır.

"Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" öğretmen adaylarının kanıt yeteneklerini ve zihinsel süreçlerini değerlendirmektedir (Lee, 1999). Ölçeğin yanıt seçenekleri asla ile her zaman arasında derecelenmiştir. Ölçek "her zaman=5", "sık sık=4", "bazen=3", "nadiren=2" ve "asla=1" olarak puanlama yapılmıştır. Bunun yanı sıra bazı maddeler ters görüş içerdikleri için bu maddeler ters çevrilerek analiz edilmiştir. Buna göre ölçekten en yüksek puanı alan öğretmen adayı kanıt hakkında en olumlu görüşe sahip olan öğretmen adayıdır. Bu çalışmada kullanılan ölçekte, Lee (1999) tarafından hazırlanan ölçekte yer alan 4 tane çoktan seçmeli madde kullanılmamıştır. Onun yerine bu çalışmada kullanılan ölçeğe, Lee (1999) tarafından hazırlanan 32 tane 5'li likert tarzındaki maddelere ek olarak 3 tane de açık uçlu soru eklenmiştir. Bu sorular ile katılımcıların matematiksel kanıt ile daha önceki deneyimleri, katılımcılara göre matematiksel kanıtın matematikteki rolü ve matematik öğretimindeki rolünün ne olduğu ve ne zaman, hangi durumda/durumlarda matematiksel kanıt yapmaya ihtiyaç duydukları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Çalışmada öğretmen adaylarının kanıta dair görüşlerini ortaya çıkarmaya yönelik olarak kullanılan "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" yurtdışında farklı bir çalışmada kullanılmış olmasına rağmen Türkiye'de ilk kez kullanılacaktır. Ölçek yabancı dille yazılmış olduğundan dolayı asıl uygulamadan önce geçerlik ve güvenirlik çalışmaları yapılmıştır. Pilot çalışmada izlenen adımlar aşağıda belirtilmiştir:

#### 2.2.2.1.1. Ölçeğin Geçerlik Çalışmaları

Geçerlik, bir test veya ölçeğin ölçülmek istenen özelliği doğru olarak ölçme derecesidir (Altunışık, 2004; Balcı, 2005). Yani geçerlik, ölçeği yanıtlayan kişilerin sorularda sorulanlardan ölçeği hazırlayanlarla aynı şeyleri anlayıp anlamadıklarını belirlemek için yapılmaktadır (Griffe, 2001). Yani ölçeğin ölçülmek istenen özelliği bir başka özellikle karıştırmadan ölçme derecesidir (Balcı, 2005). Görünüş, içerik (kapsam), yapı, ayırt etme, dil aynılık ve yordama geçerliği gibi birçok geçerlik türü bulunmaktadır (Creswell, 2002; Büyüköztürk, 2004; Balcı, 2005). Bir ölçeğin türüne göre araştırmacı ölçeğin geçerliğini sağlamalıdır (Creswell, 2002). O nedenle de ölçeğin geçerli sayılabilmesi için bu geçerliklerden bir veya birkaçını sağlaması gerekmektedir (Balcı, 2005). Bu çalışmada kullanılan ölçeğin dil, içerik (kapsam) ve yapı geçerliği sağlanarak aşağıda ayrıntılı olarak sunulmuştur.

Dil Geçerliği: Bu çalışmada kullanılan ölçeğin orijinal dili İngilizce'dir. Bunun için öncelikle dil geçerliğini sağlamak için çeviri çalışmaları yapılmıştır. Çeviri yaparken kullanılan 4 farklı yöntem vardır. Bu çalışmada bunlardan iki tanesi kullanılmıştır. Bunlardan ilki grup çevirisi ve diğeri de uzman görüşü yöntemleridir. Bu süreçte ölçeğin orijinal metni iki akademisyen tarafından birbirinden bağımsız olarak Türkçe'ye çevrilmiştir. Bunun ardından bu iki çeviri karşılaştırılarak tek bir ölçek metni oluşturulmuştur. Sonrasında ise oluşturulmuş olan yeni ölçek metni farklı iki uzman tarafından tekrar orijinal dili olan İngilizce'ye geri çevrilmiştir. Yeniden orijinal diline çevrilen ölçek metni İngilizce olan orijinal metin ile karşılaştırılarak çevirisi yanlış yapılan veya anlam değişikliği bulunan maddeler tekrar düzenlenmiştir.

İçerik (kapsam) Geçerliği: İçerik geçerliği ölçme aracındaki maddelerin ölçülmek istenen alanı temsil edip etmediği sorunuyla ilgili olup, uzman kanısına dayanır ve özneldir (Balcı, 2005; Karasar, 2009). Diğer bir ifadeyle içerik geçerliği ile "ölçekte yer alan maddeler, ihtiyaç duyulan olgusal ve/veya yargısal verileri kapsamada ve toplamada ne derece yeterlidir?" sorusunun yanıtı aranır. Bu sorunun yanıtını almak için de uzmanlara başvurulur (Büyüköztürk, 2005; Büyüköztürk vd., 2009). Bu nedenle de ölçeğin orijinalinden alınan 5'li likert tarzındaki 32 madde ile eklenen açık uçlu 3 sorudan oluşan toplam 35 maddelik ölçek içerik geçerliğini sağlamak için alanda uzman 8 kişiye inceletilmiştir. Bu süreçte akademisyenler ölçekte yer alan maddelerin ölçülmek istenen davranışı yeterince yansıtıp yansıtmadığına bakmışlardır. Bunun için de her bir maddenin tanımlanmış davranışları ölçmede yeterli ya da uygun bir soru olup olmadığına bakmışlardır. Aynı zamanda ölçek öğretmen adaylarına uygulanacağı için ayrıca 20 ilköğretim matematik öğretmeni adayına da okutularak görüşleri alınmış ve ölçekte anlaşılmayan ya da anlam bozukluğu olduğunu düşündükleri ifadeleri belirtmeleri istenmiştir. Uzmanların ve öğretmen adaylarının görüşleri doğrultusunda ölçek maddelerindeki ifadelere son şekli verilmiştir.

Yapı Geçerliği: Yapı geçerliği, bir ölçeğin hangi kavram veya özellikleri ölçtüğünün belirlenmesini incelemektedir (Altunışık vd., 2004). Bir başka ifadeyle yapı geçerliği testten elde edilen puanların test ile ölçülmek istenen kavramın gerçekte ne kadar ölçülebildiği ile ilgilidir (Büyüköztürk vd., 2009). Yapı geçerliği analizi, karmaşık ve çok yönlü bir süreç olduğundan dolayı kuramsal olarak varlığı öne sürülen yapının davranışlara ne derece yansıdığının ve ölçü aracının maddelerinin özelliklerinin incelenmesini gerektirir (Kırcaali İftar, 1999). Yapı geçerliği iki yolla yapılır; “faktör analizi” ve “bilinen grup ile ya da önceden geçerliği saptanmış bir ölçü aracı ile karşılaştırma yoluyla” (Balcı, 2005). Bu çalışmada ise faktör analizi yolu kullanılmıştır. Ayrıca Balcı (2005), hazırlanan ölçeğin gerçek alanda çalışıp çalışmadığını görmek için ölçeğin ön denemesinin, gerçek çalışma evreninden seçilen örnekleme benzerliği olan kimseler üzerinde yapılması gerektiğini vurgulamaktadır. Bu nedenle, ölçeğin yapı geçerliğini ölçmek için Karadeniz Teknik Üniversitesi’nde İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programında 1-4. sınıflarda öğrenimlerine devam eden toplam 174 öğretmen adayına hazırlanan ölçekler elden dağıtılmış ve çalışmanın geçerlik ve güvenirlik analizleri için kullanılmıştır. Bu ilk analizlerin sonucunda 5’li likert tarzındaki madde sayısı 29’a düşmüştür. Çünkü orta düzeyin altında ve çok üstünde korelasyon ve faktör yükü gösteren maddeler çıkarılmıştır. Bunun sonucunda da uzman görüşü alınarak ölçek yeniden düzenlenmiştir. Daha sonra ise ölçek asıl çalışma için pilot çalışmada anket uygulanmamış olan 187 ilköğretim matematik öğretmen adayına uygulanmıştır.

Açımlayıcı faktör analizi (AFA) Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeğinin faktör yapısını incelemek amacıyla kullanılmıştır. AFA’da öncelikle bütün maddeler arasında korelasyon matrisi incelenerek önemli oranda manidar korelasyonların olup olmadığına bakılmış ve faktör analizinin yapılabilmesine uygunluk gösterir nitelikte manidar ilişkilerin olduğu görülmüştür. Yapı geçerliği için faktör analizine bakılmıştır. Bunun için de veri setinin faktör analizi için uygun olup olmadığını değerlendirmek amacıyla 3 yöntem kullanılmıştır. Bunlar korelasyon matrisinin oluşturulması, Barlett Testi ve Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy (KMO) testleridir (Kalaycı, 2005). Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy (KMO) değeri, değişkenler tarafından oluşturulan ortak varyans miktarını bildirmektedir. Bu değerin 1.00’e yakın olması, verilerin faktör analizi için uygun olduğunu gösterirken; 0.50’nin altına düşmesi bu veriler ile faktör analizi yapmanın doğru olmayacağını bildirmektedir. Bartlett testi faktörlenebilirlik testi olup Barlett testinin değeri ve onun anlamlılığı ise değişkenlerin birbirleri ile korelasyon gösterip göstermediklerini sınar. Elde edilen p değeri 0.10 veya daha üzerindeyse bu verilerle faktör analizi yapmanın uygun olmadığı söylenebilir.KMO’nun .60’dan yüksek Barlett Sphericity testinin anlamlı çıkması gerekmektedir (Akyıldız, 2005; Yeşilyurt ve Gül, 2007).

Ölçeğin verilerini faktör analizine tabi tutmadan önce verilerin faktör analizine uygunluğunu belirlemek için Kaiser-Meyer-Olkin Measure of Sampling Adequacy (KMO) ve Barlett Testi anlamlılık değeri bulunmuştur (bkz. Tablo 3). Tablo 3'den de görüldüğü gibi KMO değeri .712ile istatistiksel olarak uygun bulunmuştur. Barlett testi sonuçları ölçek maddelerine verilen cevapların faktörlenebileceğini göstermiştir.

Tablo 3. KMO ve Barlett Testi Sonuçları

| | | |
|---|---|---|
| Kaiser-Mayer-Olkin Değeri | | .712 |
| Barlet Testi Değeri | Ki-Kare Değeri | 1083,244 |
| | Serbestlik Derecesi | 351 |
| | Önem Düzeyi (p) | .000 |

Araştırmamızda Kaiser-Meyer-Olkin (K.M.O.) değerine bakıldığında, bu değerin (0,712>0,50) 0,50'nin üzerinde olduğu görülmektedir. Bu durum KMO ölçütüne göre "iyi" olarak değerlendirebilir ve örneklem büyüklüğünün yeterli olduğunu gösterir. Barlett testi ise 1083,244 ve p=.000 şeklinde anlamlı bulunmuştur. Buna göre faktör analizi yapmanın uygun olduğu söylenebilir (bkz. Tablo 3.) (Kalaycı, 2005). Bu araştırmada dört boyutlu bir ölçek geliştirilmesi amaçlandığı için AFA'da temel bileşenler tekniği ile oblik döndürme faktör çözümlemesi sonuçları 4 faktörle sınırlandırılmıştır. Bir ölçeğin faktörleri arasında ilişkisizlik varsa varimax döndürme tekniği, faktörler arasında sürekli bir ilişki dizisi varsa oblik döndürme kullanılır (Tabachnick ve Fidell, 1996).Asıl uygulamada yapılan ilk faktör analizinde ölçekte yer alan 5'li likert tarzındaki 2 maddenin herhangi bir faktöre dahil olmadığından bu maddeler çıkarılarak faktör analizi 27 madde için tekrarlanmıştır. Her bir madde için kabul edilebilir varyans yükü .30'dur. Bu nedenle de .30'un altına düşen maddeler ölçekten çıkarılmıştır. Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeğinin alt boyutları arasında ilişki olduğu için bu araştırmada oblik döndürme tekniği kullanılmıştır. Bu işlem sonucunda toplam varyansın% 38.40'ını açıklayan 4 faktörlü bir yapı elde etmiştir. Her bir faktöre ait maddelerin faktör yükleri Tablo 4'de verilmiştir.

Ölçeğin faktör sayısında ve isimlerinde orijinal ölçekteki faktörlere sadık kalınmıştır. Faktör yüklerinin incelenmesinde ise minimum faktör yükü .30 olarak alınmış(Kalaycı, 2005), maddeler ve bunlara ilişkin faktör yükleri Tablo 4'de sunulmuştur. Tablo 4'den görüldüğü gibi maddelerin faktör yükleri .30'dan büyük olduğundan ölçekten tekrar bir madde çıkarılmamıştır. Ancak ölçeğin orijinal halinde 4 faktör olduğundan bu çalışmada da ölçeğe 4 faktörlü bakılmıştır. Ölçeğin maddelerin faktör ortak varyansı ve döndürme sonrası yük değerlerinin sonuçları Tablo 4'de verilmiştir.

Tablo 4. Ölçeğin faktör analizi sonuçları

| | **Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği Faktör Yükleri** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Maddeler** | **Faktör 1 Zihinsel Süreç** | **Faktör 2 Güven** | **Faktör 3 Özdeğerlendirme** | **Faktör 4 Tutum-İnanç** |
| **S17** | .69 | | | |
| **S16** | .64 | | | |
| **S24** | .59 | | | |
| **S4** | .57 | | | |
| **S3** | .54 | | | |
| **S18** | .53 | | | |
| **S25** | .39 | | | |
| **S7** | | .67 | | |
| **S6** | | .61 | | |
| **S2** | | .60 | | |
| **S23** | | .51 | | |
| **S1** | | .51 | | |
| **S12** | | .49 | | |
| **S20** | | .44 | | |
| **S19** | | | .65 | |
| **S22** | | | .56 | |
| **S21** | | | .54 | |
| **S9** | | | .48 | |
| **S15** | | | .34 | |
| **S10** | | | | .51 |
| **S13** | | | | .51 |
| **S8** | | | | .51 |
| **S11** | | | | .45 |
| **S5** | | | | .43 |
| **S27** | | | | .39 |
| **S14** | | | | .35 |
| **S26** | | | | .34 |

Faktör analizi sonuçlarına göre ölçeğin toplam varyansının yaklaşık % 38.40'ı dört faktör tarafından açıklanmaktadır.Faktör analizi sonundaelde edilen varyans oranları ne kadar yüksek olursa ölçeğin faktör yapısı da o kadar güçlüolmaktadır. Ayrıca, sosyal bilimlerde %30 ile %60 arasında değişen varyans oranlarıyeterli kabul edilmektedir. Tablo 4'de bu ölçekte yer alan maddelerin faktör yükleri görülmektedir. Ölçeğin faktör yük değerleri .34 ile .69 arasında değişmektedir. Faktör yükleri ölçekteki dört faktörün birlikte maddelerdeki toplam varyansın ve ölçeğe ilişkinvaryansın önemli bir kısmını açıkladığını göstermektedir. Alt faktörlerdeki maddelerinözellikleri dikkate alınarak bu alt faktörlere orijinaline sadık kalınarak "Zihinsel Süreç","Güven", "Özdeğerlendirme" ve "Tutum-İnanç" isimleri verilmiştir. Ayrıca ölçekte zihinsel sürece yönelik olarak 7 madde, güven faktörüne yönelik 7 madde, özdeğerlendirme faktörüne ait 5 madde ve tutum-inanç boyutuna yönelik de 8 madde yer almaktadır.

Tablo 5. Ölçek alt faktörleri arasındaki korelasyonlar

| **Faktör** | | **Zihinsel Süreç** | **Güven** | **Özdeğerlendirme** | **Tutum-İnanç** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Zihinsel Süreç** | Pearson Korelasyon | 1 | | | |
| **Güven** | Pearson Korelasyon | .30(***) | 1 | | |
| **Özdeğerlendirme** | Pearson Korelasyon | .40(***) | .38(***) | 1 | |
| **Tutum-İnanç** | Pearson Korelasyon | .32(***) | .32(***) | .32(***) | 1 |

*** Korelasyon 0.01 düzeyinde anlamlı (2-tailed).

Geçerlik işlemleri sırasında ölçek boyutlarının birbirleriyle olan ilişkilerinin belirlenmesinde Pearson Momentler Çarpımı korelasyon katsayısı kullanılmıştır (bkz. Tablo 5.). Tablo 5 incelendiğinde ölçek boyutları arasında en yüksek ilişkinin "Özdeğerlendirme" ile "Zihinsel Süreç" arasında ($r=40$, $p < .001$), en düşük ilişkinin ise "Zihinsel Süreç" ile "Güven" arasında ($r=30$, $p < .001$) olduğu görülmektedir. Sonuç olarak ölçeğin boyutları arasındaki ilişki göz önüne alındığında Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği'nin kapsam geçerliğinin olduğu söylenebilir.Ölçeğin alt ve üst gruptan toplam puanlara göre %27'lik iki grup arasındaki ortalamalar t testi ile karşılaştırılmış ve $t=4.27$, $p < .001$ düzeyinde anlamlı bir farka ulaşılmıştır.

#### 2.2.2.1.2. Ölçeğin Güvenirlik Çalışmaları

Güvenirlik, bulguların ne kadar tekrarlanabileceğini açıklamak için kullanılan bir kavram olup (Çepni, 2009) aynı niteliğin bağımsız ölçümleri arasındaki kararlılıktır (Karasar, 2009). Güvenirlik, bir testin veya ölçeğin ölçmek istediği şeyi tutarlı ve istikrarlı bir biçimde ölçme derecesidir (Akt: Altunışık vd., 2004). Bir ölçeğin güvenirliğini ölçmede çeşitli yaklaşımlar kullanılmaktadır. Bunlar test tekrar test güvenirliği, iç tutarlılık güvenirliği, alternatif formlardır (Altunışık vd., 2004; Balcı, 2005). Bunlardan biri olan iç tutarlık analizi, çok sayıda maddeden oluşan Likert tipi bir ölçekte yer alan maddeler arasındaki korelasyon değeri incelenerek yapılır (Altunışık vd., 2004; Çepni, 2009). Bu araştırmada da ölçeğin iç tutarlılık güvenirliği hesaplanarak güvenirliği bulunmuştur. İç tutarlılığın ölçümünde Cronbach alfa katsayısı hesaplanır. Alfa katsayısı 0 ile 1 arasında değerler alır ve 0.60'dan büyük değerler güvenilir olarak kabul edilir.

Bu araştırmada kullanılan ölçeğin iç tutarlığının ölçümünde kullanılan Cronbach alfa katsayısını saptamak amacıyla, Karadeniz Teknik Üniversitesi'nden seçilen 187 ilköğretim matematik öğretmeni adayına ölçek uygulandı. Verilerin SPSS paket programı ile analizi sonucunda ölçeğin Cronbach alfa katsayısı 0.71 olarak hesaplandı. Bu sayı 0.60'dan büyük olduğu için ölçeğin güvenilir olduğuna karar verildi. Fakat geçerlikte de düşük varyans açıklayan iki madde güvenirliği de düşüren iki maddedir. Bu nedenle bu iki madde çıkarılarak ölçeğin güvenirlik katsayısı 0.71'den 0.79'a yükseltilmiştir.

Ölçek, geçerlilik ve güvenirlik çalışmaları sonrasında gerekli düzeltmeler yapılarak "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" adını alarak bu araştırmada kullanılmıştır (bkz. Ek 1.).

Ölçeğin başlangıcında 5 tane kişisel bilgilere yönelik sorular bulunmaktadır. Daha sonraki bölümünde ise 30 soru yer almaktadır. Bu sorulardan 27 tanesi 5'li likert tarzında hazırlanmış ve geriye kalan sorulardan üçü de açık uçlu olarak verilmiştir. Ölçekte likert tarzında olan sorular yanıt seçenekleri asla ile her zaman arasında derecelenmektedir. Olumlu veya kanıt açısından kabul gören maddelerden her zaman yanıtına 5 puan, asla yanıtına 1 puan verilerek puanlama yapılmıştır. Bunun yanı sıra bazı maddeler ters görüş içerdikleri için bu maddeler ters çevrilerek analiz edilmiştir. Bunun yanı sıra ölçekte dört faktör bulunmaktadır. Bu faktörlerden bireyin zihinsel süreçlerine yönelik olan boyut 7 madde, kanıt yapma konusunda kendine güven boyutu 7 madde, kendine dönük özdeğerlendirme yapma boyutu 5 madde ve kanıta yönelik tutum-inanç boyutu da 8 madde içermektedir. Bunun yanı sıra ölçekte farklı sınıf seviyelerindeki ilköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel kanıt hakkındaki düşüncelerini ortaya çıkarmaya yönelik olarak da 3 tane açık uçlu soruya yer verilmiştir.

#### 2.2.2.2. Yazılı Sınav ve Klinik Görüşmede Kullanılan Problemlerin Hazırlanması

Bu araştırma kapsamında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda ne tür kanıt şemaları kullandıkları ve kanıta yönelik görüşleri ortaya çıkarılmaya çalışılmaktadır. Bunun için de ilköğretim matematik öğretmenliğinde öğrenimlerine devam etmekte olan 1, 2, 3 ve 4. sınıf öğretmen adaylarının seviyelerine uygun olarak literatür desteğinde ve Genel Matematik 1 dersi programına uygun olarak araştırmacı tarafından yazılı sınav ve klinik görüşmede kullanılmak üzere fonksiyonlar konusu ile ilgili problemler geliştirilmiştir. Bu problemler hazırlanırken aşağıdaki kriterler göz önünde bulundurulmuştur.

1. Öğretmen adaylarının seviyelerine uygun olarak program da göz önünde bulundurularak hazırlanmıştır.
2. Hazırlanmış olan problemlerin çözümlerinin veya kanıtlarının, kanıt şemalarının ve bu kanıt şemalarının alt şemalarının tamamını içerecek biçimde olmalarına dikkat edilmiştir.
3. Problemlerin mümkün olduğunca alışık türden olmayan problemler olmalarına dikkat edilmiştir. Bu süreçte fonksiyonlar konusuna ait özellikler ve kuralların da kanıtları problem olarak sorulmuştur.
4. Problemlerin kanıt yapmaya uygun olmalarına dikkat edilmiştir. Bu nedenle de bütün problemler "olduğunu gösteriniz" gibi ifadeler ile bitmektedir.

Pilot çalışmada, yazılı sınav ilköğretim matematik öğretmenliğinde öğrenimlerine devam etmekte olan farklı sınıf seviyelerindeki 30 öğretmen adayına uygulanırken klinik görüşmeler de 5 ilköğretim matematik öğretmeni adayının yanı sıra 5 sınıf öğretmeni adayı ile birlikte yürütülmüştür. Sınıf öğretmenliği öğretmen adayları ile de pilot çalışma yapılmasındaki en önemli neden bu pilot çalışmanın sonunda fonksiyonlar konusunda hazırlanmış olan problemler ile ilgili olarak bir değerlendirme ölçeği oluşturulmuş ve bu ölçekte bütün şemalar için olabilecek bütün çözümlere yer verilmeye çalışılmıştır. Pilot çalışmalar sırasında açık uçlu sorulardan oluşan yazılı sınav 90 dakika olarak uygulanmıştır. Bununla birlikte her görüşme yapılan öğretmen adayı ile 30 ila 60 dakika süren ikişer klinik görüşme yapılmıştır.

Pilot çalışmada öğretmen adayları problemleri çözdükten sonra araştırmacı öğretmen adaylarının çözümleri ve yöntemleri hakkında bilgiler edinmiş ve notlar almıştır. Bu süreçte öğretmen adaylarından anlaşılmayan ifadeler olup olmadığına dair de görüşler alınmıştır. Benzer şekilde araştırmacı klinik görüşmeler sırasında da notlar almış ve gözlemlerde bulunmuştur. Alınan bu notlar ve yapılan gözlemler asıl çalışmada kullanılacak yazılı sınav ve klinik görüşme problemlerine son şeklinin verilmesinde kullanılmıştır.

#### 2.2.2.2.1. Yazılı Sınav ve Görüşme Problemlerinin Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları

Pilot çalışmada veri toplama araçlarının geçerlik ve güvenirlikleri yapılmıştır. Hazırlanan problemlerin geçerlik ve güvenirliği konusunda bir problem olmaması için bu konu ile ilgili yapılan araştırmalarla ilgili literatür taramasından elde edilen soruların aynısı veya benzerleri kullanılarak Genel Matematik 1 ders içeriği göz önünde bulundurularak geliştirilmiştir. Hazırlanan problemlerin gerçekten kanıt şemalarını ve alt şemaları temsil edip etmediği konusunda alan uzmanı 5 matematik eğitimcisinin görüşlerine başvurularak üzerinde tartışılmıştır. Çünkü içerik geçerliği ölçme aracındaki maddelerin ölçülmek istenen alanı temsil edip etmediği sorunuyla ilgili olup, uzman kanısına dayanır ve özneldir. Bu yolla görüşme problemlerinin içerik (kapsam) geçerliliği sağlanmıştır. Bu problemler daha sonra 10 öğretmen adayına okutularak problemlerin anlaşılır-olup olmadıkları değerlendirilerek ilk düzeltmeler yapılmıştır. Böylece açık uçlu problemlerden oluşan yazılı sınav ve klinik görüşme problemlerinin dil ve seviye geçerliği de sağlanmıştır. Daha sonra ise bu problemlere pilot çalışma ile son şekli verilmiştir.

Güvenirlik kavramı, aynı süreçlerin izlenmesi ve aynı ölçütlerin kullanılması ile aynı sonuçların alınmasıdır. Bu, bir bakıma, araştırmalarda alınan bir sonucun, başka araştırmacılar tarafından da test edilmesidir. Bu araştırma sırasında da veri toplama araçlarının güvenirliği için önce öğretmen adaylarının yazılı sınav kâğıtlarının ve görüşme verilerinin rastgele yarısı alınmış ve araştırmacı ile başka bir araştırmacı Sowder ve Harel'ın (1998) belirledikleri kanıt şemalarına göre kodlamalar yapmışlardır. Yapılan kodlamalar sonucunda iki araştırmacı arasında %83 uyum çıkmıştır. Bu da yapılmış olan araştırmanın iç geçerliğini sağlamak açısından yeterlidir.

#### 2.2.2.2.2. Görüşme Verilerinin Değerlendirilmesi İçin Hazırlanan Ölçek

Pilot çalışmaya katılan ilköğretim matematik öğretmeni adayları ile yapılan yazılı sınav ve klinik görüşme verileri ile kağıt üzerinde yaptıkları tüm çalışmalar birleştirilerek yazıya dökülmüştür. Daha sonra pilot görüşmelerden ve yazılı sınavdan elde edilen verilerin tamamı okunmuştur. Bu süreçte her bir probleme öğretmen adayları tarafından verilen yanıtlar öncelikle incelenerek hangi kanıt şemasına dâhil oldukları Sowder ve Harel'ın (1998) karakterize ettikleri kanıt şemaları ışığında analiz edilerek görüşmecilerin kullandıkları kanıt şemaları belirlenmiştir. Daha sonra ise tanımlanan şemanın alt şemalardan hangisi olduğuna karar verilmiştir. Tanımlanan her kanıt şeması için nitel veriler ışığında bir açıklama verilmiştir. Bu süreçte görüşmecilerin kullandıkları son ifadeler göz önünde bulundurularak bu ifadelerin belirttiği kanıt şemasının hangisi olduğuna karar verilmiş ve buna bağlı olarak da her bir problem için karakterizasyon yapılmıştır. Pilot çalışmadan her problem durumu ile ilgili olarak elde edilen şemalara ilişkin tanımlamalar asıl çalışmada öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusu ile ilgili kanıt şemalarının tanımlanması için verilerin analiz edilip yorumlanmasında kullanılmıştır. Kanıt şemalarına ait özellikleri göz önünde bulundurularak her bir problem durumu ile ilgili pilot çalışma ile ortaya çıkan ve asıl çalışma ile son şeklini alan ölçek Ek 2' de verilmiştir.

Yapılan pilot çalışmanın araştırmaya ve araştırmacıya olan katkıları aşağıdaki biçimde özetlenebilir;

1. Araştırmacının deneyim kazanması,

2. Asıl çalışmada kullanılacak ölçeğin geçerlik ve güvenirlik çalışmalarının yapılarak son şeklinin verilmesi,

3. Asıl çalışmada kullanılacak yazılı sınav ve klinik görüşme problemlerinin geçerlik ve güvenirlik çalışmalarının yapılarak son şeklinin verilmesi,

4. Kanıt şemalarına ve alt şemalarına yönelik araştırmada adı geçen fonksiyonlar konusu ile ilgili temel özelliklerin belirlenmesi,

5. Görüşme verilerinin değerlendirilmesi için ölçeğin hazırlanmasına yardımcı olmuştur.

### 2.3. Araştırmanın Evren ve Örneklemi

Araştırmanın hedef evreni, İlköğretim Matematik Öğretmenliği programında öğrenimlerine devam eden öğretmen adaylarıdır. Araştırmanın örneklemi ise; nicel ve nitel veriler için farklı sayıda seçilmiştir.

Bu araştırmada iki farklı örneklem seçimi yapılmıştır. Çalışmanın nicel verileri için örneklem grubunu İlköğretim Matematik Öğretmenliği programında öğrenimlerine devam etmekte olan1, 2, 3 ve 4. sınıf öğretmen adayları oluşturmaktadır. Bu öğretmen adaylarının tamamına "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" ile yazılı sınav uygulanmıştır. Nitel veri toplayabilmek için seçilen ikinci örneklem grubunu ise 16 öğretmen adayı oluşturmaktadır. Bu öğretmen adayları ile de 2'şer kez yarım ile bir saat arasında değişen klinik görüşmeler yapılmıştır.

#### 2.3.1. Örneklemin Belirlenme Süreci

Örneklem seçiminde, bir olasılığa dayalı örnekleme yöntemi olan, basit tesadüfî örnekleme kullanılmıştır. Olasılığa dayalı örneklemede, örneklemin evreni temsil etme gücü yüksektir. Bunun da nedeni örnekleme seçilen bireylerin, örnekleme seçilme olasılıklarının eşit ve bağımsız olmasıdır (Büyüköztürk, 2009). Bu çalışmada ise olasılığa dayalı örnekleme yönteminin bir türü olan basit tesadüfî örnekleme kullanılmıştır. Basit tesadüfî örneklemede evrendeki tüm bireylerin örnekleme seçilmede eşit ve bağımsız bir şansa sahip oldukları örnekleme türüdür. Diğer bir deyişle tüm bireylerin seçilme olasılığı aynıdır ve bir bireyin seçimi diğer bireylerin seçilmesini etkilememektedir (Balcı, 2005; Yıldırım ve Şimşek, 2005; Büyüköztürk vd., 2009; Çepni, 2009; Karasar, 2009).

Bu çalışmanın örneklemini, İlköğretim Matematik Öğretmenliği programına kayıtlı, öğrenimlerine devam etmekte olan 1, 2, 3 ve 4. sınıf öğretmen adayları oluşturmaktadır. Bu öğretmen adayları basit tesadüfî örnekleme yöntemi ile aşağıdaki kriterler göz önüne alınarak seçilmiştir;

1. Tüm öğretmen adaylarına problemleri içeren bir yazılı sınav uygulanmıştır. Öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlar, yapılan ön analiz ile kanıt şemaları ve alt şemaları dikkate alınarak sınıflandırılmıştır. Daha sonra da her sınıf seviyesinden dörder öğretmen adayı olmak üzere toplam 16 öğretmen adayı basit tesadüfî örnekleme yöntemi ile klinik görüşmeler için seçilmişlerdir.

2. İlköğretim Matematik Öğretmenliği programında ders veren öğretim üyesi ve elemanlarının yardımları ile gönüllü öğretmen adayları arasından seçilmiştir.

Çalışmanın sürdürüldüğü örneklem grubundaki öğretmen adaylarının özellikleri, aşağıdaki tabloda özetlenmektedir. Araştırma etiği gereği, çalışmaya katılan öğretmen adaylarının gerçek isimleri kullanılmamış ve öğretmen adaylarını temsil etmesi için ÖA1A, ÖA1B, ÖA1C, ÖA1D, ÖA2A, ÖA2B, ÖA2C, ÖA2D, ÖA3A, ÖA3B, ÖA3C, ÖA3D, ÖA4A, ÖA4B, ÖA4C, ÖA4D şeklinde kodlar kullanılmıştır. Bu katılımcılardan ÖA1A, ÖA1B, ÖA1C ve ÖA1D birinci sınıfa; ÖA2A, ÖA2B, ÖA2C ve ÖA2D ikinci sınıfa; ÖA3A, ÖA3B, ÖA3C ve ÖA3D üçüncü sınıfa; ÖA4A, ÖA4B, ÖA4C ve ÖA4D dördüncü sınıfa devam etmekte olan öğretmen adaylarıdır.

Tablo 6. Çalışmanın örneklem dağılımı

| Sınıf | Yazılı Sınavlar Öğrenci Sayıları | Klinik Görüşme Öğrenci Sayıları | Ölçek Öğrenci Sayıları |
|---|---|---|---|
| **1.sınıf** | 40 | 4 | 73 |
| **2.sınıf** | 34 | 4 | 35 |
| **3.sınıf** | 31 | 4 | 34 |
| **4.sınıf** | 53 | 4 | 45 |
| **Toplam** | 158 | 16 | 187 |

Tablo 6'da da görüldüğü üzere araştırmada kullanılmak üzere hazırlanmış olan "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" 187 öğretmen adayına uygulanmıştır. İlköğretim Matematik Öğretmenliği birinci sınıflar 2 şube ve diğer sınıf seviyelerinden de birer şube bulunmaktadır. Bu nedenle bu öğretmen adaylarının 73'ü 1. sınıf, 35'i 2. sınıf, 34'ü 3. sınıf ve 45'i de 4. sınıfta öğrenimlerine devam etmektedirler.

Bu süreçte klinik görüşmelerde de kullanılmak üzere fonksiyonlar konusu ile ilgili hazırlanmış olan problemler 1. sınıftan 40, 2. sınıftan 34, 3. sınıftan 31 ve 4. sınıftan da 53 ilköğretim matematik öğretmeni adayına yazılı sınav olmak üzere toplam 158 kişiye uygulanmıştır. Bu yazılı sınavın sonucunda her bir öğretmen adayının hangi kanıt şemasını kullandıkları belirlenmiştir. Bu uygulamanın üstünden bir ay geçtikten sonra her bir sınıftan 4'er öğretmen adayı olmak üzere toplam 16 öğretmen adayı ile klinik görüşmeler yapılmıştır.

### 2.3.2. Veri Toplama Araçları

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşlerini belirlemek amacıyla hazırlanmış olan "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" 30 maddeden oluşmaktadır. Bu maddelerden 27 tanesi 5'li likert tarzında hazırlanmış ve geriye kalan üç tanesi de açık uçlu olarak verilmiştir. Yanıt seçenekleri asla ile her zaman arasında derecelenmektedir. Olumlu veya kanıt açısından kabul gören maddelerden her zaman yanıtına 5 puan, asla yanıtına 1 puan verilerek puanlama yapılmaktadır. Bunun yanı sıra bazı maddeler ters görüş içerdikleri için bu maddeler ters çevrilerek analiz edilmektedir.

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda ne tür kanıt şemaları kullandıklarını ortaya çıkarmak için seviyelerine uygun olarak fonksiyonlar konusu ile ilgili hazırlanmış olan 10 problem hem yazılı sınavda ve hem de klinik görüşmeler sırasında öğretmen adaylarına yöneltilmiştir. Flores (2002) görüşmelerinde öğrencilerin belirledikleri konularla ilgili problemler yöneltirken bu çalışmada problemler araştırmacı tarafından fonksiyonlar konusundan olmaları göz önünde bulundurularak seçilmiştir.

### 2.3.3. Verilerin Toplanması

Bu araştırmanın problem ve alt problemleri doğrultusunda temel verinin toplanması sürecinde ağırlıklı olarak nitel veri toplama araçları kullanılmıştır. Bunun yanı sıra nicel veri toplama aracı da kullanılmıştır. Bunun bir nedeni öğrencilerin kullandıkları kanıt şemalarını belirlemekte görüşülecek öğretmen adaylarını belirlemektir (Akkoç, 2006). Veriler yazılı sınav, öğretmen adaylarının yazılı sınavlardaki yanıtları, 16 öğretmen adayı ile yapılan klinik görüşmeler ve hazırlanmış olan ölçek yardımıyla 2008-2009 eğitim-öğretim yılının bahar döneminde toplanmıştır.

### 2.3.4. Açık Uçlu Sorulardan Oluşan Yazılı Sınav

Verilerin toplanması aşamasında farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarına açık uçlu sorulardan oluşan yazılı sınavlar uygulanmıştır. Klinik görüşmede de kullanılmak için hazırlanan problemlerden oluşan sınavda fonksiyonlar konusu ile ilgili toplam 10 problem (bkz. Ek 2.) bulunmaktadır. Bu problemlerin bazıları fonksiyon türlerini, bazıları fonksiyonlarla ilgili kural ve teoremleri ve diğer bazıları da fonksiyonların uygulanmasını içeren türden problemlerdir.

Bu problemlerden ilki doğrudan fonksiyon tanımına yönelik olarak katılımcılara yöneltilmiştir. Birinci problem rutin olmayan bir problemdir ve katılımcılara verilen bir ifadenin fonksiyon olup-olmadığı sorularak nedenini açıklamaları istenmektedir. Birinci problemde verilmiş olan ifade doğrudan bir fonksiyon değildir fakat katılımcılardan fonksiyon olma kuralları yardımıyla bu ifadeyi bir fonksiyon olarak tanımlayarak nedenlerini açıklamaları beklenmektedir.

İkinci problem fonksiyon türlerinden birebirliğe yönelik bir problemdir. Öğretmen adaylarının bu problemi çözebilmeleri için sadece birebirlik tanımını bilmeleri yeterli olmayacaktır çünkü problem birebirlik ile birlikte bileşke fonksiyonu da içermektedir. Katılımcıların bu problemi çözebilmeleri için birebirlik tanımını bileşke fonksiyona transfer edebilmeleri gerekmektedir.

Üçüncü problem doğrudan fonksiyonların uygulamasını içermesinin yanı sıra ikinci dereceden bir fonksiyon içermektedir. Bu nedenle katılımcıların ikinci dereceden bir fonksiyonun ne olduğunu bilmeleri ve bunu da problemde verilmiş olan eşitlikte kullanabilmeleri gerekmektedir. Bu problemde öğretmen adaylarından verilmiş olan bir eşitliği doğrulamaları beklenmektedir. Bunu yapabilmeleri için de tanımlanmış olan bir fonksiyonda farklı değişkenler yazarak yeni fonksiyonu tanımlamaları ve işlemleri yapmaları gerekmektedir. Bu nedenle de üçüncü problem rutin olmayan kavramsal bir problemdir. Bu problemin çözülebilmesi için hayal gücünün ve problem çözme becerisinin yanı sıra güçlü bir fonksiyon kavramına sahip olmak gerekmektedir.

Problemlerden dördüncüsünde öğretmen adaylarına ikinci dereceden denklemin genel formu ve kökleri verilmiştir. Bu problemde katılımcılardan verilmiş olan köklerin, ikinci dereceden denklemin kökleri olduğunu göstermeleri istenmektedir. Bu problemde verilmiş olan kök değerleri öğretmen adaylarının orta öğretim yıllarından beri bildikleri bir kuraldır.

Beşinci problem örtenlik ve bileşke fonksiyon kavramlarını birlikte içermektedir. Öğretmen adaylarının bu problemi çözebilmeleri için ikinci problemdeki gibi sadece örtenlik tanımını bilmeleri yeterli olmayacaktır çünkü problem örtenlik ile birlikte bileşke fonksiyonu da içermektedir. Katılımcıların bu problemi çözebilmeleri için örtenlik tanımını bileşke fonksiyona uygulayabilmeleri gerekmektedir.

Altıncı problem bileşke ve birim fonksiyonu kullanmaya yönelik olarak hazırlanmış bir problemdir. Bu nedenle de katılımcıların hem birim fonksiyonun ne olduğunu bilmeleri ve hem de bunu bileşke fonksiyonda kullanabilmeleri gerekmektedir.

Yedinci problemde bileşke ve ters fonksiyon kavramlarını içerecek biçimde hazırlanmıştır. Burada iki farklı fonksiyonun bileşkesinin bulunup tersinin alınmasını ve iki fonksiyonun tersinin alındıktan sonra bileşkelerinin bulunması yer almaktadır.

Sekizinci problem logaritmik fonksiyon konusunu içermektedir. Bu problemde öğretmen adaylarından logaritmik fonksiyona ait bir kuralı doğrulamaları beklenmektedir. Katılımcıların bu doğrulamayı gerçekleyebilmeleri için ise üslü sayıların ve logaritmanın bazı özelliklerini bilmeleri gerekmektedir.

Dokuzuncu problemde tamamen ters fonksiyon kavramına yöneliktir. Bu problemde öğretmen adaylarından verilmiş olan bir kuralı doğrulamaları beklenmektedir. Bunun içinde bir fonksiyonun tersinin nasıl alındığını bilmeleri gerekmektedir.

Son problem olan onuncu problemde logaritmik fonksiyon olarak hazırlanmıştır. Fakat diğer problemlerden farklı olarak onuncu problem daha çok işlemsel bilgiye dayanan bir problem olarak düşünüldüğü için doğrudan fonksiyonların uygulanmasına yöneliktir. Oysaki diğer problemlerden bazıları bir kuralın ve bazıları da bir teoremin doğrulanması olarak hazırlanmıştır. Bu problemde öğretmen adaylarından verilmiş olan bir eşitliği doğrulamaları beklenmektedir. Bunu yapabilmeleri için de tanımlanmış olan bir fonksiyonda farklı değişkenler yazarak yeni fonksiyonu tanımlamaları gerekmektedir. Bunun yanı sıra bu problemin çözümünde katılımcıların kullanması gereken bir kural da sekizinci problemde yer almaktadır.

Hazırlanmış olan sınav öğretmen adaylarına uygulanmış ve yaklaşık olarak 90 dakikada tamamlanmıştır. Bu sınav her bir sınıf seviyesi okulda dersteyken kendi dersliklerinde bir öğretim üyesi veya öğretim elemanı eşliğinde yapılmıştır. Sınava başlanmadan önce öğretmen adaylarına problemleri istedikleri biçimde çözebilecekleri, bu sınavın not ile değerlendirilmeyeceği ve araştırmacının kimliklerini açıklamadan verileri sadece bir araştırmada kullanacağı ifade edilmiştir. Sınav bitiminde öğretmen adaylarının sınav kâğıdı üzerindeki yanıtları incelenmek üzere toplanmıştır. Pilot çalışma sonrasında oluşturulan, fonksiyonlar konusundan seçilmiş her bir problem ile ilgili her bir kanıt şemasının temel karakteristiğini temsil eden ölçekler yardımı ile öğretmen adaylarının verdikleri yanıtlar ana şemalara (dışsal, deneysel ve analitik şemalar) göre sınıflandırılarak her bir öğretmen adayının ağırlıklı olarak hangi kanıt şemasını kullandıkları belirlenmiştir.

Bu sınıflandırma asıl çalışmanın yürütüleceği öğrencilerin seçimi için temel oluşturmaktadır. Öğretmen adaylarıyla klinik görüşmeler yapılmadan önce uygulanan bu sınav aşağıdaki amaçlara hizmet etmek için kullanılmıştır.

1. Klinik görüşme yapılacak öğretmen adaylarını belirlemek,
2. Öğretmen adaylarının sınavda verdiği yanıtlardan hareketle görüşmeler sırasında öğretmen adaylarına yöneltilecek soruları detaylandırmak amaçlanmıştır.

### 2.3.5. Klinik Görüşmeler

Öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemalarını araştırmak için görüşme yöntemi tercih edilmiştir. Görüşme yönteminin tercih edilmesinin sebepleri ise, ilişki, iletişim ve görüşün bu yöntemle daha kolay ve derinlemesine ölçülebilmesidir. Görüşme, genel olarak bir uzman veya araştırmacı ile görüşme yapılacak kişi arasında geçen karşılıklı konuşmalar olarak tanımlanmaktadır. Görüşmenin esas amacı, iletişim kurulan bireyin araştırılan konu hakkında duygu, düşünce ve inançlarının neler olduğunu ortaya çıkarmaktır (Çepni, 2009). Literatürde farklı sınıflandırmalar yapılarak "görüşme türleri" açıklanmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2005; Çepni, 2009). Fakat bunların içinde genellikle; yapılandırılmış, yarı yapılandırılmış ve yapılanmamış görüşmeler şeklinde yapılan sınıflandırma kabul görmektedir.

Klinik görüşme, çalışılan bir konu ile ilgili bireyin sahip olduğu bilgileri derinlemesine öğrenmeye çalışmak ve karakteristik bilgilerini ortaya çıkarmak için araştırmacı ve birey arasında yapılan karşılıklı görüşmeler olarak tanımlanabilir (Zazkis ve Hazzan, 1999). Klinik görüşme, araştırmacının görüşme sırasında verdiği yanıtlar doğrultusunda sorularını çeşitlendirmesine fırsat veren bir araştırma metodudur (Tall, 1979). Klinik görüşmenin asıl amacı; bireyin çalışılan konu ile ilgili sahip olduğu kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri ortaya çıkarmaktır. Çünkü böylece bireyin bilişsel becerileri de tespit edilerek düşünce yapısı ortaya çıkarılabilir (Hunting 1997, Goldin 1998; Zazkis ve Hazan 1999).

Tarihsel gelişimine baktığımızda klinik görüşmenin, ilk olarak psikolojik araştırmalar için Piaget tarafından 1920 yılında geliştirilerek kullanıldığını görmekteyiz (Gingsburg, 1981; Zazkis ve Hazzan, 1999). Piaget öğrencilerin düşüncelerinin doğasını açıklamak ve bilişsel becerilerini tespit etmek amacıyla klinik görüşmeyi kullanmıştır (Zazkis ve Hazzan, 1999). Çünkü testlerin yeterli veriyi sağlamadığına inanan Piaget, öğrencilerin yaptıkları hataların nedenleri sorulduğunda verdikleri yanıtların düşünce yapısının doğasını ortaya çıkardığına inanmaktadır. Piaget'in amacı standart testlerde olduğu gibi öğrencileri sıralamak değil, aksine düşüncelerinin doğasına dair derinlemesine bilgi edinebilmektir. Bu amaçla öğrencilerin düşünce zenginliklerini keşfetmek, temel düşünce aktivitelerini yakalamak ve bilişsel yeteneklerini ortaya çıkarmak üzere klinik görüşmeleri geliştirmiştir (Gingsburg, 1981).

Klinik görüşmelerin doğrudan matematik eğitimi araştırmalarında kullanılmaya başlaması daha geç olmuştur. 1970'li yılların ortalarına doğru Piaget, matematik eğitimininde yaptığı birkaç araştırmada ağırlıklı olarak görüşme metodunu kullanmıştır (Zazkis ve Hazzan, 1999). Buda matematik eğitiminde klinik görüşmelerin amaçları ve kullanılabilirliği konusunda bir tartışma başlatmıştır. 1980'li yıllarda Piaget'nin klinik görüşme metodunun yeniden keşfedilmesi ile matematik eğitim araştırmalarında önemli bir değişim ve gelişim meydana gelmiştir (Hunting, 1997). Bu süreçte yapılandırmacı felsefenin prensiplerine dayalı olarak, öğrencilerin matematik öğrenmelerini araştırmada klinik görüşmeler kabul gören bir metot haline gelmiştir (Hunting, 1997). Bu eğilimle birlikte eğitim araştırmalarında, araştırma metodu olarak klinik görüşme en çok kullanılan ve kabul edilen veri toplama yöntemi olmuştur (Long ve Ben-Hur, 1991; Goldin 1998; Zazkis ve Hazzan, 1999; Stewart, 2002).

Klinik görüşme ile doğru yanıtlara bağlı kalmadan değerlendirme yapılabilmekte ve bireyin matematiksel anlamalarının tanımlanması mümkün olmaktadır. Görüşme sayesinde öğrencinin düşünme biçimi ve akıl yürütme becerisi, kavramsal bilgisi, öğrenme biçimi, tutumu, inançları ve bunların altında yatan nedenler hakkında geniş bilgi edinilebilmektedir. Bunların yanı sıra kavram yanılgıları ve ilişkilendirme eksiklerini belirlemek, matematiksel bilgisini sözlü veya yazılı olarak nasıl ortaya koyabildiğini değerlendirmek de olasıdır. Bu yolla öğrencide kendisinin ne bildiğini ve ne kadar uygulayabildiğini görebilmektedir (Long ve Ben-Hur, 1991; Stewart,2002).

Bu görüşme türünü diğerlerinden ayıran en önemli özelliği, klinik olması, yarı yapılandırılmış olması ve odağında konu alanı olmasıdır. Yoğun gözlemler içermesi ve "bir klinikte yürütülmesi" anlamında "klinik" kelimesi geçmektedir. Eğitim ortamları açısından "bir klinikte yürütülmesi" bireyin sınıf, anfi gibi doğal eğitim ortamı dışında görüşmeci ile rahat ve sessiz bir ortamda görüşülmesidir. Yarı yapılandırılmış olması ise bu yöntemin esnekliği ile ilgilidir. Çünkü görüşmeci, görüşmeden önce ne tür sorular soracağını planlar fakat bazen öğrencinin verdiği yanıtlara bağlı olarak öğrencinin düşüncelerine açıklık getirmek için yeni sorular sorması gerekebilir. Son olarak odağının konu alanı olması, görüşmenin özel olarak matematiksel içeriğe odaklandığını yani bireyin matematiksel kavramları ve anlamalarıyla ilintili olduğu anlamına gelmektedir (Zazkis ve Hazzan, 1999; Çelik, 2007).

Bu metot matematik eğitimi araştırmalarında özellikle öğrencilerin düşünme süreçlerine odaklanan çalışmalarda sıkça kullanılmaktadır (Martin ve Harel, 1989; Maher ve Martino, 1996; Forman vd., 1998; Sowder ve Harel, 1998; Knuth, 1999; Harel, 2001; Weber, 2001; Flores, 2002; Knuth, 2002b; Aydoğdu vd., 2003; Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Housman ve Porter, 2003; Raman, 2003; Çelik, 2007; Flores, 2006; Harel ve Sowder, 2007; Sarı vd., 2007; Nardi ve Iannone, 2008). Çünkü bu metot öğrencilerin ne yaptıklarının yanı sıra nasıl ve neden yaptıkları ile de ilgilenmektedir. Bununla birlikte öğrencilerin sahip olabileceği daha derin ve zengin anlamaları ortaya çıkarmak için araştırmacıya görüşme protokolünün dışına çıkma fırsatı vermektedir (Çelik, 2007).

Literatüre bakıldığında klinik görüşme sırasında dikkat edilmesi gereken noktalar şu şekilde sıralanmaktadır:

- bireyin konu ile ilgili kavrama dair bilmesi gerekenlerin neler olduğuna karar vermek,
- bireyin kavrama dair bilmesi gerekenleri ortaya çıkarmada kullanılabilecek seviyeye uygun problem durumları seçmek,
- bireyin problem durumları için olası farklı çözüm yöntemlerini önceden belirleyerek bunlardan hangilerini ortaya koyabildiğini gözlemeye hazırlıklı olmak,
- bireye görüşmeye başlarken amacın ne olduğunu açıklamak,
- görüşme sırasında bireye konuyu öğretmeye veya yanlışlarını düzeltmeye çalışmayıp sadece düşüncelerini ortaya çıkaracak sorular sormak (NCTM, 1991; Kaphesi, 2003).

Bu çalışmada klinik görüşme, öğrencilerin matematiksel bilgilerinin altında yatan zihinsel süreçleri ortaya çıkarmak amacıyla kullanılmıştır. Burada öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemalarına ve kullanılan kanıt şemaları ile matematiksel kanıt hakkındaki görüşleri arasındaki ilişkiye odaklanılmıştır. Öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusu ile ilgili ne tür kanıt şemaları geliştirdiklerini, ne düşündüklerini, nasıl düşündüklerini ve neden öyle düşündüklerini ortaya çıkarmayı amaçlayan bu çalışma için klinik görüşme metodunun yukarıda açıklanan niteliği ile en uygun metot olduğuna karar verilmiştir. Görüşme ile öğrencilerden;

1. Problemin çözümünü yapmaları (Bu şekilde öğrencilerin problemi çözme sürecinde kullandıkları yöntem ve matematiksel düşünmeleri tanımlanmıştır).

2. Her bir görev için yanıtlarının ne olduğunu, bu yanıta nasıl ulaştıklarını ve yanıta ulaşma sürecinde neler düşündüklerini açıklamaları (Sesli düşünme protokolü).

3. Gerekli olan durumlarda yöneltilen ek soruları yanıtlamaları (“Bunu nasıl yaptın?”, “Nasıl düşündün?” ve “Neden?” gibi sorularının yanında problemin içeriği ile ilgili sorular) beklenmiştir.

Veriler toplanırken öncelikle farklı sınıf seviyelerinden çalışmaya katılan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının tamamına (158 kişi) fonksiyonlar konusu ile ilgili olarak hazırlanmış olan 10 problem (bkz. Ek 2.) yazılı sınav olarak uygulanmıştır. Yazılı sınav uygulandıktan 1 ay sonra, öğretmen adayları ile fonksiyonlar konusunu içeren problemler üzerinde klinik görüşmeler yapılmaya başlanmıştır. Görüşmeye başlamadan önce öğretmen adayına, doğru veya yanlış bir yanıta ulaşmanın değil, o yanıta nasıl ulaşıldığının daha önemli olduğu açıklanmıştır. Bunun yanı sıra yapılan görüşme verilerini sadece araştırmacının dinleyeceği ve gerçek isimlerinin açıklanmayacağı belirtilerek yaptıkları çözümlerin not ile değerlendirilmeyeceği dile getirilmiştir. Böylece öğrencinin düşünme biçimini rahatça ortaya koyabileceği bir ortam yaratılmaya çalışılmıştır. Bu açıklamalardan sonra katılımcıya bitirdiği lise türü, kaçıncı girişinde üniversite sınavını kazandığı veya ilköğretim matematik öğretmenliğine isteyerek mi geldiği gibi kişisel sorular yöneltilmiştir.

Problemler öğretmen adaylarına yazılı olarak sunulmuş, klinik görüşme süresince verdikleri yanıtlar ve yaptıkları açıklamalar ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Her bir öğretmen adayı ile iki farklı zamanda görüşme yapılarak her görüşmede öğretmen adaylarına 10 problemin 5 tanesi yöneltilmiştir. Çünkü bu şekilde öğretmen adayının zihinsel açıdan dinç olmasının sağlanacağı düşünülmüştür.

Görüşmeler bireysel olarak yapılmış olup her bir görüşme yaklaşık olarak 30 ila 60 dakika sürmüştür. Bütün görüşmeler boyunca öğretmen adaylarının önünde bir kağıt ve kalem mevcut olup, problemi istedikleri biçimde ve sürede çözmelerine fırsat tanınmıştır. Görüşmelerde, klinik görüşme tekniğinin bazı özellikleri kullanılmıştır. Klinik görüşmelerde amaç kişinin düşünme sürecini anlamaya çalışmaktır. Bu nedenle görüşmeler sırasında öğretmen adaylarından kendilerine sorulan problemleri çözmeleri ve problemi nasıl çözdüklerini, nasıl düşündüklerini ve nedenlerini anlatmaları istenmiştir (Tall, 1979).

Öğretmen adaylarının kağıt üzerinde yaptıkları, düşünme süreçleri ile zihinsel süreçlerinin göstergeleri olarak kullanılmıştır.

Buna göre klinik görüşme sırasında; katılımcıların düşünce yapısını ortaya çıkarmaya yönelik olarak "Neden böyle düşünüyorsun?", "Neden bu doğru?", "Neden bu yöntemi kullandın?", "Bu sonuca nasıl ulaştın?", "Bu her durum için doğru mudur?", "Bunu nasıl kanıtlarsın?", "Bu yöntem her zaman geçerli midir?", gibi sorulardan uygun olanlar yöneltilmiştir (Sowder ve Harel, 1998; Flores, 2002; Housman ve Porter, 2003; Flores, 2006; Harel ve Sowder, 2007). Bunun yanı sıra araştırmacı, öğretmen adaylarına problemleri çözdükten sonra; "Sonucu nasıl bulduğunu açıklayabilir misin?", "Problemi daha farklı bir yolla çözebilir misin?", "Sonucu her zaman böyle mi bulursun?", "Sonucu bulurken neden böyle bir yöntem izliyorsun?" gibi sorularla öğretmen adaylarının düşünceleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Klinik görüşmeler sürecinde özellikle öğretmen adaylarının yönlendirilmemesine ve kesin yargılara yer verilmemesine dikkat edilmiştir. Bu süreçte klinik görüşmelerde farklı sınıf seviyelerinde öğrenimlerine devam eden ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ne tür kanıt şemaları kullandıkları ve kullanılan kanıt şemalarının farklı sınıf seviyelerine göre nasıl bir değişim gösterdiği belirlenmeye çalışılmıştır.

Pilot çalışmalardaki klinik görüşmelerde kullanılan 15 problemden 5'i ayırt ediciliği düşük olduğundan çıkarılmış ve problem sayısı 10 ile sınırlandırılmıştır. Görüşmelerin kalitesi ise, görüşmenin yapılandırılması ve araştırmacının donanımı ile değerlendirilebilir. Bunun sağlanabilmesi için geniş bir literatür taraması yapılmış ve pilot çalışmada yapılan görüşmeler uzman eşliğinde derinlemesine incelenerek esas uygulamada dikkat edilmesi gereken noktalar belirlenmiştir. Görüşmenin değerlendirilmesinde ise, hazırlanan değerlendirme ölçekleri kullanılmıştır (bkz. Ek 2.).

### 2.3.6. Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği

Son olarak verilerin toplanması sürecince öğretmen adaylarına "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" uygulanmıştır. Bu ölçek pilot çalışma ile geçerlik ve güvenirlik çalışmaları yapılarak düzenlenmiş bir ölçektir. Ölçeğin pilot çalışmalardan sonraki son halinde toplam 30 soru bulunmaktadır (bkz. Ek.1). Bu soruların 27 tanesi 5'li likert olarak hazırlanmış ve diğer 3 soru da açık uçlu sorular olarak yöneltilmiştir. Bu açık uçlu sorular ile katılımcıların matematiksel kanıt hakkındaki düşünceleri, kullanım alanları, öğrenmedeki rolü ve kanıtlama sürecinde nelere ihtiyaç duyulabileceği daha derinlemesine ortaya çıkarılmak istenmiştir.

Öğretmen adaylarına gerekli açıklamalar yapıldıktan sonra ölçekte 5'li likert tarzında olan maddeleri boş kalmayacak biçimde doldurmaları istenmiştir. Ayrıca açık uçlu problemleri mümkün olduğunca açık bir biçimde anlaşılır ifadeler kullanarak yanıtlamalarının gerekliliği anlatılmıştır. Bunun sonucunda da öğretmen adaylarına ölçeği yanıtlandırmaları için 20-25 dakikalık bir süre verilmiştir. Bu ölçek ile öğretmen adaylarının kanıta ilişkin tutum, inanç, güven, zihinsel süreç ve özdeğerlendirmelerinin ortaya çıkarılması amaçlanmaktadır.

## 2.4. Verilerin Analizi

Bu bölümde araştırmada elde edilen verilerin nasıl analiz edildiği açıklanmıştır. Farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir fark olup olmadığı ile ilgili veriler nicel olarak değerlendirilirken farklı öğrenim seviyelerindeki öğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemalarındaki değişimler, gelişimler ve düşünce yapıları ile ilgili bulgular nitel olarak değerlendirilmiştir. Özellikle bu çalışma için temel veriler klinik görüşmelerden elde edilen nitel verilerdir. Ayrıca öğretmen adaylarının kanıta bakış açıları nicel olarak değerlendirilmiştir. Bunlara ek olarak katılımcıların kanıta bakış açıları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında ne tür bir ilişki olduğunu belirleme sürecinde ise ölçeğin sonuçları ile öğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemaları karşılaştırılmıştır.

Fonksiyonlar konusunda kullanılan kanıt şemaları ile ilgili verilerin analizinde şu aşamalar izlenįştir. Öncelikle öğretmen adaylarının yazılı sınavda verdikleri yanıtlar, yaptıkları çözümler dışsal, deneysel, analitik ve boş olmak üzere dört kategoriye göre ayrı ayrı sınıflandırılmıştır. Yapılan bu sınıflamalara göre öğretmen adaylarının her bir problem için frekans ve yüzde dağılımları hesaplanarak yüzdelere göre sütun grafikleri oluşturulmuştur. Bunun ardından farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir fark olup olmadığına ilişkin SPSS paket programı yardımıyla istatistiksel analizler yapılmış ve bu analizler yorumlanmıştır. Daha sonra öğretmen adaylarıyla yürütülen klinik görüşmelerden elde edilen veriler dışsal, deneysel ve analitik çözümler olmak üzere üç başlık altında analiz edilerek sunulmuş ve her bir problemden sonra o probleme ait bir sonuç tablosu oluşturulmuştur. Sonra ölçeğin analizleri yapılmıştır. Bunun için de farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarının kanıta bakış açıları arasından anlamlı bir fark olup olmadığına ilişkin SPSS paket programı yardımıyla istatistiksel analizler yapılmış ve bu analizler yorumlanmıştır. Son olarak da yine SPSS paket programı yardımıyla ölçekten elde edilen veriler ve yazılı sınav sonucu kullanılan kanıt şemaları arasındaki paralellik için de istatistiksel analizler yapılmış ve bu analizler yorumlanmıştır.

### 2.4.1. Yazılı Sınavın Analizi

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları kanıt şemalarını belirlemeye ve bu şemalara dair değişimleri değerlendirmek amacıyla 10 problem ölçme aracı olarak kullanılmıştır. Yukarıda da belirtildiği gibi bu problemler hem yazılı sınavlarda ve hem de klinik görüşmelerde kullanılmıştır. Bu problemlerden elde edilen veriler kanıt şemaları ile ilgili özellikleri içeren "Yazılı Sınav ve Görüşme Verilerinin Değerlendirilmesi İçin Kullanılan Ölçekler" yardımıyla (bkz. Ek 2.) değerlendirilmiştir.

Yazılı sınavda kullanılan kanıt şemaları ile ilgili verilerin analizinde şu aşamalar izlenmiştir: İlk önce öğretmen adaylarının yazılı sorularına verdiği yanıtlar dört ayrı kategoriyi (dışsal, deneysel, analitik, boş) içeren çözüm stratejilerine göre kanıt şemaları ile ilgili ölçeklere göre ayrı ayrı sınıflandırılmıştır. Bu süreçte öğretmen adaylarının yanlış çözümleride değerlendirmeye alınmıştır. Ayrıca çözümü hiç yapılmamış problemlerin yanı sıra yalnızca bir formül, kural vs. yazılmış çözümlerde boş kabul edilmiştir. Yapılan bu sınıflamalara göre öğretmen adaylarının hem bütüm problemler bazında ve hem de her bir problem durumu için ayrı ayrı frekans ve yüzde dağılımları hesaplanarak yüzdelerine göre sütun grafikleri oluşturulmuştur.

Farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarının yazılı sınavda kullandıkları kanıt şemaları ile sınıf seviyeleri arasında bütün problemler bazında anlamlı bir fark olup olmadığına ilişkin SSPS paket programı yardımıyla istatistiksel analizler yapılmış ve yorumlanmıştır. Bu süreçte ise istatistiksel analiz için parametrik olmayan testlerden Kruskal Wallis H-Testi kullanılmıştır. Parametrik olmayan testler parametrik olan testlerin kullanılamadığı durumlarda kullanılmaktadır. Bu çalışmada da 4 farklı sınıflamaya göre 4 farklı grubun karşılaştırılması için uygun bir parametrik test olmadığından dolayı parametrik olmayan bir test kullanılmıştır. Kruskal Wallis H-Testi gruplar arası tek yönlü varyans analizinin parametrik olmayan alternatifidir (Büyüköztürk, 2004; Kalaycı, 2005).

Bu analiz sürekli değişkenlere sahip üç ya da daha fazla grubun karşılaştırmasını yapmakta kullanılır. Bunun için de değerler sıralı hale getirilir ve her grup için sıralı ortalamalar karşılaştırılır. Yani bir faktöre ait üç ya da daha çok ortalama puanın birbirinden anlamlı bir şekilde farklılaşıp farklılaşmadığının belirlenmesinde kullanılmaktadır. Bu nedenle de gruplar arası bir karşılaştırmadır ve bundan dolayı da farklı gruplarda farklı insanlar bulunur (Büyüköztürk, 2004; Balcı, 2005; Kalaycı, 2005). Bu çalışmada da her bir katılımcının hangi şemadan kaç tane kullandığı ve kaç problemi boş bıraktığı hesaplanarak problemlerin tamamında kullanılan kanıt şemaları ile farklı sınıflar arasında anlamlı bir fark olup olmadığı Kruskal Wallis H-Testi yardımıyla değerlendirilmiş ve yorumlanmıştır.

Daha sonra her bir problem durumu için kullanılan kanıt şemaları ile farklı sınıflar arasında anlamlı bir fark olup olmadığına yine SSPS paket programı yardımıyla istatistiksel analizler yapılmış ve yorumlanmıştır. Bu süreçte ise istatistiksel analiz için parametrik olmayan testlerden Ki-Kare Testi kullanılmıştır. Ki-Kare Testi iki veya daha fazla frekans dağılımının, değişken grubunun birbirinden anlamlı bir farklılık gösterip göstermediğinin karşılaştırılmasında kullanılmaktadır (Balcı, 2005, Kalaycı, 2005). Bu teknik sınıflamalı (kategorik) değişkenler arasında anlamlı bir ilişki olup olmadığını test eder (Büyüköztürk, 2004). Bu çalışmada da istatistiksel analizler yapılırken her kategoriye sırasıyla 0 (Boş), 1 (Dışsal), 2 (Deneysel), 3 (Analitik) puanlar verilmiştir. Daha sonra her bir problem için her bir katılımcının hangi problemde hangi şemayı kullandığı belirlenerek bunlar puanlanmıştır. Sonra da her bir problem için ayrı ayrı kullanılan kanıt şemaları ile farklı sınıflar arasında anlamlı bir fark olup olmadığına Ki-Kare Testi ile bakılarak değerlendirilmiş ve yorumlanmıştır. Aynı biçimde Ki-Kare Testi ile her bir problemde kullanılan kanıt şemaları arasında anlamlı bir fark olup olmadığına bakılarak değerlendirilmiş ve yorumlanmıştır.

### 2.4.2. Klinik Görüşme Analizi

Klinik görüşmelerin analizi yapılırken şu aşamalar takip edilmiştir:İlk aşama, ses kayıt cihazı ile kaydedilen konuşmaların çözümlenerek word dosyasında yazılı hale dönüştürülmesidir. Bu işlem yapılırken araştırmacı görüşme boyunca yaptığı gözlemler ışığında yazıya açıklayıcı notlar yazmıştır. İkinci aşama görüşmelerden elde edilen verilerin, fonksiyonlarda kanıt şemasına ilişkin hazırlanan ve kanıt şeması ile ilgili özellikleri içeren ölçeklere göre değerlendirilmesidir.

Öğretmen adaylarının ne tür kanıt şemaları kullandıklarını belirleme sürecinde Sowder ve Harel'ın (1998) belirledikleri kanıt şemaları kullanılarak veriler niteliksel yöntemlerden betimsel analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Çünkü betimsel analizde elde edilen veriler daha önceden belirlenen temalara göre özetlenebilmekte ve yorumlanabilmektedir. Bunun yanı sıra betimsel analizde görüşülen veya gözlenen bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak için doğrudan alıntılara da sık sık yer verilebilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2000; Çepni, 2009). Analiz sürecinde öğretmen adaylarının klinik görüşmelerde kullandıkları son ifadeler göz önünde bulundurulmuştur. Bunun sonucunda da öğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemaları belirlenerek sınıflara göre ne tür farklılıklar gösterdikleri görülmeye çalışılmıştır. Bu süreçte pilot çalışmaların sonunda hazırlanan ölçekten de yararlanılmış ve gerekirse ölçeğe yeni ifadeler de eklenmiştir. Bunlara ek olarak her bir problemde önce hangi şemayı hangi öğretmen adayının kullandığını gösteren tablolar oluşturulmuştur. Sonra da o probleme ait 16 öğretmen adayının bu üç kanıt şemasına göre değişimini ve gelişimini ortaya koyan bir sonuç tablosu oluşturulmuştur. Bu tablo klinik görüşmeye katılan öğretmen adaylarının yazılı sınavda ve klinik görüşmede kullandıkları şemaları göstermektedir. Ayrıca bu çalışmade katılımcı öğretmen adaylarını nitelemek için "ÖA1A, ÖA1B, ÖA1C, ……ÖA4B, ÖA4C, ÖA4D) şeklinde takma isimler kullanılmıştır. Yine bu kısımda klinik görüşmeler sırasında araştırmacı ve öğretmen adayları arasında geçen karşılıklı diyaloglardan doğrudan alıntılara, okuyucuya betimsel ve gerçekçi bir resim sunmak ve kendi yorumlarını yapma fırsatı vermesi açısından yer verilmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Klinik görüşme katılımcılarının her birisinin kullandığı kanıt şemaları belirlendikten sonra sınıf seviyeleri ile görüşmede katılımcıların kullanılan kanıt şemaları arasında anlamlı bir fark olup olmadığına bakılmıştır. Bunun için de SSPS paket programı yardımıyla istatistiksel analizler yapılmış ve yorumlanmıştır. Bu süreçte ise istatistiksel analiz için parametrik olmayan testlerden Kruskal Wallis H-Testi kullanılmıştır. Bunun için de klinik görüşmeye katılan öğretmen adaylarının her birisinin dışsal, deneysel ve analitik şemalardan kaçar tane kullandıkları ve kaç problemi boş bıraktıkları belirlenmiştir. Bu hesaplamadan sonra ise problemlerin tamamında kullanılan kanıt şemaları ile farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir fark olup olmadığı Kruskal Wallis H-Testi yardımıyla değerlendirilmiş ve yorumlanmıştır.

### 2.4.3. Ölçek Analizi

"Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" ağırlıklı olarak likert tipi bir ölçektir. Ölçeğin son üç sorusu ise katılımcılara açık uçlu olarak yöneltilmiştir. Bu ölçekte yer alan likert türü maddeler, "her zaman", "sık sık", "bazen", "nadiren" ve "asla" şeklinde beş seçenek içermektedir. Ölçekte öğretmen adaylarının kanıta yönelik görüşlerini içeren 27 likert türü madde ve 3 tane de açık uçlu soru bulunmaktadır. Likert türü her maddenin puanlaması yukarıdaki sıraya göre, 5,4,3,2,1 puan şeklinde yapılmıştır. Bunun yanı sıra bazı maddeler ters görüş içerdikleri için bu maddeler ters çevrilerek analiz edilmiştir. Aralıkların eşit olduğu varsayılarak puan aralığı katsayısı 0.80 olarak bulunmuştur. Puan Aralığı = (En Yüksek Değer-En Düşük Değer)/5 = 4/5 = 0.80. öğretmen adaylarının puanlarının ortalamalarının değerlendirme aralığı; 1.00-1.80 arası "asla", 1.81-2.60 arası "nadiren", 2.61-3.40 arası "bazen", 3.41-4.20 arası "sık sık", 4.21-5.00 arası "her zaman" şeklinde belirlenmiştir. Böylece her bir maddeye ait puanlar toplanarak öğretmen adaylarına ait puan ortalamaları ölçekte yer alan her bir faktöre göre her sınıf için ayrı ayrı tespit edilmiştir.

Bunlara ek olarak ölçekte yer alan her bir faktör için farklı sınıflar arasında anlamlı bir fark olup olmadığına SPSS yardımıyla istatistiksel yöntemlerden Tek Yönlü Varyans Analizi (ANOVA) kullanılarak analizler yapılmış ve yorumlanmıştır. Tek yönlü varyans en basit varyans analizidir (Kalaycı, 2005). Bu teknik iki ya da daha çok ilişkili ölçüm setlerine ait ortalama puanların birbirinden anlamlı bir şekilde farklılık gösterip göstermediğini test etmek için kullanılmaktadır (Büyüköztürk, 2004). Diğer bir ifadeyle bir ya da daha çok değişkene-faktöre ait ortalama puanların birbirleri arasında anlamlı bir farklılığın olup-olmadığını karşılaştırmada, çeşitli faktörlerin birbiriyle anlamlı şekilde etkileşip etkileşmediğinin belirlenmesinde, örneklem varyanslarının birbirinden anlamlı şekilde farklılaşıp farklılaşmadıklarını karşılaştırmada kullanılmaktadır (Balcı, 2005). Bu çalışmada ise farklı örneklemlerin her bir faktör için anlamlı bir biçimde farklılaşıp farklılaşmadığı görülmeye çalışılmıştır. Bunun için de her bir faktör için bütün katılımcıların ortalamaları teker teker bulunarak Tek Yönlü Varyans Analizi (ANOVA) ile analizler yapılmış ve yorumlanmıştır. Bunlara ek olarak her bir faktörde yer alan maddelerin frekans ve yüzde değerleri ayrı ayrı tablolarda verilerek yorumlanmıştır.

Ölçeğin sonunda üç tane açık uçlu soru bulunmaktadır. Ölçekte yer alan açık uçlu sorular yardımıyla katılımcıların matematiksel kanıtın matematik öğrenmedeki rolü hakkında ne düşündükleri, hangi durumlarda matematiksel kanıt yaptıkları ve matematiksel kanıt yaparken nelere ihtiyaç duydukları görülmeyi çalışılmıştır. Bu açık uçlu soruların analizinde temalar ve kodlar kullanılmıştır. Bunun sonucunda da ayrı ayrı her bir açık uçlu soru için sınıflara göre kodların frekanslarını veren tablolar oluşturulmuştur. Daha sonra ise bu tablolar değerlendirilerek yorumlanmıştır.

### 2.4.4. Yazılı Sınav ve Klinik Görüşme ile Ölçek Arasındaki İlişkiye Yönelik Veri Analizi

Klinik görüşmeye ve yazılı sınava katılan öğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemaları ile kanıta yönelik görüşleri arasındaki ilişkiyi görmeye yönelik istatistiksel analizler yapılmıştır. Çalışmada hem yazılı sınava katılan ve hem de ölçeği yanıtlayan 119 öğretmen adayı bulunmaktadır. Bu nedenle de öğretmen adaylarının yazılı sınavda kullandıkları kanıt şemaları ile kanıta bakış açıları arasındaki ilişkiyi görmeye yönelik istatistiksel analizler bu öğretmen adaylarıyla yapılmıştır. Yazılı sınav ve klinik görüşme ile ölçekteki faktörler arasındaki ilişkiyi belirlemeye yönelik olarak Mann-Whitney U testi kullanılarak her bir faktör için ayrı ayrı analizler yapılmış ve değerlendirilerek yorumlanmıştır. Mann-Whitney U testi aralıksız ölçülen iki bağımsız ve ilişkisiz örneklemden elde edilen puanlar arasındaki farklılıkları görmek için kullanılmaktadır (Büyüköztürk, 2004; Balcı, 2005; Kalaycı, 2005). Bu test bağımsız örnekler için kullanılan t-testlerinin parametrik olmayan alternatifidir (Kalaycı, 2005; Ekiz, 2007). Mann-Whitney U testi, T-testinde olduğu gibi, iki grubun ortalamalarının karşılaştrılması yerine grupların medyanlarını karşılaştırır. Sürekli değişkenlerin, iki grup içerisindeki değerlerini sıralı hale dönüştürür. Böylece, iki grup arasındaki sıralamanın farklı olup olmadığını değerlendirir. Değerler sıralı hale dönüştürüldüğü için asıl dağılımları önemli değildir (Kalaycı, 2005).

Bu çalışmada ölçekteki faktörlerin her birine göre katılımcılar iki gruba ayrılmıştır. Katılımcılar iki gruba ayrılırken önce her bir faktör için katılımcıların her birinin aldığı puanların aritmetik ortalamaları alınarak her bir katılımcının her faktör için ortalama puanları hesaplanmıştır. Bunun ardından da bu ortalama puanlara küçükten büyüğe doğru sıra numaraları verilerek bu sıralamanın medyanı bulunmuştur. Katılımcılar sıralamanın medyanında yer alan ortalama puana göre iki gruba ayrılmışlardır. Katılımcılar iki gruba ayrılırken bu ortalama puanın altında puanı olanlar, matematiksel kanıt yapmaya yönelik güveni, özdeğerlendirmesi, tutum-inancı ve zihinsel süreci düşük olarak alınmıştır. Bu ortalama puanın üstünde puan alan katılımcılar ise matematiksel kanıt yapmaya yönelik güveni, özdeğerlendirmesi, tutum-inancı ve zihinsel süreci yüksek olarak alınmıştır. Mann-Whitney U testinin sonuçları yazılı sınav katılımcıları ve klinik görüşme katılımcıları için ayrı ayrı bu iki gruba göre değerlendirilerek yorumlanmıştır.

# 3.BULGULAR

Çalışmanın bu bölümü, üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde öğretmen adaylarının kanıta yönelik görüşlerine yer verilirken ikinci bölümde kullanılan kanıt şemaları ile kanıta yönelik görüşler arasındaki ilişki ölçekte yer alan her bir faktör için ayrı ayrı ele alınmaktadır. Üçüncü bölüm ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemaları ile ilgili bulguları içermektedir. Bu bölüm ise kendi içerisinde iki kısma ayrılmaktadır. Bu kısımlar, yazılı sınavlardan elde edilen nicel verilere ait bulgular ile klinik görüşmelerden elde edilen nitel verilere ait bulgular şeklindedir.

## 3.1. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kanıta Yönelik Görüşlerini ve Farklı Sınıf Seviyelerinin Kanıta Yönelik Görüşlerinin Değişimini İçeren Bulgular

Çalışmanın bu kısmında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği"ne dair bulgulara ölçekte yer alan faktörlere göre ayrı ayrı bütün sınıf seviyelerini içerecek biçimde yer verilecektir.

Çalışmada kullanılan "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" zihinsel süreç, güven, özdeğerlendirme ve tutum-inanç olmak üzere dört faktör içermektedir. Ölçeğin bütün sınıflar bazında genel ortalaması 3,58645 olarak bulunmuştur. Bu ortalamada gösteriyor ki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıta yönelik görüşleri olumludur.

Ölçekte yer alan dört ayrı faktöre göre ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ortalamalarında bazı farklılıklar bulunmaktadır (Tablo 7.). Bu farklılıklar bazı durumlarda sınıflara göre de değişmektedir.

Tablo 7. "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği"nde yer alan faktörlere göre farklı sınıf seviyelerinin ortalamaları

| **Faktör Sınıf** | | **N** | **Ortalama** | **Standart Sapma** |
|---|---|---|---|---|
| **Zihinsel Süreç** | 1,00 | 73 | 4,1272 | ,35759 |
| | 2,00 | 35 | 4,1184 | ,52943 |
| | 3,00 | 34 | 4,0210 | ,52652 |
| | 4,00 | 45 | 3,7651 | ,59228 |
| | Toplam | 187 | 4,0191 | ,50493 |
| **Güven** | 1,00 | 73 | 3,0098 | ,57308 |
| | 2,00 | 35 | 2,8816 | ,46029 |
| | 3,00 | 34 | 3,1303 | ,60952 |
| | 4,00 | 45 | 3,1397 | ,51732 |
| | Toplam | 187 | 3,0390 | ,55141 |
| **Özdeğerlendirme** | 1,00 | 73 | 3,7589 | ,53329 |
| | 2,00 | 35 | 3,7200 | ,51837 |
| | 3,00 | 34 | 3,5235 | ,66061 |
| | 4,00 | 45 | 3,7422 | ,62758 |
| | Toplam | 187 | 3,7048 | ,58081 |
| **Tutum-İnanç** | 1,00 | 73 | 3,6747 | ,40276 |
| | 2,00 | 35 | 3,5607 | ,43447 |
| | 3,00 | 34 | 3,5147 | ,49883 |
| | 4,00 | 45 | 3,5028 | ,43505 |
| | Toplam | 187 | 3,5829 | ,43820 |

Tablo 7'de farklı sınıf seviyelerinden çalışmaya katılan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ölçekte yer alan maddelere verdikleri yanıtların ortalamaları faktörlere ve sınıflara göre ayrı ayrı yer almaktadır.

Ölçekte yer alan ilk faktörümüz zihinsel süreçtir. Tablo 7'ye bakıldığında zihinsel sürecin genel ortalamasının 4,0191 olduğu görülmektedir. Bu ortalama katılımcıların kanıta zihinsel olarak olumlu yaklaştıklarını göstermektedir. Diğer bir ifadeyle katılımcılar kanıta dair zihinsel süreçlerini sık sık kullanmaktadırlar. Ölçekteki zihinsel süreç maddelerine bakıldığında ise tanımları, teoremleri, önceki bilgileri vs. içerdiği görülmektedir. Ayrı ayrı sınıf seviyeleri bazında ortalamalara bakıldığında birinci sınıfların 4,1272, ikinci sınıfların 4,1184, üçüncü sınıfların 4,0210 ve dördüncü sınıfların da 3,7651 olduğu görülmektedir. Ortalamalara bakıldığında bütün sınıf seviyelerinde zihinsel süreçlerin kanıtta sık sık kullanıldığı görülmektedir ve farklı sınıf seviyelerinin ortalamaları birbirine yakın değerlerdedir. Fakat en düşük ortalamaya dördüncü sınıflar sahipken en yüksek ortalamaya da birinci sınıfların sahip olduğu görülmektedir.

Ölçekte yer alan diğer faktör ise güvendir. Ölçeği yanıtlandıran katılımcıların genel ortalaması 3,0390 olarak bulunmuştur (bkz. Tablo 7.). Bu da katılımcıların genelinin kanıt konusunda bazen kendilerine güvendiklerini göstermektedir. Farklı sınıf seviyelerinde katılımcıların kanıt konusunda kendilerine olan güven ortalamalarına bakıldığında birinci sınıfların 3,0098, ikinci sınıfların 2,8816, üçüncü sınıfların 3,1303 ve dördüncü sınıfların 3,1397 olduğu görülmektedir. Ortalamalar gösteriyor ki farklı sınıf seviyelerindeki katılımcılar kanıt konusunda kendilerine bazen güvenmektedirler. Ortalamalar birbirine çok yakın olmasına rağmen kanıt konusunda güveni en yüksek olanlar dördüncü sınıflar iken kanıt konusunda güveni en düşük olan katılımcılar da ikinci sınıflardır.

Ölçekteki bir diğer faktörde bireylerin kanıt konusunda kendilerini değerlendirmelerine ve yaptıklarına tekrar dönüp baklamalarına yönelik olarak özdeğerlendirmedir. Bütün katılımcıların kanıt konusunda özdeğerlendirme yapma ortalamaları 3,7048'dir (bkz. Tablo 7.). Bu ortalamada gösteriyor ki katılımcılar kanıt yaparken sık sık kendilerini değerlendiriyor ve yaptıklarını tekrar gözden geçiriyorlar. Farklı sınıf seviyelerinden katılımcıların özdeğerlendirme ortalamaları birbirine son derece yakındır. Bunun yanı sıra birinci sınıfların özdeğerlendirme ortalamaları 3,7589 iken ikinci sınıfların 3,7200'dir. Ayrıca üçüncü sınıfların ortalamalarına bakıldığında 3,5235 ve dördüncü sınıfların ortalamalarının da 3,7422 olduğu görülmektedir. Ortalamaların birbirine son derece yakın olmasının yanı sıra katılımcıların kanıta dair özdeğerlendirmeyi sık sık yaptıkları görülmektedir. Fakat ortalamalar göz önünde bulundurulduğunda üçüncü sınıfların en düşük ortalamaya sahip oldukları görülmektedir. Bunun yanı sıra birinci, ikinci ve üçüncü sınıfların ortalamaları da birbirine son derece yakın olmasına rağmen en yüksek ortalamaya birinci sınıflar sahiptir.

Ölçekteki son faktör ise tutum-inançdır. Bu faktör ile katılımcıların kanıta yönelik tutum ve inançları görülmeye çalışılmıştır. Farklı sınıf seviyelerinden çalışmaya katılan öğretmen adaylarının kanıta dair tutum-inanç konusundaki genel ortalamaları 3,5829'dur (bkz. Tablo 7.). Bu ortalama gösteriyor ki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt konusundaki tutum ve inançları olumludur. Yani diğer bir ifadeyle öğretmen adaylarının kanıta yönelik olarak tutum-inançları sık sık olumludur. Ölçekteki tutum-inanç faktöründe birinci sınıfların ortalaması 3,6747 iken ikinci sınıfların ki 3,5607'dır. Bunun yanı sıra üçüncü sınıfların ortalaması 3,5147 ve dördüncü sınıflarınki ise 3,5028 bulunmuştur. Bütün sınıfların ortalamalarına tek tek bakıldığında bütün sınıf seviyelerinde kanıta yönelik tutum-inançlarının yüksek olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra sınıfların ortalamaları birbirine son derece yakın olmasına rağmen en yüksek ortalamaya birinci sınıflar sahipken en düşük ortalamaya da dördüncü sınıflar sahiptir.

Farklı sınıf seviyelerinden ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ölçekte yer alan faktörlere ait ortalamalarına bakıldığı zaman kanıtlama sürecinde zihinsel süreçleri en çok birinci sınıfların kullandıkları, güveni en yüksek olanların dördüncü sınıflar oldukları, özdeğerlendirmeyi en çok birinci sınıfların yaptıkları ve tutum-inancın en yüksek olduğu sınıf seviyesinin de yine birinci sınıflar olduğu görülmektedir. Bunlara bağlı olarak bazı faktörlerle sınıf seviyeleri arasında yapılan ANOVA testi sonucunda anlamlı farklılıklar ortaya çıkmıştır (bkz. Tablo 8.).

Tablo 8. "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği"nde yer alan faktörlere göre Varyans Analizi Tablosu (ANOVA)

| **Faktör** | | **Kareler Toplamı** | **sd** | **Kareler Ortalaması** | **F** | **p** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Zihinsel Süreç** | Gruplar Arası | 4,102 | 3 | 1,367 | 5,776 | .001 |
| | Gruplar İçi | 43,320 | 183 | ,237 | | |
| | Toplam | 47,422 | 186 | | | |
| **Güven** | Gruplar Arası | 1,668 | 3 | ,556 | 1,854 | .139 |
| | Gruplar İçi | 54,885 | 183 | ,300 | | |
| | Toplam | 56,553 | 186 | | | |
| **Özdeğerlendirme** | Gruplar Arası | 1,402 | 3 | ,467 | 1,394 | .246 |
| | Gruplar İçi | 61,344 | 183 | ,335 | | |
| | Toplam | 62,746 | 186 | | | |
| **Tutum-İnanç** | Gruplar Arası | 1,079 | 3 | ,360 | 1,900 | .131 |
| | Gruplar İçi | 34,636 | 183 | ,189 | | |
| | Toplam | 35,715 | 186 | | | |

Tablo 8'de sınıf seviyeleri ile ölçekte yer alan faktör arasında anlamlı bir fark olup-olmadığı görülmektedir. Tabloya bakıldığında zihinsel süreç ile farklı sınıf seviyeleri arasında $p < .05$ olduğu için anlamlı bir fark olduğu söylenebilir. Fakat diğer faktörler ile sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır. Zihinsel süreçler ile sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmaktadır. Bu farklılığın hangi sınıf seviyeleri arasında olduğunu anlamak için ise ANOVA testleri yapılmıştır.

"Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği"nde yer alan faktörlere yönelik olarak hangi sınıflar arasında farklılık olduğunu göstermek için yapılan ANOVA testi sonucu zihinsel süreç ile sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık olduğu görülmüştür. Test sonuçlarına bakıldığında ise zihinsel süreçte $p < .05$ düzeyinde birinci sınıflar ile d rd nc  sınıflar arasında (.001) ve yine p < .001 d zeyinde ikinci sınıflar ile d rd nc  sınıflar arasında (.009) anlamlı bir farklılık olduğu g r lmektedir (bkz. Tablo 8.). Bunun yanı sıra zihinsel s reçte  ç nc  sınıflar ile d rd nc  sınıflar arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır. Ayrıca  lçekte yer alan g ven,  zdeğerlendirme ve tutum-inanç fakt rleri ile farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır.

### 3.1.1. İlk  ğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Ölçekteki Herbir Fakt re Ait Bulguları

Çalışmanın bu kısmında farklı sınıf seviyelerindeki ilk  ğretim matematik  ğretmeni adaylarının  lçeğe verdikleri yanıtlar herbir fakt re g re ayrı ayrı değerlendirilerek ele alınmıştır. Bunun sonucunda da  nce herbir fakt r için frekans ve y zde değerlerini g steren bir tablo oluşturulmuş ve daha sonra da bu tablolar değerlendirilerek yorumlanmıştır.

Tablo 9. Öğretmen adaylarının kanıta y nelik zihinsel s reçlerine ait frekans ve y zde değerleri

| S.K. | Madde 3 | | Madde 4 | | Madde 16 | | Madde 17 | | Madde 18 | | Madde 24 | | Madde 25 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % |
| **1** | 2 | 1,1 | 2 | 1,1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0,5 | 1 | 0,5 | 1 | 0,5 |
| **2** | 14 | 7,5 | 17 | 9,1 | 7 | 3,7 | 4 | 2,1 | 3 | 1,6 | 13 | 7 | 12 | 6,4 |
| **3** | 36 | 19,2 | 51 | 27,3 | 24 | 12,8 | 11 | 5,9 | 29 | 15,5 | 38 | 20,3 | 35 | 18,7 |
| **4** | 116 | 62 | 93 | 49,7 | 95 | 50,9 | 47 | 25,1 | 83 | 44,4 | 89 | 47,6 | 60 | 32,1 |
| **5** | 19 | 10,2 | 24 | 12,8 | 61 | 32,6 | 125 | 66,9 | 71 | 38 | 46 | 24,6 | 79 | 42,3 |
| **T.** | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 |

Tabloda kullanılan kısaltmalar: S.K.: Seçilen Kategori, T.: Toplam

Tablo 9 ilk  ğretim matematik  ğretmeni adaylarının zihinsel s reçle ilgili  lçekte yer alan maddelere verdikleri yanıtlara ait frekans ve y zde değerlerini içermektedir. Ölçekte yer alan zihinsel s reç  ğretmen adaylarının kanıt yaparken geliştirdikleri d ş nme yeteneklerini, bilgi kaynaklarını ve motivasyonlarını içermektedir. Zihinsel s reçte katılımcıların %62'si madde 3'de kanıt yaparken tanımları sık sık kullandıklarını dile getirirken %10'u da her zaman kullandığını belirtmiştir. Bunun yanı sıra katılımcıların sadece %1,1'i de tanımları asla kullanmadıklarını belirtirken %7,5'i nadiren ve %19,2'si de bazen kullandıklarını belirtmişlerdir. Madde 4'de kanıt yaparken kanıt s reçlerini hatırlayıp ilgili teoremleri sık sık kullananlar %49,7 iken bazen kullananlar %27,3 ve her zaman kullanalar da %12,8'dir. Bunun yanı sıra asla kullanmadığını belirtenler %1,1 ve nadiren kullananlar da %9,1'dir. Madde 16, katılımcılara "Kanıtı yaparken kanıtlayacağım matematiksel ifadeyi tekrar okurum." biçiminde y neltilmiştir. Bu maddeye asla yanıtını veren katılımcı olmazken bunların %3,7'si nadiren, %12,8'i bazen, %50,9'u sık sık ve %32,6'sı da her zaman yanıtını vermiştir. Bunun yanı sıra madde 17'ye her zaman yanıtını veren katılımcıların %66,9'u kanıt oluştururken nceki bilgilerin nemli olduğunu d ş nmektedirler. Ayrıca bu maddeye %25,1'i sık sık, %5,9'u bazen, %2,1'i de nadiren yanıtını verirken bu maddeye asla diyen katılımcı olmamıştır. Onsekizinci madde kanıtın verilen durumu neden sağladığını anlamanın nemi ile ilgilidir. Katılımcıların %0,5'i için asla nemli olmazken, %1,6'sı için nadiren, %15,5'i için bazen, %44,4' için sık sık ve %38'i için de her zaman nemlidir. Madde 24 katılımcılara "Kanıtın bir sonraki adımına geçmeden nce kanıtı tamamlamakta kullanacağım y nteme karar vermek sonuca daha kolay ulaşmamı sağlar." şeklinde y neltilmiştir. Katılımcılardan %0,5'i buna asla diyerek kullanacağı y nteme karar vermenin kanıta daha kolay ulaşmasını sağlamayacağını dile getirirken %1,6'sı nadiren, %15,5'i bazen, %44,4' sık sık ve %38'i de her zaman diyerek sonuca y nteme karar vererek daha kolay ulaşacağını dile getirmiştir. Madde 25 ters g r ş içeren maddelerden biridir. Bu maddeye katılımcıların her zaman diyen %42,3' ğretmenin sınıfta yaptığı kanıtı tekrar d zenlemenin zaman kaybı olduğunu d ş nmektedirler. Bunun yanı sıra bu maddeye sık sık diyenler %32,1, bazen diyenler %18,7, nadiren diyenler %6,4 ve asla diyenler de %0,5'dir. Sonuç olarak katılımcıların kanıt hakkındaki zihinsel s reçleri ile ilgili d ş nceleri ağırlıklı olarak bazen, sık sık ve her zaman kategorilerinde yoğunlaşmaktadır.

Tablo 10. Öğretmen adaylarının kanıta y nelik g venlerine ait frekans ve y zde değerleri

| S.K. | Madde 1 | | Madde 2 | | Madde 6 | | Madde 7 | | Madde 12 | | Madde 20 | | Madde 23 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % |
| **1** | 1 | 0,5 | 4 | 2,1 | 18 | 9,6 | 2 | 1,1 | 3 | 1,6 | 12 | 6,4 | 15 | 8 |
| **2** | 45 | 24,1 | 47 | 25,1 | 63 | 33,7 | 41 | 21,9 | 24 | 12,8 | 33 | 17,7 | 31 | 16,6 |
| **3** | 122 | 65,2 | 86 | 46 | 56 | 29,9 | 109 | 58,3 | 91 | 48,7 | 65 | 34,8 | 65 | 34,8 |
| **4** | 17 | 9,1 | 42 | 22,5 | 33 | 17,7 | 34 | 18,2 | 60 | 32,1 | 50 | 26,7 | 59 | 31,5 |
| **5** | 2 | 1,1 | 8 | 4,3 | 17 | 9,1 | 1 | 0,5 | 9 | 4,8 | 27 | 14,4 | 17 | 9,1 |
| **T.** | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 |

Tabloda kullanılan kısaltmalar: S.K.: Seçilen Kategori, T.: Toplam

Tablo 10 farklı sınıf d zeylerindeki ğretmen adaylarının kanıta y nelik g venlerini g steren frekans ve y zde değerlerini içermektedir. Ölçekte yer alan g ven fakt r bireyin kanıtlama konusunda probleme meydan okuma biçimini ve kendine olan g venini içermektedir. Ölçekte birinci madde olarak “Kanıt yapmak zordur.” c mlesi yer almaktadır ve bu madde ters g r ş içermektedir. Katılımcıların çok azı bu maddeye asla (%1,1) diyerek kanıt yapmanın zor olmadığını belirtmişlerdir. Katılımcılardan %24,1’i nadiren zor olduğunu dile getirirken %65,2’si de bazen zor olduğunu belirtmişlerdir. Bunun yanı sıra katılımcıların %9,1 için sık sık zorken %1,1’i için de her zaman zordur. Madde 2’de madde 1 gibi ters g r ş içermektedir ve ifadesi “Bir kanıtı ğretmen yaptığında anlarım fakat kendi başıma yapamam.” şeklindedir. Katılımcıların sadece %2,1’i bu ifadeye asla diyerek kendi başlarına da yapabileceklerini dile getirirken %25,1’i de nadiren yapabileceklerini ifade etmişlerdir. Bunun yanı sıra bazen yanıtını verenler %46, sık sık diyenler %22,5 ve her zaman yapamayacağını d ş nenler de %4,3’d r. Madde 6’da %9,1 oranındaki katılımcı her zaman yanıtını vererek sınıfta kanıtların yapılışını anlamadıklarında sorular sorduklarını belirtmişlerdir. Bunun yanı sıra sık sık soru soranlar %17,7, bazen soru soranlar %29,9, nadiren soru soran %33,7 ve asla soru sormayanlar da %9,6’dır. Madde 7 ters g r ş içeren maddelerden biridir ve katılımcılara “Kanıt yaparken bir sonraki adımda ne yapılacağına karar vermekte zorlanırım.” ifadesi ile y neltilmiştir. Kanıt yaparken bir sonraki adıma karar vermekte asla zorlanmayanlar sadece %1,1 iken nadiren zorlananlar %21,9, bazen zorlananlar %58,3, sık sık zorlananlar %18,2 ve her zaman zorlananlar da %0,5’dir. Madde 12 bireylerin kanıtı kendi başlarına yapıp yapamayacakları ile ilgili bir maddedir. Katılımcılardan %4,8’i kanıtı her zaman kendi başına yapabileceğine inanırken %1,6’sı da asla yapamayacağına inanmaktadır. Bunun yanı sıra katılımcıların %32,1’i sık sık, % 48,7’sı bazen ve %12,8’i de nadiren yapabileceklerine inanmaktadırlar. Katılımcıların %14,4’ madde 20’ye her zaman yanıtını vererek matematiksel kanıt yapmayı sevdiklerini belirtmişlerdir. Bunun yanı sıra katılımcıların %6,4’ asla kanıt yapmayı sevmemektedirler. Ayrıca %17,7’si nadiren, %34,8’i bazen ve %26,7’si de sık sık kanıt yapmayı sevmektedirler. Bir diğer ters g r ş içeren madde de 23’d r. Katılımcıların %8’i sınıfta kanıt yapılırken asla soru sormakta zorlanmazken nadiren zorlananlar %16,6 ve bazen zorlananlar da %34,8’dir. Ayrıca sık sık soru sormakta zorlananlar %31,5 ve her zaman zorlananlar da %9,1’dir. G r ld ğ zere farklı sınıf seviyelerinden çalışmaya katılan ğretmen adaylarının kanıt konusunda kendilerine g ven ile ilgili d ş nceleri nadiren, bazen ve sık sık kategorilerinde yoğunlaşmaktadır.

Tablo 11. Öğretmen adaylarının kanıta y nelik zdeğerlendirmelerine ait frekans ve y zde değerleri

| S. K. | Madde 9 | | Madde 15 | | Madde 19 | | Madde 21 | | Madde 22 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % |
| **1** | 1 | 0,5 | 1 | 0,5 | 1 | 0,5 | 0 | 0 | 6 | 3,2 |
| **2** | 24 | 12,8 | 7 | 3,7 | 13 | 7 | 19 | 10,2 | 25 | 13,3 |
| **3** | 48 | 25,7 | 22 | 11,7 | 58 | 31 | 28 | 15 | 80 | 42,8 |
| **4** | 84 | 44,9 | 75 | 40,1 | 83 | 44,4 | 99 | 52,9 | 63 | 33,7 |
| **5** | 30 | 16,1 | 73 | 39 | 32 | 17,1 | 41 | 21,9 | 13 | 7 |
| **T.** | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 |

Tabloda kullanılan kısaltmalar: S.K.: Seçilen Kategori, T.: Toplam

Tablo 11'de ilk ğretim matematik ğretmeni adaylarının kanıta y nelik zdeğerlendirmelerine ait frekans ve y zde değerleri yer almaktadır. Özdeğerlendirmede bireylerin kanıta y nelik olarak çalışma biçimlerini, yani kanıt yaparken kendilerinin nasıl bir yol izleyeceği g r lmeye çalışılmaktadır. Ölçekte yer alan 9. madde "Kanıt yapmaya başladıktan sonra zorlanırsam farklı yolları d ş nmek için kendime zaman tanırım." biçiminde katılımcılara y neltilmiştir. Kanıt yapmakta zorlandığında kendine asla zaman tanımayanlar %0,5 iken nadiren zaman tanıyanlar %12,8'dir. Bunun yanı sıra bu maddeye her zaman diyenler %16,1, sık sık şeklinde yanıtlayanlar %44,9 ve bazen olarak ifade edenler de %25,7'dir. Madde 15'e her zaman (%39) yanıtını veren katılımcılar kanıt yapmanın mantıksal d ş nmelerini geliştirdiğini d ş nmektedirler. Kanıt yapmanın mantıksal d ş nmeyi sık sık geliştirdiğini d ş nenler %40,1 ve bazen geliştirdiğini d ş nenler de %11,7'dir. Bunun yanı sıra %0,5 gibi bir katılımcı kanıtın mantıksal d ş nmeye etkisi olmadığını d ş n rken %3,7'si de nadiren etkili olduğunu d ş nmektedir. Bireyin zdeğerlendirmesine y nelik olarak hazırlanan bir diğer ifade de madde 19'dur ve bu madde lçekte "Kanıtı yapmaya başlamadan nce kullanılabilecek farklı y ntemleri d ş n r m." biçiminde yer almaktadır. Katılımcıların çok azı kanıta başlamadan nce farklı yolları d ş nmediklerini asla (%0,5) seçeneğini işaretleyerek belirtmişlerdir. Nadiren de olsa farklı y ntemleri d ş nenler %7 iken bazen d ş nenler de %31'dir. Bunun yanı sıra katılımcıların %44,4' sık sık farklı yollar d ş n rken %17,1'i de her zaman farklı yollar d ş nmektedirler. Ölçekte yer alan 21. madde "Kanıtı yapmaya başladığımda bir s re tek başıma çalışırım. Sonra eğer işin içinden çıkamazsam yardım isterim." olarak katılımcılara y neltilmiştir. Bu maddeye asla diyen katılımcı olmamıştır. Bu da katılımcıların hepsinin zorlandıklarında yardım istediklerini g stermektedir. Bu nedenle de nadiren (%10,2) ve bazen (%15) yardım istediğini belirten katılımcılar olmuştur. Bunun yanı sıra katılımcıların b y k bir çoğunluğu (%52,9) sık sık yardım isterken %21,9'u da her zaman yardım istediklerini belirtmişlerdir. Ölçekte zdeğerlendirmeye y nelik olarak yer alan son madde katılımcılara "Kanıtı yapmakta zorlandığımda başka bir yaklaşımla sonuçlandırmaya çalışırım." Biçiminde sunulmuştur. Zorlandığında her zaman başka bir yaklaşımla sonuçlandırmaya çalışanlar %7 iken asla başka bir yaklaşımla sonuçlandırmaya çalışmayanlar da %3,2'dir. Bunun yanı sıra bu maddeye katılımcıların %13,3' nadiren, %42,8'i bazen ve %33,7 'si de sık sık yanıtını vermişlerdir. Sonuç olarak katılımcıların zdeğerlendirmeye y nelik yanıtları genellikle bazen, sık sık ve her zaman kategorilerinde yoğunlaşmaktadır.

Tablo 12. Öğretmen adaylarının kanıta y nelik tutum-inançlarına ait frekans ve y zde değerleri

| S.K | Madde 5 | | Madde 8 | | Madde 10 | | Madde 11 | | Madde13 | | Madde 14 | | Madde 26 | | Madde 27 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % |
| **1** | 16 | 8,6 | 10 | 5,4 | 4 | 2,1 | 4 | 2,1 | 5 | 2,7 | 2 | 1,1 | 0 | 0 | 3 | 1,6 |
| **2** | 40 | 21,3 | 26 | 13,9 | 40 | 21,3 | 40 | 21,3 | 17 | 9,1 | 9 | 4,8 | 6 | 3,2 | 21 | 11,2 |
| **3** | 48 | 25,7 | 61 | 32,6 | 55 | 29,4 | 75 | 40,1 | 39 | 20,8 | 30 | 16,1 | 36 | 19,2 | 60 | 32,1 |
| **4** | 38 | 20,3 | 72 | 38,5 | 44 | 23,6 | 53 | 28,5 | 74 | 39,5 | 87 | 46,5 | 33 | 17,7 | 84 | 44,9 |
| **5** | 45 | 24,1 | 18 | 9,6 | 44 | 23,6 | 15 | 8 | 52 | 27,9 | 59 | 31,5 | 112 | 59,9 | 19 | 10,2 |
| **T.** | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 | 187 | 100 |

Tabloda kullanılan kısaltmalar: S.K.: Seçilen Kategori, T.: Toplam

Tablo 12'de ilk ğretim matematik ğretmeni adaylarının kanıta y nelik lçeğin son fakt r olan tutum-inanca dair verdikleri yanıtların frekans ve y zde değerleri yer almaktadır. Tutum-inanç fakt r bireylerin kişisel zelliklerini, bir probleme nasıl baktıklarını ve akranlarıyla nasıl çalıştıklarını içermesinin yanı sıra duygularını da içermektedir. Ölçekteki ilk tutum-inanç maddesi olan 5. madde ters g r ş içeren maddelerden biridir. Bu madde "Kanıt yapma uygulamaları problem ç zme becerilerimi geliştirmeme yardımcı olmuyor." biçiminde ifade edilmiştir. Bu maddeye asla diyen katılımcılar (%8,6) kanıt yapmanın problem ç zme becerilerini geliştirdiğini ifade ederken her zaman seçeneğini işaretleyen katılımcılar (%24,1) ise kanıt yapmanın problem ç zme becerilerini geliştirmediğini ifade etmişlerdir. Bunun yanı sıra bu maddeyi katlımcıların %21,3' nadiren, %25,7'si bazen ve %20,3' de sık sık biçiminde işaretlemişlerdir. Tutum-inanç içeren bir diğer madde de yine ters g r ş belirtmektedir ve "Kanıt yaparken başkalarından yardım almam." şeklinde 8. madde olarak y neltilmiştir. Bu maddeye asla yanıtını veren katılımcılar (%5,4) kanıt yaparken başkalarından yardım almazken her zaman (%9,6) diyenler yardım alanlardır. Bu maddeye katılımcıların %13,9'u nadiren, %32,6'sı bazen ve %38,5'i de sık sık biçiminde yanıtlamışlardır. Tutum-inanç boyutunda ters g r ş içeren diğer bir madde de 10. maddedir. Bu madde lçekte "Kanıt sadece zel durumları doğrulamakta kullanılır." biçiminde yer almaktadır. Kanıtın sadece zel durumları doğruladığını kabul ederek her zaman kategorisini seçen katılımcılar %23,6 ve kabul etmeyerek asla kategorisini seçenler de %2,1'dir. Bu maddeye sık sık diyen katılımcılar %23,6, bazen diyenler %29,4 ve nadiren diyenler de %21,3'd r. Madde 11 katılımcıların kanıt yapmaya karar verince tek başlarına çalışıp-çalışmadıkları ile ilgili bir maddedir. Katılımcıların %8'i her zaman kanıt yapmaya karar verince tek başına çalışırken %2,1'i asla seçeneğini işaretleyerek tek başına çalışmadığını belirtmiştir. Bunun yanı sıra %21,3' nadiren, %40,1'i bazen ve %28,5'i de sık sık tek başına çalıştığını belirtmiştir. Madde 13 yine ters g r ş içeren maddelerden biridir. Bu madde katılımcılara "Kanıtı bitirdikten sonra yaptıklarımı tekrar kontrol etmeye gerek duymam." biçiminde y neltilmiştir. Katılımcıların %27,9'u bu maddeye her zaman diyerek yaptıklarını kontrol etmediğini belirtirken %2,7'si de asla diyerek kontrol ettiğini belirtmiştir. Bu maddeye katılımcıların %9,1'i nadiren, %20,8'i bazen ve %39,5'i de sık sık yanıtını vermişlerdir. Ond rd nc madde kanıta bir durum ile başlanıp bir karar ile bitirildiği y n nde bir maddedir. Bu d ş ncenin her zaman doğru olduğunu d ş nenler %31,5, sık sık doğru olduğunu d ş nenler %46,5 ve bazen doğru olduğunu d ş nenler ise %16,1'dir. Bunun yanı sıra bu d ş nceye asla katılmayanlar %1,1 ve nadiren bu d ş nce de olanlar da %4,8'dir. Ters g r ş içeren maddelerden biri olan madde 26'ya g re katılımcıların %59,9'u kanıt yapmanın tek yolunun t mevarım olduğunu d ş nmektedirler. Sık sık bu d ş ncede olanlar %17,7, bazen diyenler %19,2 ve nadiren diyenler de %3,2'dir. Bunun yanı sıra kanıt yapmanın tek yolunun t mevarım olduğunu belirten maddeye kimse asla dememiştir. Bu da g steriyor ki çoğunluğu t mevarımı tek kanıt yapma yolu olarak g rmektedirler. Ölçeğin ve tutum-inanç fakt r n n son maddesi olan 27. madde "Kanıt yaparken d ş ncelerimi arkadaşlarımla paylaşırım." şeklinde lçekteki yerini almıştır. Buna g re asla d ş ncesini asla paylaşmayan %1,6'lık bir katılımcı varken nadiren paylaşanlar %11,2 ve bazen paylaşanlar da %32,1'dir. Ayrıca katılımcılardan %44,9'u d ş ncelerini sık sık paylaşırken sadece %10,2'si her zaman paylaşmaktadır. Sonuç olarak kanıta y nelik tutum-inanca dair maddelere katılımcıların verdikleri yanıtlar ağırlıklı olarak bazen, sık sık ve her zaman aralığında yığılmaktadır.

### 3.1.2. İlk ğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının ve Farklı Sınıf Seviyelerinden Öğretmen Adaylarının Ölçekte Yer Alan Açık Uçlu Sorulara Verdikleri Yanıtlara Ait Bulgular

Hazırlanmış olan “Matematiksel Kanıt Yapmaya Y nelik G r ş Ölçeği” farklı sınıf seviyelerinden toplam 187 ilk ğretim matematik ğretmeni adayına uygulanmıştır. Bu lçek 5’li likert tarzı maddelerin yanı sıra 3 tane de açık uçlu soru içermektedir. Ölçekte yer alan açık uçlu sorular yardımıyla katılımcıların matematiksel kanıtın matematik ğrenmedeki rol hakkında ne d ş nd kleri, hangi durumlarda matematiksel kanıt yaptıkları ve matematiksel kanıt yaparken nelere ihtiyaç duydukları g r lmeyi çalışılmıştır. Buna bağlı olarak lçekten elde edilen veriler doğrultusunda ğretmen adaylarının sahip oldukları kanıta dair g r şlerini belirlemek zere lçekte kullanılan ifadeler doğrultusunda temalar (matematiksel kanıtın matematik ğrenmedeki rol , matematiksel kanıt yapılan durumlar, matematiksel kanıt yapılırken gereksinim duyulanlar) belirlenmiş ve bu temalar doğrultusunda da kodlamalar yapılarak tablolar halinde aktarılmıştır. Bu tablolarda her bir sınıf seviyesi için kodların frekansları belirlenmiştir. Zaman zaman da ğretmen adaylarının sorulara yanıtlarından doğrudan alıntılara yer verilmiştir. Buna bağlı olarak çalışmanın bu kısmında ç temaya g re elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

#### 3.1.2.1. İlk ğretim Matematik Öğretmeni Adaylarına ve Farklı Sınıf Seviyelerindeki Öğretmen Adaylarına G re Matematiksel Kanıtın Matematik Öğrenmedeki Rol

Farklı sınıf seviyelerinden çalışmaya katılan ilk ğretim matematik ğretmeni adaylarına y neltilen açık uçlu sorulardan biri “Sizce matematiksel kanıtın matematik ğrenmedeki rol nedir?” şeklinde lçekte yer almaktadır. Y neltilen bu soru ile ğretmen adaylarının matematiksel kanıtın matematik ğrenmedeki rol hakkındaki d ş nceleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Buna bağlı olarak da ğretmen adaylarının ifadeleri aşağıdaki kodlar doğrultusunda tabloya yerleştirilmiş ve bu kodlara g re her sınıf seviyesinin kodlara ait frekansları verilmiştir.

Tablo 13. Farklı sınıf seviyelerindeki ilk ğretim matematik ğretmeni adaylarının matematiksel kanıtın matematik ğrenmedeki rol ne ilişkin g r şleri

| Tema | Kodlar | 1.sınıf | 2.sınıf | 3.sınıf | 4.sınıf |
|---|---|---|---|---|---|
| Matematiksel Kanıtın Matematik Öğrenmedeki Rol | İşlemlerin nasıl ve neden yapıldığını anlamayı sağlar | 22 | 8 | 14 | 6 |
| | Genel yargılara ulaşmayı sağlar | 1 | 2 | - | - |
| | Anlamayı sağlar | 4 | 4 | - | 2 |
| | Matematiksel d ş nmeyi sağlar | 17 | 10 | 7 | 4 |
| | Ufkun genişlemesini sağlar | 6 | - | 1 | - |
| | Farklı açıdan bakmayı sağlar | 8 | 5 | 1 | 2 |
| | Matematiksel mantık y r tmeyi sağlar | 4 | 4 | - | 3 |
| | Kalıcı, etkili ve anlamlı ğrenme sağlar | 23 | 10 | 11 | 18 |
| | Ezberlememeyi sağlar | 21 | 6 | 8 | 9 |
| | Bilgiyi geliştirmeyi sağlar | 7 | - | 6 | 2 |
| | Matematiğin zevkli olmasını sağlar | 1 | - | 3 | 1 |
| | Öğrenmeyi kolaylaştırır | 17 | 15 | 5 | 14 |
| | Öğrendiklerini kullanmayı sağlar | 2 | - | 3 | 2 |
| | Kanıtlar matematiğin z d r, matematikte baş rol, oyuncusudur, matematiğin temelidir | 9 | 2 | 2 | - |
| | Doğrulama yapmayı sağlar | 3 | - | - | - |
| | İkna olmayı sağlar | 2 | - | - | - |
| | Matematiksel ifadeleri tanımlamayı sağlar | 1 | - | - | 2 |
| | Öğrenmeye karşı ilgiyi artırır | 1 | 1 | 2 | - |
| | Kanıtların matematik ğrenmede rol yoktur | 2 | - | - | 2 |
| | Matematiksel kavramlar arasında ilişki kurmayı sağlar | - | 2 | 4 | - |
| | Sorgulama becerisini geliştirir | 1 | 2 | 4 | 2 |
| | Neden sonuç ilişkisi kurmayı sağlar | - | - | 4 | 4 |
| | Kavramsal ğrenmeyi sağlar | - | - | 6 | - |
| | Soyut d ş nme becerisini geliştirir | - | - | 1 | - |
| | Problem ç zme becerisini geliştirir | - | 1 | 1 | 1 |
| | Bilgiyi transfer etmeyi sağlar | - | - | 1 | - |
| | Matematiksel dili kullanmayı sağlar ve geliştirir | - | - | 2 | - |
| | İşlem yapma becerisini geliştirir | - | - | 1 | - |
| | Zihinsel becerileri geliştirir | - | - | - | 5 |
| | Somutlaştırmayı sağlar | - | - | - | 6 |
| | Yorumlamayı, yaratıcı d ş nmeyi geliştirir | - | - | - | 3 |
| | Akıl y r tme becerisini geliştirir | - | - | - | 4 |
| | Araştırma yapmayı sağlar | - | - | - | 1 |

Tablo 13'de ğretmen adaylarının matematiksel kanıtın matematik ğrenmedeki rol ne ilişkin g r şleri yer almaktadır. Bu tema altında b t n sınıf seviyelerindeki ğretmen adaylarının en çok ifade ettikleri matematiksel kanıtın kalıcı, anlamlı ve etkili ğrenme sağladığıdır. Bunun yanı sıra ğrenmeyi kolaylaştırdığını, matematiksel d ş nmeyi sağladığını, ezberlememeyi sağladığını ve matematiksel kavramlar arasında ilişki kurmayı sağladığını vurgulamışlardır. Ayrıca nasıl, neden, niçin sorularını yanıtladığını ve işlenenlerin nasıl ve neden yapıldığını anlamayı sağladığını belirtmişlerdir. Farklı sınıf seviyelerindeki ğretmen adaylarının matematiksel kanıtın matematik ğrenmedeki rol ile ilgili d ş nceleri ise bazı değişiklikler g stermektedir.

Birinci sınıfların en çok belirttikleri g r ş matematiksel kanıtın matematik ğrenmede işlemlerin nasıl ve neden yapıldığını anlamayı sağladığı, matematiksel d ş nmeyi sağladığı, kalıcı, etkili ve anlamlı ğrenmeyi sağladığı, ezberlememeyi sağladığı ve ğrenmeyi kolaylaştırdığı y n ndedir. Bu g r şlerinden "Yaptığımız işlemlerin nasıl, neden yapıldığını anlamamızı sağlar." ve "Matematiksel d ş nmemizi sağlıyor. Ufkumuz genişliyor ve sorulara farklı açıdan bakmamıza sebep oluyor." şeklinde ifade etmişlerdir. Ezberlememeyi sağladığı y n ndeki g r şlerini ise "Verilen bir bilginin nereden geldiğini ğrendiğimizde o bilgi akılda kalır. Ezber yapmamış oluruz." eklinde belirtirken bir başka katılımcı;

> "Matematiksel kanıt sağlam bir şekilde ğrenmek için ortam hazırlar. Kanıt olmadığı takdirde ğrenmek biraz ezbere dayalı olur. Kalıcılık ve bilgiyi geliştirme fazla sağlanamaz."

Biçiminde açıklamasını belirtmiştir. Bir diğer katılımcı ise d ş ncesini "Matematiksel kanıt, matematiğin daha rahat ğrenilmesine, daha rahat kavranılmasına, konunun mantığını anlamada etkilidir." diyerek de ğrenmeyi kolaylaştırdığını vurgulamışlardır. Bunun yanı sıra bilgilerin kaynağını bilmenin derinlemesine ğrenmeyi sağladığını katılımcılardan birisi;

> "Matematiksel kanıt elimizdeki verilerin nereden geldiğini bilerek etkili ve derinlemesine eğitim ortamı sağlıyor. Kanıtlanmış birşeye olan ilgi artıyor. Yani ispat bize yaptığımız şeyin doğru olup-olmadığı hakkında g ven sağlıyor. Matematiksel kanıt sayesinde biz y zeysel ğrenmenin n ne geçmiş oluruz."

Şeklinde yukarıdaki biçimde ifade etmiştir.Ayrıca Tablo 13'de yer alan fakat birinci sınıfların belirtmedikleri g r şler bulunmasının yanı sıra birkaç kişinin katıldığı g r şlerde bulunmaktadır.

İkinci sınıfların en çok belirttikleri g r şler matematiksel kanıtın ğrenmeyi kolaylaştırdığı, matematiksel d ş nmeyi sağladığı, işlemlerin nasıl ve neden yapıldığını anlamayı sağladığının yanı sıra kalıcı, etkili ve anlamlı ğrenme sağladığı ve bunların sonucunda da ezberlememeyi sağladığı y n nde olmuştur. Bu g r şlerini de ğretmen adaylarından birisi;

"Matematiksel d ş nmemizi sağlar. Eğer gerçekten yapılan kanıt ğrenildiyse yani verilen teorem ğrenilerek ispatlandıysa bir daha unutulmayacağını d ş n yorum. Bu sayede neyin nerden geldiğini biliriz ve bu bildiklerimizden yola çıkarak bir takım çıkarımlarda, genellemelerde bulunabiliriz. Bu da matematik ğrenmemizi hem kolaylaştırır hem de matematiği ğretmiş oluruz."

Şeklinde açıklamasını yapmıştır. Bu katılımcının yanı sıra ikinci sınıflardan başka bir katılımcı "Matematikte aslında daha nceden bildiklerimizin neden yle olduğunu anlamamız sağlanır. Nedenleriyle birlikte ğrendiklerimiz bizim için daha kalıcı olur." şeklinde belirtirken bir diğeri de "Çocuklara s rekli ezber olarak verilen kuralların, form llerin ispatlanarak verilmesi bu kuralların nereden-nasıl geldiğinin bilinmesi ğrenmede daha etkili oluyor bence." diyerek matematiksel kanıtın ğrenmedeki rol n ifade etmiştir. Ayrıca başka bir katılımcı da "Matematiğin ne olduğunu, z nde ne anlatmak istediğini anlamamızı sağlar. Matematiksel d ş nme g c m z artırır." şeklinde matematiksel kanıtın ğrenmedeki yerini açıklamıştır. Bu s reçte ikinci sınıfların hiç katılmadıkları veya çok azının katıldığı g r şlerde olmuştur.

Üç nc sınıflarda matematiksel kanıtın matematiksel d ş nmenin yanı sıra kalıcı, etkili ve anlamlı ğrenme sağladığını belirtmişlerdir. Ayrıca en çok bildirilen g r ş işlemlerin nasıl ve neden yapıldığını anlamayı sağlar olurken birinci ve ikinci sınıflardan farklı olarak kavramsal ğrenmeyi ve bilgiyi geliştirmeyi sağladığı da vurgulanmıştır.

Üç nc sınıflardan bir ğretmen adayı;

"Matematiksel bir bilgiyi kullanmaktan çok onun nasıl oluştuğunu, hangi nedenlerden dolayı doğru olduğunu, nerden geldiğini bilmek daha nemlidir. Ç nk sonucu bilmek değil yolu g rmek matematiksel d ş nmeyi geliştirir. Bence zaten asıl matematik birkaç form l kullanarak (neden yle olduğunu bilmeden) bazı sonuçlar elde etmek değil, olayların neden-sonuç ilişkisini kavrayarak d ş nerek matematiksel kanıta gidilmesidir. Herhangi bir olayın kanıtlanması akılda daha kalıcı olur ve diğer kanıtlara ulaşmakta yardımcı olur. Matematikte d ş nme tarzını oluşturur bireyde."

Şeklinde g r ş n belirterek bir bilginin nedenini bilmenin nemini dile getirmiştir. Başka bir ğretmen adayı ise "Matematiksel kanıt ğrencilerin matematiksel d ş nmesini geliştirir. Farklı matematiksel kavramlar arasında ilişki kurabilme yeteneği gelişir." diyerek ğrenmedeki nemini vurgularken bir diğer katılımcı da "Matematikte kavramsal ğrenmeyi sağlamak için matematiksel kanıt nemlidir. En b y k rol budur." şeklinde g r ş n belirtmiştir. Bir diğer katılımcı ise matematiksel kanıtların matematiği nasıl zevkli bir hale getireceğini;

"Matematiksel kanıt yapılırken kullanılanmatematiksel bilgiler daha sonra ulaşılan matematiksel bilgiler için bir zemin hazırlamaktadır. Bir durum ile ilgili matematiksel kanıtı gerçekleştiren ğrencinin matematiğe karşı olan ilgisini artırmanın yanında matematiğin zevkli ve meraklandırıcı y n yle tanışmasını sağlar. Ayrıca ğrencinin karşılaştığı birçok matematiksel durum karşısında sorgulayıcı bir tavır takınmasını ve ezbere  ğrenilen bilgilerin engellenmesine yardımcı olur.”

Şeklinde yazarak ifade etmiştir. B ylece  ğretmen adayları matematiksel kanıtın  ğrenmedeki rol n kendilerince açıklamışlardır. Fakat  ç nc  sınıfların da katılmadıkları veya çok az katıldıkları g r şler bulunmaktadır.

D rd nc  sınıftaki katılımcıların en çok belirttikleri g r ş matematiksel kanıtın kalıcı, etkili ve anlamlı  ğrenme sağlamasının yanı sıra  ğrenmeyi kolaylaştırdığıdır. Bunun yanı sıra diğer açıklamaları da işlemlerin nasıl ve neden yapıldığını anlamayı sağlaması, ezberlememeyi sağlaması ve diğer sınıf seviyelerinden farklı olarak zihinsel becerileri geliştirmesi, akıl y r tmeyi geliştirmesi ve somutlaştırmayı sağlamasıdır.

D rd nc  sınıfa devam etmekte olan  ğretmen adayları matematiksel kanıtın matematik  ğrenmedeki rol n “Anlamlı  ğrenmeyi sağlar, ezberi  nler. Neyin nerden geldiğini g rmemizi sağlar. Bilginin sadece teorikte kalmasını engeller.”, “Problem ç zme becerisini geliştirir. Bilimsel d ş n r. Birşeyle karşılaştığı zaman sebep-sonuç bulmaya çalışır. Hayata sorgulayıcı bakar. Araştırmacı olur.” veya “Matematiksel ispat y ntemlerini kullanmak, bilişsel s reçleri harekete geçireceğinden zihinsel faaliyetlerin  st d zey olmasını sağlar. Bu da matematik  ğrenmeyi kolaylaştırır.” şeklinde ifade etmişlerdir. Bunun yanı sıra diğer sınıf seviyelerinden farklı olan g r şlerini de “Zihinsel beceriler gelişir. Neden-sonuç ilişkisi kurulur.”, “Kalıcılığı arttıracağını d ş n yorum. Matematiksel problemleri somutlaştırarak anlamayı kolaylaştırır.” ve “Soyut konuları somutlaştırmaya yardımcı olur. Anlamayı kolaylaştırır. Yaratıcı d ş nmeyi sağlar.” biçiminde belirtmişlerdir. Bunun yanı sıra tabloda yer alan ve d rd nc  sınıfların belirtmedikleri g r şler de bulunmaktadır.

#### 3.1.2.2. İlk ğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının ve Farklı Sınıf Seviyelerinden Öğretmen Adaylarının Matematiksel Kanıt Yapmaya İhtiyaç Duydukları Durumlar

Farklı sınıf seviyelerinden çalışmaya katılan ilk ğretim matematik  ğretmeni adaylarına y neltilen açık uçlu sorulardan ikincisi “Ne zaman ve hangi durumda/durumlarda matematiksel kanıt yapmaya ihtiyaç duyarsınız?” şeklinde  lçekte yer almaktadır. Y neltilen bu soru ile  ğretmen adaylarının matematiksel kanıt yapmaya ihtiyaç duydukları durumlar hakkındaki d ş nceleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Buna bağlı olarak da  ğretmen adaylarının ifadeleri aşağıdaki kodlar doğrultusunda tabloya aktarılmış ve bu kodlara g  re her sınıf seviyesinin kodlara ait frekansları verilmiştir.

Tablo 14. Farklı sınıf seviyelerindeki ilk ğretim matematik  ğretmeni adaylarının matematiksel kanıt yapmaya gereksinim duydukları durumlara ilişkin g  r  şleri

| **Tema** | **Kodlar** | **1.sınıf** | **2.sınıf** | **3.sınıf** | **4.sınıf** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Matematiksel Kanıt Yapılan Durumlar** | Sınava hazırlanırken ve sınavda | 19 | 14 | 7 | 3 |
| | Ödevde | 6 | 1 | - | - |
| | Üniversite s  resince | 1 | 1 | - | - |
| | İstenildiğinde | 6 | 2 | 2 | 7 |
| | İkna etmekte | 4 | - | - | 1 |
| | Derste | 7 | 7 | 6 | 2 |
| | Doğrulamada | 3 | 2 | 3 | 1 |
| | Ders anlatırken | 3 | | 2 | |
| | Doğru ya da yanlış olduğundan emin olunmayan durumlarda | 16 | 2 | 6 | 10 |
| | Hiç ihtiyaç duymadım | 2 | 1 | 1 | 4 |
| | Teoremin kanıtında | 10 | 5 | 4 | - |
| | Anlaşılmayan durumlarda, konularda | 6 | 5 | 4 | 6 |
| | Unutulan bilgiyi hatırlamada | 2 | - | 1 | 1 |
| | Kural, form  l,   zellik vs. unutunca | 2 | 6 | 8 | 4 |
| | Mantıklı gelmeyen ifadelerde | 3 | - | - | 2 |
| | Nasıl ve nedenleri g  rmede | 2 | - | 6 | 1 |
| | Merak edilen bir konuda | 7 | 1 | 2 | 7 |
| | Yeni y  ntemler   ğrenmede | 2 | - | - | 2 |
| | Farklı d  ş  nme yolları geliştirmede | 3 | 1 | - | - |
| | Arkadaşlarla yapılan matematiksel sohbetlerde | 3 | - | 1 | - |
| | Problem ç  zmede | 1 | 4 | 2 | 3 |
| | Çelişkili durumlarda | 2 | - | - | - |
| | Kuşku duyunca | 1 | 2 | - | 4 |
| | G  venirliği artırmada | - | 1 | - | - |
| | Ders çalışırken | - | 1 | - | 1 |
| | Araştırmalarda | - | 1 | - | - |
| | Genellemede | - | - | 3 | - |
| | G  nl  k hayatta bir sorunu ç  zmede | - | - | 1 | - |
| | Geometride | - | - | - | 1 |

Tablo 14'de ilk ğretim matematik  ğretmeni adaylarının hangi durumlarda kanıt yapmaya ihtiyaç duyduklarına dair sınıf seviyelerine g  re kodlar ve frekanslar bulunmaktadır. Bakıldığında  ğretmen adayları matematiksel kanıt yapmaya en çok derste, sınava hazırlanırken ve sınavda, doğru ya da yanlış olduğundan emin olunmayan durumlarda, anlaşılmayan durumlarda, konularda ve kural, form  l,   zellik vs. unutunca gereksinim duymaktadırlar. Farklı sınıf seviyelerindeki  ğretmen adaylarının matematiksel kanıta ihtiyaç duydukları zamanlar ile ilgili d ş nceleri bazı değişiklikler g stermektedir.

Birinci sınıfların kanıt yapmaya ihtiyaç duydukları zamanlar; sınava hazırlanırken ve sınavda, derste,  devde, istenildiğinde, doğru ya da yanlış olduğundan emin olunmayan durumlarda, teoremin kanıtında, anlaşılmayan durumlarda, konularda ve merak edilen bir konuda olarak katılımcılar tarafından vurgulanmıştır.

İkinci sınıflarda ise en çok matematiksel kanıt yapmaya ihtiyaç duyulan durumların; sınava hazırlanırken ve sınavda, derste, teoremin kanıtında, anlaşılmayan durumlarda, konularda, kural, form l,  zellik vs. unutunca ve problem ç zmede olduğu ortaya çıkmıştır. Bu s reçte birinci sınıflar ile ikinci sınıfların matematiksel kanıtları kullandıkları durumlar bazı farklılıklar g stermektedir. Örneğin; birinci sınıflar kanıtları bir durumun doğru ya da yanlış olduğundan emin olunmayan durumlarda ikinci sınıflara g re oldukça fazla kullanmaktadırlar.

Üç nc  sınıflara bakıldığında matematiksel kanıtları kullandıkları durumların; sınava hazırlanırken ve sınavda, derste, doğru ya da yanlış olduğundan emin olunmayan durumlarda, kural, form l,  zellik vs. unutunca ve nasıl ve nedenleri g rmede olduğu g r lmektedir.

D rd nc  sınıfların ise istenildiğinde, doğru ya da yanlış olduğundan emin olunmayan durumlarda, merak edilen bir konuda, anlaşılmayan durumlarda, konularda ve kuşku duyunca matematiksel kanıtı kullandıkları g r lmektedir. Bunun yanı sıra matematiksel kanıt yapmaya hiç ihtiyaç duymayanlarda d rd nc  sınıfta diğer sınıf seviyelerine g re daha fazladır.

#### 3.1.2.3. İlk ğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının ve Farklı Sınıf Seviyelerinden Öğretmen Adaylarının Matematiksel Kanıt Yaparken Gereksinim Duydukları

Çalışmaya katılan ilk ğretim matematik  ğretmeni adaylarına y neltilen açık uçlu sorulardan sonuncusu “Matematiksel kanıt yaparken neye/nelere gereksinim duyarsınız?” şeklinde  lçekte yer almaktadır. Bu soru ile  ğretmen adaylarının matematiksel kanıtı yaparken neyi/neleri kullandıkları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Buna bağlı olarak da  ğretmen adaylarının ifadeleri aşağıdaki kodlar doğrultusunda tabloya aktarılarak bunlara g re her sınıf seviyesinin kodlara ait frekansları verilmiştir.

Tablo 15. Farklı sınıf seviyelerindeki ilk ğretim matematik ğretmeni adaylarının matematiksel kanıt yaparken gereksinim duyduklarına ilişkin g r şleri

| Tema | Kodlar | 1.sınıf | 2.sınıf | 3.sınıf | 4.sınıf |
|---|---|---|---|---|---|
| Matematiksel Kanıt Yapılırken Gereksinim Duyulanlar | Tanıma/Tanımlara | 10 | 5 | 14 | 16 |
| | Teoreme/Teoremlere | 20 | 10 | 19 | 17 |
| | Aksiyoma/Aksiyomlara | 15 | 3 | 5 | 4 |
| | İşaret ve sembollere | 1 | 1 | 1 | - |
| | Kağıda, işlem yapmaya | 2 | - | - | 1 |
| | Zekaya, mantığa | 1 | - | - | 3 |
| | Uygun çalışma ortamına | 9 | 3 | - | - |
| | Uygun psikolojiye | 6 | 3 | - | 1 |
| | Kanıtlama y ntemlerine | 9 | 4 | 8 | 4 |
| | Önceden ç z len rneklere | 1 | 2 | 1 | 1 |
| | Önceki bilgilere | 23 | 14 | 16 | 18 |
| | Yardımcı olacak birisine | 6 | - | - | 3 |
| | Hipotezlere | 2 | 2 | - | - |
| | Verilenlere ve istenenlere | 5 | 7 | 5 | 4 |
| | Kaynaklara, kitaplara vs. | 5 | 1 | 2 | 4 |
| | H k mlere, yargılara, kabullere, genellemelere | 5 | 4 | - | - |
| | İlişkilendirmeye | 1 | - | - | - |
| | Önceki kanıtlara | 10 | 6 | 5 | 10 |
| | Özelliklere, kurallara, form llere vs. | 2 | 3 | 3 | 4 |
| | Varsayımlara | 1 | - | 1 | - |
| | Kanıt yapabilme becerisine | 1 | 1 | 2 | - |
| | Pergel, g nye ve cetvele | 1 | - | - | - |
| | Nereden başlayacağımı bilmeye | 1 | - | - | - |
| | İzleyeceğim yola | - | 4 | - | - |
| | D ş nmeye ve zamana | - | 1 | - | 1 |
| | Konuyla ilgili bilgilere | - | 11 | 4 | 1 |
| | Kendine inanç ve g vene | - | 1 | - | - |
| | Matematiksel d ş nmeye | - | - | 1 | 3 |
| | Kavramlara | - | - | 2 | 1 |
| | Hesap makinesine | - | - | 1 | - |
| | Bilgisayar yazılımlarına | - | - | 1 | - |
| | Postulatlara | - | - | - | 1 |

Tablo 15'de farklı sınıflarda ğrenimlerine devam etmekte olan ilk ğretim matematik ğretmeni adaylarının matematiksel kanıt yaparken neye/nelere gereksinim duyduklarına dair kodlar ve frekanslar her sınıf d zeyi için ayrı ayrı yer almaktadır. Tabloya g re ğretmen adaylarının en çok ihtiyaç duyduklarının tanım, teorem, aksiyom, kanıt y ntemleri, nceki bilgiler, nceki kanıtlar, verilenler-istenenler ve zellikler, kurallar, form ller vs. olduğu g r lmektedir. Matematiksel kanıt yaparken farklı sınıf seviyelerinin ihtiyaç duydukları sınıflara g re b y k bir farklılık g stermemekle birlikte bazı değişiklikler de yer almaktadır. Örneğin; birinci ve ikinci sınıflar bu g r şlere ek olarak uygun çalışma ortamına ve uygun psikolojiye ihtiyaçları olduğunu belirtirken ç nc ve d rd nc sınıflar b yle bir g r ş belirtmemişlerdir. Bunun yanı sıra birinci sınıflar konuyla ilgili bilgiye ihtiyaç duymazken diğer sınıf seviyeleri ve zellikle de ikinci sınıflar gerek duymaktadırlar.

### 3.2. İlk ğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Fonksiyonlar Konusunda Kullandıkları Kanıt Şemaları ve Kanıt Şemalarının Farklı Sınıf Seviyelerine G re Değişimi

Fonksiyonlar konusunda kullanılan kanıt şemaları ile ilgili bulgular şu aşamalardan geçirilerek sunulmuştur. Öncelikle ğretmen adaylarının yazılı sınavda ve klinik g r şmede verdikleri yanıtlar, yaptıkları ç z mler dışsal, deneysel, analitik ve boş olmak zere d rt kategoriye g re ayrı ayrı sınıflandırılmıştır. Daha sonra yapılan bu sınıflamalara g re ğretmen adaylarının yazılı sınavda her bir problem için frekans ve y zde dağılımları hesaplanmıştır. Bunun ardından farklı sınıf seviyelerindeki ğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir fark olup olmadığına ilişkin SPSS paket programı yardımıyla istatistiksel analizler (Kruskal Wallis H-Testi) yapılmış ve bu analizler yorumlanmıştır. Daha sonra klinik g r şmeye katılan ğretmen adaylarıyla y r t len klinik g r şmelerden elde edilen veriler ve bu katılımcıların yazılı sınav verileri dışsal, deneysel ve analitik şemalar olmak zere ç başlık altında analiz edilerek diyaloglardan doğrudan alıntılar ile sunulmuştur.

İlk ğretim matematik ğretmenliğinde ğrenimlerine devam etmekte olan ğretmen adayları ile yapılan klinik g r şmelerden ve yazılı sınavdan elde edilen verilere bakıldığında (bkz.Tablo 16.) dışsal, deneysel ve analitik şemalardan her ç n n de bulunduğu g r lmektedir. Öğretmen adayları yazılı sınavda %24 oranında problemlerin doğruluğunu açıklarken dışsal şemaları kullanmışlardır. G r şmeye katılan ğretmen adayları ise kanıtlama s recinde %26,875 dışsal şemaları kullanmışlardır. Dışsal şemaları kullanan katılımcıların çoğunluğu otorite kanıt şemasını kullanırken birkaç katılımcı da sembolik ve alışkanlık edinilmiş şemaları kullanmışlardır.Yazılı sınavda %18,2 kullanılan deneysel kanıt şemaları ise klinik g r şmelerde %31,25 kullanılmıştır. Klinik g r şmelerde kullanılan deneysel şemalarda genellikle temel rnekler kullanılırken ğrenciler sezgisel şemaları da kullanmışlardır. Hem yazılı sınavda ve hem de klinik g r şmelerde ağırlıklı olarak kullanılan şema ise analitik kanıt şemalarıdır. Yazılı sınavda %37 kullanılırken g r şmelerde %39,375 kullanılmıştır. Bu s reçte kullanılan analitik şemalarda ise aksiyomatik kanıt şemalarının yanı sıra d n şt r lebilen kanıt şemaları da tercih edilmiştir. Bunların yanı sıra yazılı sınavda problemlerin %20,8'i boş bırakılırken klinik g r şmelerde sadece %2,5'i boş bırakılmıştır. Yazılı sınavda boş bırakılan problemlerin yanında klinik g r şmelerde boş bırakılan problem sayısı ise son derece azdır. Yazılı sınavda boş bırakılan problemlerin ise b y k bir çoğunluğunun klinik g r şmelerde deneysel şemalar kullanılarak doğrulandığı s ylenebilir. Ç nk yazılı sınav ve klinik g r şmede dışsal ve deneysel şemaların kullanımı birbirine son derece yakın olmasına rağmen klinik g r şmede deneysel şemaları kullanımı artmış ve boş bırakılan problem sayısı da azalmıştır.

Tablo 16. Yazılı sınav ve klinik g r şmelerde kullanılan kanıt şemalarına ait y zde dağılımları

| Sınıflar | 1.sınıf | | 2.sınıf | | 3.sınıf | | 4.sınıf | | Toplam | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Şemalar | Y | KG | Y | KG | Y | KG | Y | KG | Y | KG |
| Dışsal | 24,25 | 25 | 25,3 | 22,5 | 23,9 | 27,5 | 23,2 | 32,5 | 24 | 26,875 |
| Deneysel | 28,25 | 35 | 15 | 40 | 16,8 | 35 | 13,6 | 15 | 18,2 | 31,25 |
| Analitik | 24,75 | 37,5 | 36,5 | 37,5 | 43,8 | 37,5 | 42,4 | 45 | 37 | 39,375 |
| Boş | 22,75 | 2,5 | 23,2 | - | 15,5 | - | 20,8 | 7,5 | 20,8 | 2,5 |
| Toplam | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |

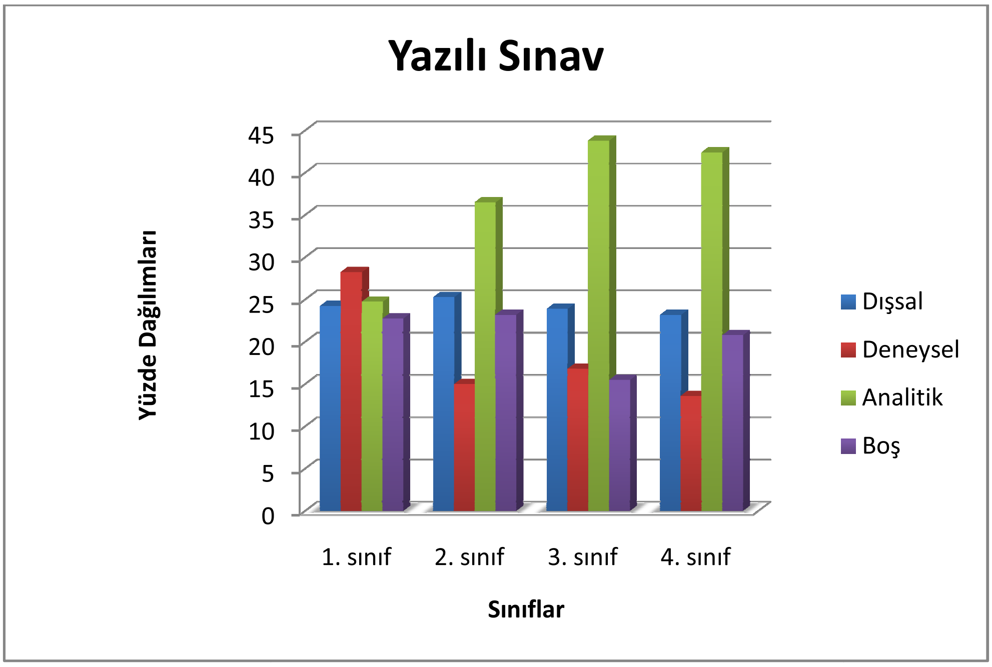
Tabloda kullanılan kısaltmalar: Y-Yazılı sınav, KG-Klinik g r şme

Yazılı sınav sonuçlarına bakıldığında ilk ğretim matematik ğretmeni adaylarının kullandıkları kanıt şemalarında bazı farklılıklar olduğu g r lmektedir (bkz. Tablo 16.). Bu farklılıklar zaman zaman kullanılan kanıt şemasına g re de değişiklik g stermektedir.

Tablo 17. Yazılı sınava ait frekans ve y zde dağılımları

| | 1. sınıf | | 2. sınıf | | 3. sınıf | | 4. sınıf | | Genel | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % |
| Dışsal | 97 | 24,25 | 86 | 25,3 | 74 | 23,9 | 123 | 23,2 | 380 | 24 |
| Deneysel | 113 | 28,25 | 51 | 15 | 52 | 16,8 | 72 | 13,6 | 288 | 18,2 |
| Analitik | 99 | 24,75 | 124 | 36,5 | 136 | 43,8 | 225 | 42,4 | 584 | 37 |
| Boş | 91 | 22,75 | 79 | 23,2 | 48 | 15,5 | 110 | 20,8 | 328 | 20,8 |
| Toplam | 400 | 100 | 340 | 100 | 310 | 100 | 530 | 100 | 1580 | 100 |

Tablo 17'de çalışmaya katılan farklı sınıf seviyelerindeki 158 ilk ğretim matematik ğretmeni adayının fonksiyonlar konusunu içeren yazılı sınavdaki 1580 problem için kullandıkları kanıt şemalarının frekans ve y  zde değerleri sınıflara g  re ayrı ayrı verilerek genel durum belirtilmiştir.




Şekil 3. Yazılı sınava ait y  zde değerlerini içeren s  tun grafik

Şekil 3'de farklı sınıf seviyelerinde  ğrenimlerine devam etmekte olan 158 ilk ğretim matematik  ğretmeni adayının yazılı sınavda kullandıkları şemaların y  zde değerlerini içeren s  tun grafikleri sınıflara g  re ayrı ayrı yer almaktadır.

Yazılı sınavlardan elde edilen verilere bakıldığında problemleri ç  zme s  recinde birinci sınıfların ağırlıklı olarak (%28,25, 113 problem) deneysel şemaları kullandıkları g  r  lmektedir (bkz. Tablo 17., Şekil 3.). Dışsal ve analitik şemalar ise birinci sınıflar tarafından hemen hemen aynı oranda (%24,25, 97 problem ve %24,75, 99 problem) kullanılmıştır. Ayrıca birinci sınıfların %22,75'inin (91 problem) yazılı sınavda boş bıraktıkları problemler olmuştur. İkinci sınıfların problemleri ç  zme s  recinde kullandıkları şemalara bakıldığında %25,3 (86 problem) dışsal, %15 (51 kişi) ve %36,5 (124 problem) analitik şemaların kullanıldığı g  r  lmektedir. Bunun yanı sıra %23,2'si de (79 problem) ikinci sınıflar tarafından boş bırakılmıştır. Üç  nc   sınıfların %23,9'u (74 problem) dışsal, %16,8'i (52 problem) deneysel ve %43,8'i (136 problem) analitik şemaları kullanırken %15,5'i (48 problem) de boş bırakılmıştır. Yazılı sınavda d  rd  nc   sınıfların ise %23,2'si (123 problem) dışsal, %13,6'sı (72 problem) deneysel ve %42,4'

(225 problem) analitik şemaları kullanmış ve problemlerin 110 (%20,8) tanesi de d rd nc sınıflar tarafından boş bırakılmıştır.

Yazılı sınavda farklı sınıf seviyelerinin kullandıkları dışsal şemalara bakıldığında kullanım y zdelerinin birbirine son derece yakın olduğu g r lmektedir. İkinci ve ç nc sınıfların deneysel şemaları kullanma oranları birbirine çok yakındır. Fakat deneysel şemaları en çok kullananlar birinci sınıflar olurken en az kullananlar da d rd nc sınıflar olmuştur. Analitik şemaların kullanımına bakıldığında ç nc ve d rd nc sınıfların hemen hemen aynı oranda kullandıkları g r lmektedir. Ayrıca analitik şemalar en fazla ç nc sınıflar tarafından kullanılırken bunu d rd nc sınıflar takip etmektedir. Analitik şemaları en az kullananlar ise birinci sınıflar olmuştur. Problemleri en fazla ikinci sınıflar boş bırakırken birinci sınıfların boş bırakma oranı da ikinci sınıflara oldukça yakındır. Problemleri en az boş bırakanlar ise ç nc sınıflar olmuştur. Yazılı sınavda genellikle 2, 3 ve 4. sınıfların kullandıkları her bir kanıt şemasının y zdeleri birbirine yakındır. Sonuç olarak buradan g r l yor ki dışsal şemaları en fazla 2. sınıflar, deneysel şemaları 1. sınıflar ve analitik şemaları 3. sınıflar kullanırken problemi boş bırakma oranı da en fazla 2. sınıflardadır.

Yazılı sınavdaki genel duruma bakıldığında en fazla kullanılan şemanın analitik şemalar olduğu g r lmektedir. Analitik şemalar 584 tane problemde %37 kullanılmıştır. Bunun yanı sıra katılımcılar, yazılı sınavda %24 (380 problem) dışsal şemaları kullanırken %18,2'de (288 problem) deneysel şemaları kullanmışlardır. Ayrıca katılımcılar problemlerin 4'de birini de (328 problem) boş bırakmışlardır. Sonuç olarak yazılı sınavda problemlerde en çok kullanılan şema analitik şema olurken en az kullanılan da deneysel şema olmuştur.

Ayrıca fonksiyonlar konusunu içeren 10 probleme ilişkin yazılı sınavda kullanılan kanıt şemaları ile ilk ğretim matematik ğretmeni adayları arasında anlamlı bir fark olup olmadığına dair yapılan Kruskal Wallis H-testi sonuçları Tablo 18'de sunulmuş ve değerlendirilmiştir.

Tablo 18. Yazılı sınavda farklı sınıf seviyelerine g re kullanılan kanıt şemalarına ilişkin Kruskal Wallis H-testi sonuçları

| Şemalar | Sınıflar | N | Sıra Ortalama | $X^2$ | Sd | p |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Dışsal | 1,00 | 40 | 77,70 | | | |
| | 2,00 | 34 | 84,07 | | | |
| | 3,00 | 31 | 80,10 | ,52 | 3 | .91 |
| | 4,00 | 53 | 77,58 | | | |
| | Toplam | 158 | | | | |
| Deneysel | 1,00 | 40 | 99,05 | | | |
| | 2,00 | 34 | 73,15 | | | |
| | 3,00 | 31 | 78,03 | 11,00 | 3 | .01 |
| | 4,00 | 53 | 69,68 | | | |
| | Toplam | 158 | | | | |
| Analitik | 1,00 | 40 | 50,64 | | | |
| | 2,00 | 34 | 78,87 | | | |
| | 3,00 | 31 | 96,53 | 24,56 | 3 | .000 |
| | 4,00 | 53 | 91,73 | | | |
| | Toplam | 158 | | | | |
| Boş | 1,00 | 40 | 84,05 | | | |
| | 2,00 | 34 | 86,50 | | | |
| | 3,00 | 31 | 66,50 | 3,85 | 3 | .28 |
| | 4,00 | 53 | 79,18 | | | |
| | Toplam | 158 | | | | |

Yazılı sınavda b t n problemlerde farklı sınf seviyelerinden katılımcıların kullandıkları şemalar ile sınıflar arasında anlamlı bir fark olup-olmadığını g rmek zere Kruskal Wallis H-testi gerçekleştirilmiştir (bkz. Tablo 18.). Testin sonucunda farklı sınıf seviyeleri ile dışsal şemalar ve boş bırakılan problemler bazında $p < .05$ d zeyinde anlamlı bir farklılığa rastlanmamıştır. Fakat farklı sınıf seviyelerinden ilk ğretim matematik ğretmeni adayları ile kullandıkları deneysel ve analitik şemalar arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır. Kruskal Wallis H-testi sonucunda ($X^2 = 11,001$) $p < .05$ d zeyinde farklı sınıf seviyeleri ile kullanılan deneysel şemalar arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır. Ayrıca hem s tun grafiği ve hem de H-testindeki sıra ortalama değerleri incelendiğinde deneysel şemaları en çok birinci (99,05) sınıfların ve en az da d rd nc (69,68) sınıfların kullandığı g r lmektedir. Bunun yanı sıra deneysel şemaların sıra ortalamalarına bakıldığında zellikle 1. sınıf ğretmen adaylarının diğer sınıflardaki ğretmen adayları arasındaki kopmadan daha fazla olduğu g ze çarpmaktadır. Ayrıca Kruskal Wallis-H testinin sonucunda ($X^2 = 24,562$) $p < .001$ d zeyinde farklı sınıf seviyeleri ile kullandıkları analitik şemalar arasında da anlamlı bir farka rastlanmıştır. Bunun yanı sıra hem s tun grafiği ve hem de H-testindeki sıra ortalama değerleri incelendiğinde analitik şemaları en çok ç nc (96,53) sınıfların ve en az da birinci (50,64) sınıfların kullandığı g r lmektedir. Bunun yanı sıra zellikle 3. ile 1. sınıf ğretmen adayları arasındaki kopmanın diğer sınıflardaki kopmalardan daha fazla olduğu g ze çarpmaktadır.

Aşağıda yer alan Tablo 19'da farklı sınıf seviyelerinde ğrenimlerine devam etmekte olan ve yazılı sınava katılan 158 ilk ğretim matematik ğretmeni adayının sınavda yer alan 10 problemi doğrulama s recinde kullandıkları kanıt şemalarına ait sınıflama bulunmaktadır.

Tablo 19. Farklı sınıf seviyelerinden 158 öğretmen adayının yazılı sınavda uygulanan 10 problemde kullandıkları kanıt şemalarına ait sınıflama

| Sınıflar | Kanıt Şeması | 1.problem | | 2.problem | | 3.problem | | 4.problem | | 5.problem | | 6.problem | | 7.problem | | 8.problem | | 9.problem | | 10.problem | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % |
| 1.sınıf | Dışsal | 33 | 82,5 | 15 | 37,5 | 1 | 2,5 | 1 | 2,5 | 12 | 30 | 5 | 12,5 | 8 | 20 | 12 | 30 | 9 | 22,5 | 1 | 2,5 |
| | Deneysel | - | 0 | 15 | 37,5 | 21 | 52,5 | 19 | 47,5 | 11 | 27,5 | 10 | 25 | 15 | 37,5 | 1 | 2,5 | 21 | 52,5 | - | 0 |
| | Analitik | 5 | 12,5 | - | 0 | 14 | 35 | 6 | 15 | 2 | 5 | 11 | 27,5 | - | 0 | 23 | 57,5 | 3 | 7,5 | 35 | 87,5 |
| | Boş | 2 | 5 | 10 | 25 | 4 | 10 | 14 | 35 | 15 | 37,5 | 14 | 35 | 17 | 42,5 | 4 | 10 | 7 | 17,5 | 4 | 10 |
| 2.sınıf | Dışsal | 30 | 88,2 | 15 | 44,1 | - | 0 | 2 | 5,8 | 12 | 35,3 | 1 | 2,9 | 10 | 29,4 | 8 | 23,5 | 6 | 17,6 | 2 | 5,9 |
| | Deneysel | - | 0 | 5 | 14,6 | 14 | 41,2 | 10 | 29,4 | 3 | 8,8 | 5 | 14,7 | 4 | 11,8 | 1 | 2,9 | 9 | 26,5 | - | 0 |
| | Analitik | 1 | 2,9 | 9 | 26,7 | 18 | 53 | 9 | 26,5 | 11 | 32,4 | 14 | 41,2 | 5 | 14,7 | 13 | 38,4 | 14 | 41,2 | 30 | 88,2 |
| | Boş | 3 | 8,9 | 5 | 14,6 | 2 | 5,8 | 13 | 38,3 | 8 | 23,5 | 14 | 41,2 | 15 | 44,1 | 12 | 35,2 | 5 | 14,7 | 2 | 5,9 |
| 3.sınıf | Dışsal | 27 | 87,1 | 11 | 35,5 | - | 0 | 1 | 3,2 | 8 | 25,8 | 3 | 9,7 | 11 | 35,5 | 5 | 16,1 | 7 | 22,6 | 1 | 3,2 |
| | Deneysel | 1 | 3,2 | 3 | 9,7 | 20 | 64,5 | 10 | 32,3 | 4 | 12,9 | 3 | 9,7 | 5 | 16,1 | 1 | 3,2 | 5 | 16,1 | - | 0 |
| | Analitik | 3 | 9,7 | 14 | 45,1 | 10 | 32,3 | 5 | 16,1 | 13 | 41,9 | 21 | 67,7 | 6 | 19,4 | 24 | 77,5 | 15 | 48,4 | 25 | 80,7 |
| | Boş | - | 0 | 3 | 9,7 | 1 | 3,2 | 15 | 48,4 | 6 | 19,4 | 4 | 12,9 | 9 | 29 | 1 | 3,2 | 4 | 12,9 | 5 | 16,1 |
| 4.sınıf | Dışsal | 37 | 70 | 23 | 43,4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 21 | 39,6 | 11 | 20,8 | 12 | 22,7 | 2 | 3,8 | 15 | 28,3 | 2 | 3,8 |
| | Deneysel | - | 0 | 8 | 15,1 | 28 | 52,8 | 8 | 15,1 | 10 | 18,9 | 1 | 1,9 | 6 | 11,3 | 2 | 3,8 | 7 | 13,2 | 2 | 3,8 |
| | Analitik | 6 | 11,3 | 14 | 26,4 | 18 | 34 | 21 | 39,6 | 13 | 24,5 | 33 | 62,2 | 24 | 45,3 | 32 | 60,4 | 23 | 43,4 | 41 | 77,3 |
| | Boş | 10 | 18,7 | 8 | 15,1 | 7 | 13,2 | 24 | 45,3 | 9 | 17 | 8 | 15,1 | 11 | 20,7 | 17 | 32 | 8 | 15,1 | 8 | 15,1 |

Tablo 19'da da görüldüğü üzere yazılı sınava katılan öğretmen adayları kanıt şemalarının tamamını kullanmışlardır. Bu süreçte bazı problemlerde ağırlıklı olarak dışsal, bazı problemlerde deneysel ve diğer bazı problemlerde de analitik şemalar kullanılırken diğer bazı problemlerde çözülemeyerek ağırlıklı olarak boş bırakılmıştır. Bunun yanı sıra bazı sınıf seviyeleri bazı problemlerde bazı şemaları hiç kullanmazken diğer sınıf seviyelerinin kullandığı görülmektedir.

Dışsal şemaların, bütün problemler ve bütün sınıf seviyeleri göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adayları tarafından %0 ile %88,2 arasında kullanıldığı görülmektedir. Bu süreçte dışsal şemalar bütün sınıf seviyelerinde en fazla birinci problemde kullanılırken en az da üçüncü problemde kullanılmıştır. Çünkü 2, 3 ve 4. sınıflar üçüncü problemde dışsal şemaları hiç kullanmazken birinci sınıflarında sadece %2,5'i kullanmıştır. Fakat genel olarak bakıldığında bütün problem durumlarında katılımcıların kullandıkları dışsal şemaların yüzde değerleri birbirine yakındır.

Yazılı sınava katılan öğretmen adaylarının deneysel şemaları bazı problemlerde hiç kullanmadıkları ve diğer bazı problemlerde de %60'ın üzerinde kullandıkları görülmektedir. Buna bağlı olarak bütün sınıf seviyeleri göz önünde bulundurulduğunda deneysel şemaların kullanımının %0-%64,5 arasında değiştiği görülmektedir. Bu süreçte deneysel şemalar bütün sınıf seviyelerinde en az birinci problemde kullanılırken en fazla da üçüncü problemde kullanılmıştır. Bunun yanı sıra deneysel şemaların kullanımı sınıf seviyelerine göre de farklılık göstermektedir.

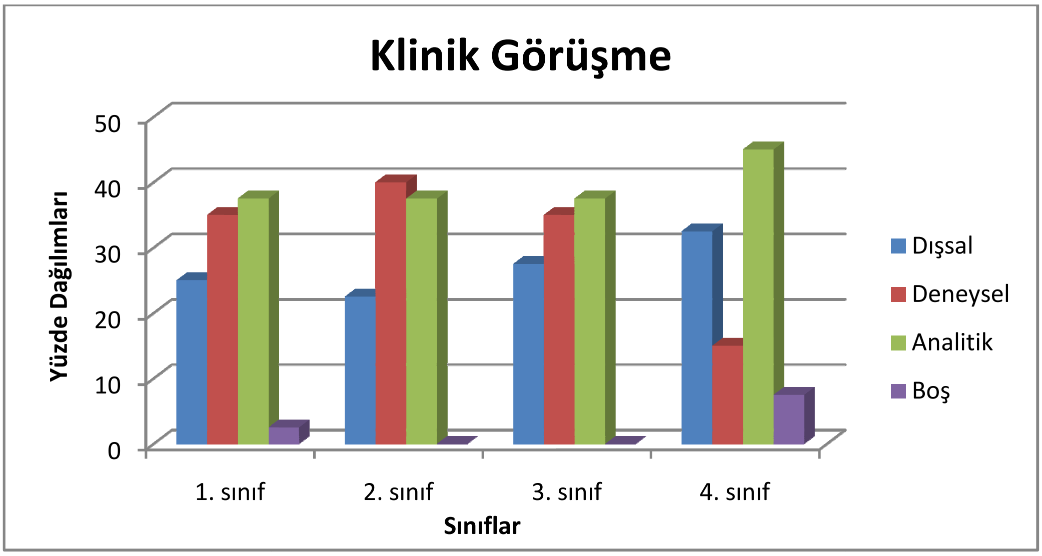
Analitik şemaların kullanımı sınıf seviyesine ve probleme göre farklılıklar göstermektedir. Bütün sınıf seviyelerinde ise kullanımı %0 ile %88,2 arasında değişmektedir. Bu süreçte analitik şemalar en az birinci problemde kullanılırken en fazla da onuncu problemde kullanılmıştır. Bunun yanı sıra farklı sınıf seviyelerinde kullanılan analitik şemaların yüzde değerleri de sınıflara ve probleme göre farklılıklar göstermektedir.

Dışsal, deneysel ve analitik şemaların kullanılmasının yanı sıra bazı sınıf seviyelerinde bazı problemlerde boş bırakılmıştır. Farklı sınıf seviyelerinin tamamında problemlerin boş bırakılma yüzdesi %0 ile %48,4 arasında değişiklik göstermektedir. Bazı problemlerde farklı sınıf seviyelerinin problemi boş bırakma yüzdeleri birbirine çok yakın olmasına rağmen diğer bazı problemlerde de farklılıklar göstermektedir. Bunlara ek olarak en çok boş bırakılan problemlerden biri de dördüncü problemdir. Çünkü dördüncü problemde farklı sınıf seviyelerinden katılımcıların boş bırakma yüzdeleri %35 ile %48,4 arasında değişmektedir. Bu yüzdeler ise klinik görüşmede de bazı değişiklikler göstermektedir.

Tablo 20. Klinik görüşmelere ait frekans ve yüzde dağılımları

| | 1.sınıf | | 2.sınıf | | 3.sınıf | | 4.sınıf | | Genel | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | N | % | N | % | N | % | N | % | N | % |
| Dışsal | 10 | 25 | 9 | 22,5 | 11 | 27,5 | 13 | 32,5 | 43 | 26,875 |
| Deneysel | 14 | 35 | 16 | 40 | 14 | 35 | 6 | 15 | 50 | 31,25 |
| Analitik | 15 | 37,5 | 15 | 37,5 | 15 | 37,5 | 18 | 45 | 63 | 39,375 |
| Boş | 1 | 2,5 | - | - | - | - | 3 | 7,5 | 4 | 2,5 |
| Toplam | 40 | 100 | 40 | 100 | 40 | 100 | 40 | 100 | 160 | 100 |

Tablo 20'de çalışmaya katılan farklı sınıf seviyelerindeki 16 ilköğretim matematik öğretmeni adayının fonksiyonlar konusunu içeren klinik görüşmelerdeki 160 problem için kullandıkları kanıt şemalarının frekans ve yüzde değerleri sınıflara göre ayrı ayrı verilerek genel durum belirtilmiştir.




Şekil 4. Klinik görüşmelere ait yüzde değerlerini içeren sütun grafik

Şekil 4'de farklı sınıf seviyelerinde öğrenimlerine devam etmekte olan 16 ilköğretim matematik öğretmeni adayının klinik görüşmede kullandıkları şemaların yüzde değerlerini içeren sütun grafikleri sınıflara göre ayrı ayrı yer almaktadır.

Tablo 20'de ve Şekil 4'de 16 öğretmen adayının yöneltilmiş olan 10 problemde klinik görüşmede kullandıkları kanıt şemaları görülmektedir. Klinik görüşmelerden elde edilen verilere bakıldığında birinci sınıfların problemlerin %25'ini (10 problem) dışsal, %35'ini (14 problem) deneysel ve %37,5'ini (15 problem) de analitik şemaları kullanarak çözdükleri ve %2,5'ini (1 problem) de boş bıraktıkları görülmektedir. İkinci sınıflardaki katılımcıların ise %22,5'i (9 problem) dışsal, %40'ı (16 problem) deneysel, %37,5'i (15 problem) de analitik şemaları kullanmış ve hiçbir problemi de boş bırakmamışlardır. Üçüncü sınıfların görüşmede kullandıkları şemalara bakıldığında 11 problemde (%27,5) dışsal, 14 problemde (%35) deneysel ve 15 problemde (37,5) analitik şemaları kullandıkları ve problemlerden hiçbirini boş bırakmadıkları görülmektedir. Son olarak dördüncü sınıfların %32,5'i (13 problem) dışsal, %15'i (6 problem) deneysel ve %45'i (18 problem) de analitik şemaları kullanırken %7,5'i (3 problem) de problemi çözemeyerek boş bırakmışlardır.

Klinik görüşmelerde farklı sınıf seviyelerinin kullandıkları dışsal şemalara bakıldığında kullanım yüzdelerinin birbirine son derece yakın olduğu görülmektedir. fakat buna rağmen dışsal şemaları en fazla kullananlar dördüncü sınıflar olmuştur. Birinci, ikinci ve üçüncü sınıfların deneysel şemaları kullanma oranları birbirine çok yakındır. Fakat deneysel şemaları en çok kullananlar ikinci sınıflar olurken en az kullananlar da dördüncü sınıflar olmuştur. Analitik şemaların kullanımına bakıldığında birinci, ikinci ve üçüncü sınıflar aynı oranda kullanırken dördüncü sınıfların bu sınıf seviyelerinden daha fazla kullandıkları görülmektedir. Problemleri en fazla dördüncü sınıflar boş bırakırken birinci sınıflardan sadece bir problem boş bırakılmıştır. Bunun yanı sıra ikinci ve üçüncü sınıflardan boş bırakılan problem olmamıştır. Klinik görüşmelerde genellikle 1, 2 ve 3. sınıfların kullandıkları her bir kanıt şemasının yüzdeleri birbirine çok yakındır. Sonuç olarak buradan görülüyor ki dışsal şemaları en fazla 3. sınıflar, deneysel şemaları 2. sınıflar ve analitik şemaları 4. sınıflar kullanırken problemi boş bırakma oranı da en fazla 4. sınıflardadır. Görülüyorki klinik görüşmelerde 2 ve 3. sınıflar tüm problemleri yanıtlarken 1. sınıflar 1 ve 4. sınıflar da 3 problemi boş bırakmışdır. Bunun yanı sıra analitik şemaları en fazla dördüncü sınıflar kullanırken deneysel şemaları da en az dördüncü sınıflar kullanmıştır. Bunlar dışında farklı sınıf seviyelerinden öğretmen adayları diğer şemaları hemen hemen aynı oranlarda kullanmışlardır.

Ayrıca fonksiyonlar konusunu içeren 10 probleme ilişkin klinik görüşmede kullanılan kanıt şemaları ile farklı sınıf seviyelerindeki ilköğretim matematik öğretmeni adayları arasında anlamlı bir fark olup olmadığına dair Kruskal Wallis H-testi yapılmıştır. Testin sonuçlarına bakıldığında klinik görüşmede kullanılan dışsal, deneysel, analitik şemalar ve boş bırakılan problemler ile farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmamıştır.

Katılımcıların klinik görüşmelerdeki genel durumda 160 problemde kullandıkları şemalara bakıldığında 43 (%26,875) problemde dışsal, 50 (%31,25) problemde deneysel, 63 (%39,375) problemde analitik şemaları kullandıkları ve 4 (%2,5) problemi de çözemeyerek boş bıraktıkları görülmektedir. Sonuç olarak klinik görüşmelerde problemlerde en çok kullanılan şema analitik şemalar olurken en az kullanılan da dışsal şemalar olmuştur.

Tablo 21. Farklı sınıf seviyelerinden 16 öğretmen adayının klinik görüşmede yöneltilen 10 problemde kullandıkları kanıt şemalarına ait sınıflama

| Sınıflar | Kanıt Şeması | 1.problem | | 2.problem | | 3.problem | | 4.problem | | 5.problem | | 6.problem | | 7.problem | | 8.problem | | 9.problem | | 10.problem | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | **N** | **%** | **N** | **%** | **N** | **%** | **N** | **%** | **N** | **%** | **N** | **%** | **N** | **%** | **N** | **%** | **N** | **%** | **N** | **%** |
| **1.sınıf** | **Dışsal** | 3 | 75 | 1 | 25 | - | 0 | 2 | 50 | 1 | 25 | - | 0 | 1 | 25 | 1 | 25 | 1 | 25 | - | 0 |
| | **Deneysel** | - | 0 | 3 | 75 | 2 | 50 | 1 | 25 | 2 | 50 | 2 | 50 | 2 | 50 | - | 0 | 2 | 50 | - | 0 |
| | **Analitik** | 1 | 25 | - | 0 | 2 | 50 | 1 | 25 | 1 | 25 | 2 | 50 | - | 0 | 3 | 75 | 1 | 25 | 4 | 100 |
| | **Boş** | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | 1 | 25 | - | 0 | - | 0 | - | 0 |
| **2.sınıf** | **Dışsal** | 2 | 50 | 1 | 25 | 1 | 25 | 2 | 50 | 1 | 25 | 1 | 25 | - | 0 | 1 | 25 | - | 0 | - | 0 |
| | **Deneysel** | - | 0 | 2 | 50 | 2 | 50 | 2 | 50 | 2 | 50 | 1 | 25 | 3 | 75 | 1 | 25 | 3 | 75 | - | 0 |
| | **Analitik** | 2 | 50 | 1 | 25 | 1 | 25 | - | 0 | 1 | 25 | 2 | 50 | 1 | 25 | 2 | 50 | 1 | 25 | 4 | 100 |
| | **Boş** | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 |
| **3.sınıf** | **Dışsal** | 3 | 75 | 1 | 25 | - | 0 | 1 | 25 | 1 | 25 | - | 0 | 2 | 50 | 1 | 25 | 2 | 50 | - | 0 |
| | **Deneysel** | - | 0 | 2 | 50 | 3 | 75 | 3 | 75 | 1 | 25 | 2 | 50 | 1 | 25 | 1 | 25 | 1 | 25 | - | 0 |
| | **Analitik** | 1 | 25 | 1 | 25 | 1 | 25 | - | 0 | 2 | 50 | 2 | 50 | 1 | 25 | 2 | 50 | 1 | 25 | 4 | 100 |
| | **Boş** | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 |
| **4.sınıf** | **Dışsal** | 3 | 75 | 2 | 50 | - | 0 | 2 | 50 | 3 | 75 | 1 | 25 | 1 | 25 | - | 0 | 1 | 25 | - | 0 |
| | **Deneysel** | - | 0 | 1 | 25 | 3 | 75 | 2 | 50 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 |
| | **Analitik** | 1 | 25 | 1 | 25 | 1 | 25 | - | 0 | 1 | 25 | 3 | 75 | 3 | 75 | 2 | 50 | 3 | 75 | 3 | 75 |
| | **Boş** | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | - | 0 | 2 | 50 | - | 0 | 1 | 25 |

Tablo 21’de de görüldüğü üzere klinik görüşmeye katılan öğretmen adayları kanıt şemalarının tamamını kullanmışlardır. Bu süreçte bazı problemlerde ağırlıklı olarak dışsal, bazı problemlerde deneysel ve diğer bazı problemlerde de analitik şemalar kullanılırken diğer bazı problemlerde bütün şemalar hemen hemen eşit oranlarda kullanmışlardır. Ayrıca çözülemeyerek boş bırakılan problemlerde olmuştur. Bunun yanı sıra bazı sınıf seviyeleri bazı problemlerde bazı şemaları hiç kullanmazken diğer sınıf seviyelerinin kullandığı görülmektedir.

Dışsal şemaların, bütün problemler ve bütün sınıf seviyeleri göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adayları tarafından %0 ile %75 arasında kullanıldıkları görülmektedir. Bu süreçte dışsal şemalar bütün sınıf seviyelerinde en fazla birinci problemde kullanılırken onuncu problemde hiç kullanılmamıştır. Fakat genel olarak bakıldığında genellikle bütün problem durumlarında ve sınıf seviyelerinde kullanılmıştır.

Klinik görüşmeye katılan öğretmen adaylarının deneysel şemaları bazı problemlerde hiç kullanmadıkları ve diğer bazı problemlerde de %75 oranında kullandıkları görülmektedir. Buna bağlı olarak bütün sınıf seviyeleri göz önünde bulundurulduğunda deneysel şemaların kullanımının %0-%75 arasında değiştiği görülmektedir. Bu süreçte deneysel şemalar bütün sınıf seviyelerinde birinci ve onuncu problemde hiç kullanılmazken en fazla da üçüncü problemde kullanılmıştır. Bunun yanı sıra deneysel şemaların kullanımı bazı problemde sınıf seviyelerine göre değişiklik gösterirken diğer bazı problemlerde göstermemektedir.

Analitik şemaların kullanımı sınıf seviyesine ve probleme göre farklılıklar göstermektedir. Bütün sınıf seviyelerinde ise kullanımı %0 ile %100 arasında değişmektedir. Bu süreçte analitik şemalar en az dördüncü problemde kullanılırken en fazla da onuncu problemde kullanılmıştır. Bunun yanı sıra farklı sınıf seviyelerinde kullanılan analitik şemaların yüzde değerleri de sınıflara ve probleme göre bazı farklılıklar göstermektedir.

Dışsal, deneysel ve analitik şemaların kullanılmasının yanı sıra dört problemde boş bırakılmıştır. Bunlardan biri 7. problem, ikisi 8. problem ve biri de 10. problemdir. Bu problemlerden 7. problemi çözemeyen öğretmen adayı birinci sınıfa devam eden katılımcılardanken diğer boş bırakan öğretmen adayları dördüncü sınıfa devam etmekte olanlardandır. Yazılı sınavlarda ve klinik görüşmelerde yöneltilen problemlerde kullanılan kanıt şemaları ile sınıf seviyeleri arasında farklılıkların ortaya çıktığı problemler de olmuştur.

Yazılı sınavda ve klinik görüşmelerde farklı sınıf seviyelerinden herbir öğretmen adayına fonksiyonlar konusu ile ilgili 10'ar tane problem yöneltilmiştir. Kullanılan kanıt şemaları ise sınıf seviyelerine göre bazı farklılıklar göstermektedir. Bu problemlerden birincisinde öğretmen adayları yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanmışlar ve gerçekleştirilen Ki-Kare testi sonucunda ($X^2$=16,11; p=.06) p < .05 düzeyinde farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Fakat kullanılan şemalar arasında Ki-Kare testi sonucunda ($X^2$=261,74; p=,000) p < ,001 düzeyinde anlamlı bir farklılık ortaya çıkmıştır. Bu süreçte klinik görüşmeye katılan 16 öğretmen adayından 11'i de birinci problemde dışsal şemaları kullanmışlardır.

İkinci problemde kullanılan kanıt şemaları ile farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir fark olup-olmadığını görmek üzere gerçekleştirilen Ki-Kare testi sonucunda ($X^2$=28,28; p=.001) p < .05 olduğu için farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır. Sınıflara göre kullanılan kanıt şemalarının yanı sıra yapılan Ki-Kare testi sonucunda şemalar arasında da ($X^2$=21,79; p=.000) p < .001 düzeyinde anlamlı bir farklılık ortaya çıkmıştır. İkinci problemde katılımcılar yazılı sınavda genellikle dışsal şemaları kullanırken klinik görüşmede (8 kişi) deneysel şemaları kullanmışlardır.

Yazılı sınavda üçüncü problemde ağırlıklı olarak deneysel şemalar kullanılırken Ki-Kare testi sonucunda farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında ($X^2$=9,86; p=.36) p < .05 olduğundan dolayı anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Fakat kullanılan şemalar bazında yapılan Ki-Kare testi sonucunda ($X^2$=112,53; p=.000) p < .001 düzeyinde anlamlı bir farklılık ortaya çıkmıştır. Üçüncü problemde yazılı sınavda olduğu gibi klinik görüşmede de öğretmen adayları (10 katılımcı) ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanmışlardır.

Dördüncü problemde hem yazılı ve hem de klinik görüşmede (8 kişi) ağırlıklı olarak deneysel şemalar kullanılmıştır. Fakat klinik görüşme dışsal şemaları (7 kişi) ile deneysel şemaları kullananların sayısı birbirine son derece yakın olmasına rağmen yazılı sınavda dışsal (%2,5) ve deneysel (%29,8) şemalar arasında büyük bir farklılık bulunmaktadır. Ayrıca dördüncü problemi katılımcıların yaklaşık %40'ı da boş bırakmışlardır. Bunun ardından yapılan Ki-Kare testi sonucunda ($X^2$=18,88; p=.02) p < .05 anlamlılık düzeyi için farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır. Bunun yanı sıra kullanılan kanıt şemalarında da ($X^2$=51,16; p=.000) $p < .001$ anlamlılık düzeyinde bir farklılık ortaya çıkmıştır.

Beşinci problem için gerçekleştirilen Ki-Kare testi sonucunda ($X^2$=20,66; p=.01) $p < .05$ anlamlılık düzeyi için farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmasının yanı sıra kullanılan kanıt şemaları arasında da ($X^2$=8,02; p=.04) $p < .05$ düzeyinde anlamlı bir farklılık ortaya çıkmıştır. Bu problemde yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemalar kullanılmasına rağmen klinik görüşmede bütün şemalar eşit sayıda (6 kişi dışsal, 5 kişi deneysel ve 5 kişi analitik) katılımcı tarafından kullanılmıştır.

Altıncı problemde yazılı sınavda ve klinik görüşmede (8 katılımcı) ağırlıklı olarak analitik şemalar kullanılmıştır. Yazılı sınav sonuçlarına uygulanan Ki-Kare testi sonucuna göre ($X^2$=30,64; p=.000) $p < .001$ olduğu için farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemaları arasında ($X^2$=56,78; p=.000) $p < .001$ düzeyinde anlamlı bir fark bulunmaktadır.

Yedinci problem için sınıf farklarını görmek üzere gerçekleştirilen Ki-Kare testi sonucunda ($X^2$=39,49; p=.000) $p < .001$ olduğu için farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır. Fakat kullanılan kanıt şemaları arasında ($X^2$=6,81; p=.078) $p < .05$ seviyesinde anlamlı bir fark ortaya çıkmamıştır. Katılımcılar yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanmalarına rağmen boş bırakılma oranı dışsal şemaların kullanımından da fazladır. Klinik görüşmede ise bir kişi problemi çözemeyerek boş bırakmış ve diğer katılımcıların da 6'sı deneysel, 5'i analitik ve 4'ü de dışsal şemaları kullanmışlardır.

Sekizinci problemde farklı sınıf seviyeleri yazılı sınavda ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken Ki-Kare testi sonucunda ($X^2$=27,73; p=.001) $p < .05$ anlamlılık düzeyi için farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır. Bunun yanı sıra kullanılan kanıt şemaları arasında da ($X^2$=104,63; p=.000) $p < .001$ değeri için anlamlı bir fark oluşmuştur. Klinik görüşmede ise ağırlıklı olarak analitik şemalar kullanılırken 2 öğretmen adayı problemi boş bırakmış ve 9 öğretmen adayı tarafından da analitik şemalar kullanılmıştır.

Dokuzuncu problem için sınıflar arası farkları görmek üzere gerçekleştirilen Ki-Kare testi sonucunda ($X^2$=27,97; p=.001) $p < .05$ anlamlılık düzeyi için farklı öğrenim seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmış ve kullanılan kanıt şemaları arasında da ($X^2$=12,48; p=.006) $p < .001$ anlamlılık düzeyinde farklılık ortaya çıkmıştır. Ayrıca yazılı sınavda ağırlıklı olarak analitik şemaların kullanıldığı görülmüştür. Klinik görüşmede ise altışar öğretmen adayı tarafından deneysel ve analitik şemalar kullanılmıştır.

Son problem olan onuncu problemde yazılı sınavda (%83) ve klinik görüşmelerde (15 kişi) son derece yüksek oranlarda analitik şemalar kullanılmıştır. Buna bağlı olarak da yapılan Ki-Kare testi sonucunda ($X^2$=7,04; p=.63) $p < .05$ olduğu için ilköğretim matematik öğretmeni adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Fakat kullanılan kanıt şemaları arasında ($X^2$=286,60; p=.000) $p < .001$ düzeyinde anlamlı bir farka rastlanmıştır.

Sonuç olarak problemler tek tek ele alındığında 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ve 10. problemlerde kullanılan kanıt şemaları ile farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmaktadır. Bunun yanı sıra yedinci problem hariç diğer bütün problemlerde de kullanılan şemalar arasında anlamlı bir farklılık ortaya çıkmıştır.

Tablo 22. Farklı sınıf seviyelerindeki 16 öğretmen adayının yazılı sınavda ve klinik görüşmede kullandıkları kanıt şemaları

| | | 1.problem | | 2.problem | | 3.problem | | 4.problem | | 5.problem | | 6.problem | | 7.problem | | 8.problem | | 9.problem | | 10.problem | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Sınıf** | **Kod** | **Y** | **KG** | **Y** | **KG** | **Y** | **KG** | **Y** | **KG** | **Y** | **KG** | **Y** | **KG** | **Y** | **KG** | **Y** | **KG** | **Y** | **KG** | **Y** | **KG** |
| **1. Sınıf** | ÖA1A | DI | DI | DI | DI | A | A | B | DI | DI | DI | B | A | DI | DI | A | DI | DI | A | A | A |
| | ÖA1B | DI | DI | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DE | A | A | DE | DE | A | A |
| | ÖA1C | DI | A | B | DE | A | A | A | DI | A | A | A | A | B | B | A | A | DI | DI | A | A |
| | ÖA1D | DI | DI | DI | DE | DE | DE | A | A | DI | DE | DE | DE | DE | DE | A | A | DE | DE | A | A |
| **2. Sınıf** | ÖA2A | DI | DI | DI | DI | DE | DI | DI | DI | DI | DE | B | DI | B | DE | B | DE | DE | DE | B | A |
| | ÖA2B | DI | DI | DE | DE | DE | DE | DE | DE | A | DE | A | A | DE | DE | DI | A | DE | DE | A | A |
| | ÖA2C | DI | A | A | A | A | A | DI | DI | A | A | A | A | A | A | A | A | DI | DE | A | A |
| | ÖA2D | DI | A | DI | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DI | B | DE | B | DE | DI | DI | A | A | A | A |
| **3. Sınıf** | ÖA3A | DI | DI | DI | DI | A | A | DE | DE | DI | A | A | DE | DI | DI | DI | DI | A | DI | A | A |
| | ÖA3B | DI | DI | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DE | B | DE | DE | DE | A | A |
| | ÖA3C | DI | A | A | A | DE | DE | A | DI | A | A | A | A | B | A | A | A | A | A | A | A |
| | ÖA3D | DI | DI | DE | DE | A | DE | DE | DE | B | DI | B | A | DI | DI | A | A | DE | DI | A | A |
| **4. Sınıf** | ÖA4A | DI | DI | DI | DI | DE | A | B | DE | DI | DI | DI | A | DI | A | B | B | DI | DI | A | A |
| | ÖA4B | DI | DI | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DE | DI | DI | DI | A | A | B | B | A | A | DE | B |
| | ÖA4C | A | A | A | A | DE | DE | A | DI | A | A | A | A | A | A | A | A | DI | A | A | A |
| | ÖA4D | DI | DI | DI | DI | DE | DE | B | DI | DI | DI | A | A | A | DI | A | A | DE | A | A | A |

Tabloda kullanılan kısaltmalar: Y-Yazılı sınav, KG-Klinik görüşme, DI-Dışsal kanıt şemaları, DE-Deneysel kanıt şemaları, A-Analitik kanıt şemaları, B-Boş

Tablo 22'de klinik görüşmeye katılan 16 öğretmen adayının yöneltilmiş olan 10 problemde hem yazılı sınavda ve hem de klinik görüşmede kullandıkları kanıt şemaları görülmektedir. Katılımcıların klinik görüşmelerde kullandıkları şemalara bakıldığında 43 (%26,875) problemde dışsal, 50 (%31,25) problemde deneysel, 63 (%39,375) problemde analitik şemaların kullanıldığı ve 4 (%2,5) problemin de boş bırakıldığı görülmektedir. Sonuç olarak klinik görüşmeye katılan 16 öğretmen adayından 2'si ağırlıklı olarak dışsal, 5'i ağırlıklı olarak deneysel ve 4'ü de ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmışlardır. Bunun yanı sıra 2 katılımcı bütün şemaları eşit oranda kullanırken 2 katılımcı eşit oranda dışsal ile analitik şemaları ve 1 kişi de eşit oranda dışsal ile deneysel şemaları kullanmıştır. Bunlardan da dışsal şemaları ağırlıklı olarak kullanan katılımcılardan birisi birinci ve birisi de üçüncü sınıfa devam etmektedir. Ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullananların ise ikisi birinci, ikisi ikinci ve birisi de üçüncü sınıfa devam etmektedir. Dördüncü sınıflardan ise ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanan katılımcı olmamıştır. Analitik şemaları ağırlıklı olarak kullananların birisi birinci, birisi ikinci, birisi üçüncü ve birisi de dördüncü sınıfta öğrenimlerine devam etmekte olan katılımcılardandır. Bütün şemaları eşit oranda kullanan katılımcıların birisi üçüncü ve birisi de dördüncü sınıfa devam eden öğretmen adayıdır. Ayrıca dışsal ve analitik şemaları eşit oranda kullanan iki katılımcı da dördüncü sınıfa devam etmekte iken dışsal ve deneysel şemaları eşit oranda kullanan katılımcı da ikinci sınıfa devam etmektedir.

Klinik görüşmeye katılan katılımcılar yazılı sınavda dışsal şemaları 44 (%27,5) problemde, deneysel şemaları 42 (%26,25) problemde ve analitik şemaları da 56 (%35) problemde kullanmışlardır. Bunun yanı sıra 18 (%11,25) problemde boş bırakılarak katılımcılar tarafından çözülememiştir. Klinik görüşmeye katılan birinci sınıflar yazılı sınavda 11 problemde dışsal, 11 problemde deneysel ve 14 problemde analitik şemaları kullanırken 4 problemi de boş bırakmışlardır. İkinci sınıflar ise 12 problemde dışsal, 10 problemde deneysel, 12 problemde analitik şemaları kullanmış ve 6 problemi de boş bırakmışlardır. Üçüncü sınıflar dışsal şemaları 9 problemde, deneysel şemaları 12 problemde ve analitik şemaları 15 problemde kullanırken 4 problemi de boş bırakmışlardır. Son olarak dördüncü sınıflar 12 problemde dışsal, 9 problemde deneysel ve 15 problemde analitik şemaları kullanmış ve 4 problemi de çözememişlerdir. Yazılı sınavda analitik şemalar en çok üçüncü sınftaki katılımcılar tarafından kullanılırken dışsal şemalardan yine en az üçüncü sınıflar tarafından kullanılmıştır. Fakat sonuç olarak yazılı sınavda farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarının kullandıkları şemalar birbirine son derece yakındır.

Klinik görüşme ve yazılı sınav sonuçları birlikte ele alındığında katılımcıların 16 problemi boş bıraktıkları için 160 problemden 144'ü geçerli olarak alınmıştır. Bu 144 problemden de 114 (%79,2) problemde hem yazılı ve hem de klinik görüşmede aynı kanıt şeması kullanılırken 30 (%20,8) problemde şemalar değişiklik göstermiştir. Hem yazılı sınavda ve hem de klinik görüşmede aynı şemaların kullanıldığı 114 problemden 29'u dışsal, 35'i deneysel ve 47'si de analitik şemalardır. Aynı zamanda 3 problemde hem yazılı sınavda ve hem de klinik görüşmede katılımcılar tarafından boş bırakılmıştır. Bunun sonucunda yazılı sınav ve klinik görüşmede katılımcıların kullandıkları kanıt şemalarının %78,5 uyumlu olması hazırlanmış olan problemlerin fonksiyonlar konusunda kullanılan kanıt şemalarını belirlemek için uygun bir ölçme aracı olduğunu söyleyebiliriz.

### 3.3. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Klinik Görüşmelerde ve Yazılı Sınavda Kullandıkları Kanıt Şemaları

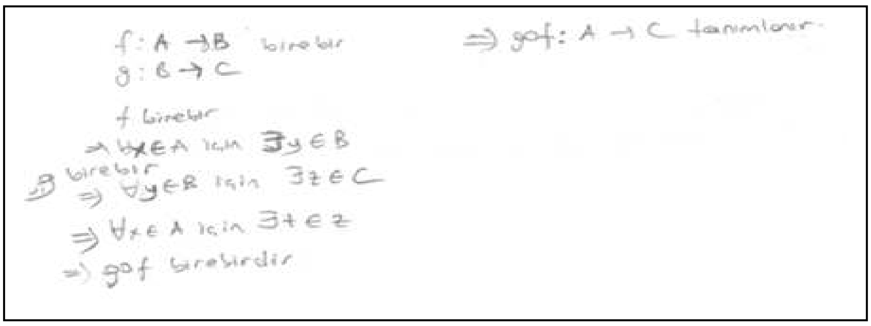
Problemin çözümüyle ilgili farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile yapılan klinik görüşmelerden ve yazılı sınavdan elde edilen bulgular üç başlık altında toplanmıştır: dışsal, deneysel ve analitik kanıt şeması içeren çözümler. Takip eden kısımda klinik görüşmeye katılan öğretmen adaylarının dışsal, deneysel ve analitik şemaları kullandıkları problemlerin yazılı sınavdaki çözümleri ile klinik görüşmedeki çözümlerine ve görüşmelerden doğrudan alıntılara şemalara göre ayrı ayrı yer verilecektir.

#### 3.3.1. Dışsal Kanıt Şemalarının Farklı Sınıf Seviyelerindeki İlköğretim Matematik Öğretmeni Adayları Tarafından Kullanımına Dair Bulgular

Bu kanıt şemasında öğrenciye önce onu ikna edecek kaynaklar sunulmaktadır. Daha sonra öğrenciler de bu kaynakları başkalarını ikna etmek için sunmaktadırlar. Bu kaynaklar genellikle kitaplar veya otorite figürleri, aile veya öğretmen gibi dış etmenlerden oluşmaktadır. Yani öğrenciler matematikte öğrendiklerinin doğruluğunu kitaplara veya başka insanlara dayandırmaktadırlar. Bunun yanı sıra çocuklar dışsal şemalarda bir fikrin doğruluğunu güvendikleri biri söylediği için de kabul etmektedirler. Yani kanıt şemalarından dışsal kanıt şemasında öğrenciler matematiksel geçerliliği tanımlamak için dışsal otoriteye veya biçimlendirilmiş nedenlere güvenmektedirler. Ayrıca matematiksel sembolleri anlamsız bir biçimde kullanmalarının yanı sıra öğrenciler akıl yürütmektense karşılarındakileri ikna etmek için önceden öğrendikleri delilleri, sebepleri de öne sürmektedirler. Dışsal şemalar otorite, alışkanlık edinilmiş ve sembolik olmak üzere üç alt şemadan oluşmaktadır.

Bu çalışmada bütün problemler göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adaylarının %24'ünün (380 problem) yazılı sınavda ve %26,875'inin (43 problem) klinik görüşmelerde dışsal şemaları kullandıkları görülmektedir. Bunlardan ise klinik görüşmeye katılanların 10 tanesi birinci sınıf, 9 tanesi ikinci sınıf, 11 tanesi üçüncü sınıf ve 13 tanesi de dördüncü sınıfta öğrenimlerine devam etmekte olan öğretmen adaylarıdır. Görüldüğü üzere görüşmelerde farklı sınıf seviyelerine göre dışsal şemaların kullanımı büyük bir değişiklik göstermemektedir. Bunun yanı sıra klinik görüşmeye katılan katılımcılar yazılı sınavda 44 problemde dışsal şemaları kullanmışlardır. Ayrıca görüşmeler sırasında dışsal kanıt şemalarının bütün alt şemaları da kullanılmıştır. Fakat katılımcıların en fazla kullandıkları şema otorite kanıt şeması olmuştur. Bu süreçte ise bazı katılımcılar problemde verilen durumu sınıfta öğrendiğini veya arkadaşından öğrendiğini dile getirirken bazıları da anlamını bilmeden ezberledikleri tanımları, kuralları kullanmışlar ve bu tanımları, kuralları yeni bir duruma uygulayamamışlardır.

Katılımcılardan ÖA4A 4. sınıfta öğrenimine devam etmekte olan bir öğretmen adayıdır. Katılımcı yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanmış ve hem yazılı sınavda ve hem de klinik görüşme sırasında da ikinci problemi dışsal şemalardan otorite ile açıklamıştır. Katılımcı yazılı sınavda birebirlik tanımı ile örtenlik tanımını birbirine karıştırmış olabilir. Çünkü yazılı sınavda g bileşke f fonksiyonunun birebirliğini göstermek isterken aslında örtenliğini göstermiştir. Fakat katılımcı bunu birebirlik olarak adlandırmıştır. Bu da katılımcının aslında hem birebirlik ve hem de örtenlik tanımını ezberlediğinin bir göstergesi olabilir. Aşağıda Şekil 5'de katılımcının yazılı sınavda yaptığı çözüm yer almaktadır.




Şekil 5. ÖA4A'nın yazılı sınavdaki ikinci probleme ait çözümü

Klinik görüşmede de benzer biçimde yaptığı çözümün açıklamasını görüşmede ise;

ÖA4A: Birebirlik için (sessizlik). Yani şurada dışarıda eleman kalabilir. Buranın eleman sayısı ile buranın eleman sayısı eşit olmak zorunda değil. Şurada (görüntü kümesi) dışarıda farklı eleman olabilir ama şurada her x için bir tane y'nin bulunması lazım diye düşünüyorum. Birebir olduğunu gösteriniz. İlk önce f'e koyuyoruz. f, A'da zaten A'dan B'ye bir fonksiyon zaten, bu birebir. B'den C'ye gitmemiz lazım. Şu A olsun şu B olsun. Şurada C kümemiz olsun. A'dan B'ye zaten birebirmiş. B'den C'ye de birebirmiş. Yani şuradaki her eleman için mesela şurada fazladan elemanlarda olsun onun içinden bir eleman bulursun. Burada fazladan da olabilir. A'dan B'ye birebir. B'den C'ye de birebir olduğunu biliyoruz. Bu A'dan B'ye gitti B'den de C'ye gitmesi lazım. Yani şurada B'den C'ye giderken biz bunun birebir olduğunu bildiğimiz için şu fonksiyonu da aslında buda A'dan B'ye gidiyor. Şöyle ilk önce A'dan B'ye gidiyor. f'den sonra f'deki bulduğumuz değeri B'de yerine koyuyoruz. Yani B'den de C'ye gidiyor. Sonuç olarak bu B'den C'ye gidiyor diyebiliriz buna. Hani şunu düzenlediğimiz zaman. B'den C'ye giderken de birebirmiş yani bu fonksiyon birebir diyebiliriz. Zaten bunu bir teorem olarak görmüştük yanlış hatırlamıyorsam.

T : Birebirliği mi yoksa f bileşke g'nin pardon g bileşke f'in birebirliği mi?

ÖA4A: Evet bunu, bunu.

T : Soyutta mı görmüştünüz?

ÖA4A: Yani öyle hatırlıyorum ben.

Şeklinde yapmıştır. ÖA4A birebirliğin sözel tanımını vererek, çizdiği venn şeması yardımıyla g bileşke f'in birebirliğini göstermeye çalışmıştır. Fakat açıklamalarının en sonunda bu problemi bir teorem olarak soyut matematik dersinde gördüklerini ifade ederek dışsal şemalardan otoriteyi kullanmıştır. Burada katılımcı için sorulan ifadeyi derste bir teorem olarak görmüş olmak doğru olması için yeterli olmuştur.

Başka bir dördüncü sınıf öğretmen adayı olan ÖA4D yazılı sınavda bütün şemaları eşit oranda kullanan bir öğretmen adayıdır. Katılımcı görüşmeye geldiğinde rahat bir tavır içindeydi. Bunun yanı sıra katılımcı yazılı sınavda boş bıraktığı dördüncü problemi görüşmede çözmüştür. Aşağıdaki diyalogda ÖA4D'nin klinik görüşmede dördüncü problemi çözme sürecine değinilmiştir.

ÖA4D: Olduğunu gösteriniz. Ben bu soruyu sınavda yapmamıştım.

T : Evet boş bırakmıştın.

ÖA4D:Ama sınavdan sonra öğrenmiştim eğer hatırlarsam yaparım.

T : Nereden öğrendin?

ÖA4D: Yapan arkadaşlardan. Arkadaşlar ile üzerinde konuştuk, düşündük.

T :Nasıl düşünmek gerekiyormuş bu problemle ilgili peki?

ÖA4D: Benim sıkıntım zaten buradaki bir x den dolayı. Bir şeyin karesi haline getirmem lazım. Ya da 2 kare farkına. Demek ki hala öğrenememişim.

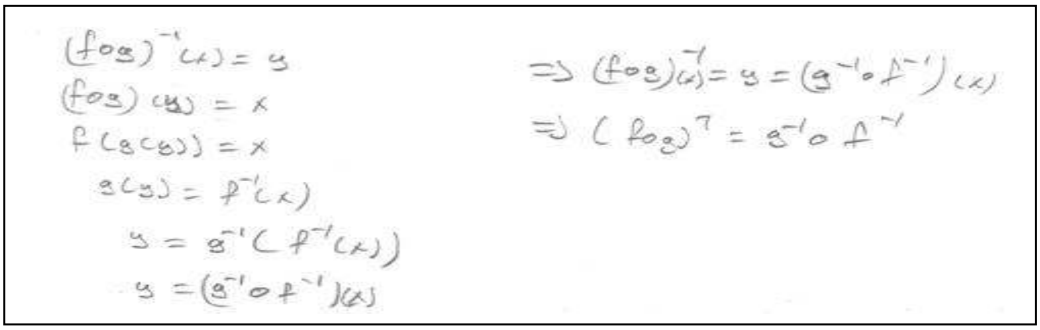
T : Ya da ezberlemiştin problemi, unuttun mu?

ÖA4D: Yolda giderken anlatmıştı arkadaş. Her tarafı a'ya bölmüş olsam, bu arada bakıyorum bölüm de a var mı diye. (İşlem yapıyor) Arkadaşım orada nasıl kareyi aldığımızı söylemişti. Bakıyorum nasıl alabilirim diye. x artı xy nin karesi, o gidecek. Artı eksi b bölü 2a. Öbür tarafta da bu kalmış olsa bunun tamamı kalsa –b bölü 2a. (Yapmaya çalışıyor ama sonuçlandıramıyor) Çıkaramıyorum.

Yazılı sınavda dördüncü problemi boş bırakan ÖA4D arkadaşlarından öğrendiği çözümü klinik görüşmede de anımsayamamış ve problemi sonuçlandıramamıştır. Burada öğretmen adayı dördüncü problemin çözümünü sınıf arkadaşlarından öğrendiğini dile getirerek dışsal şemalardan otoriteyi kullanmıştır. Katılımcı klinik görüşmede benzer biçimde yaptıklarından emin olmayarak yedinci problemi çözmeye başlamıştır. Bazı işlemler yaptıktan sonra ise açıklamasını aşağıdaki gibi yapmıştır.

ÖA4D: Olduğunu gösterin demiş. f bileşke g'nin tersini bu şekilde yazalım.
T : Yalnız bir şey sorabilir miyim?
ÖA4D: Tabi ki.
T : Şurada y ile kastettiğin şey?
ÖA4D: Tanım kümesindeki x'in f fonksiyonuna göre değer kümesindeki y 'yi…
T : Tamam.
ÖA4D: f ve g fonksiyonları için bunun tersi olduğunu gösteriniz demiş. Bunu nasıl gösterebiliriz? Aklıma gelen şey mesele f bileşke g'nin tersi eşittir x desek her iki tarafında tersini aldığımızda f bileşke g eşittir x'in tersi olmuş olur ama x'in tersi mantıklı bir şey değil! Çünkü o bir eleman. x'i eleman olarak aldımızdan…(sessizlik) Eşittir h desek. h bir fonksiyon olsa. f'in tersi olmuş olur. Bunu ezberlemiştim birinci sınıfta ama.
T : Üniversite birde mi?
ÖA4D: Hıhı. Hatta o zaman çözebiliyordum da.
T : Hangi ders için ezberledin?
ÖA4D: Soyut için. Ama sadece ezber değil şey de vardı çözümünü de biliyodum. Özellikle dikkat etmemiz gereken g'nin ters olduktan sonra başka bi biçimde… Ama bunu nasıl ispat edebiliriz? Bir eleman alsak şu şekilde düşünüyorum ama. Mesela x diyelim. Bunu içine nasıl dağıtabiliriz?

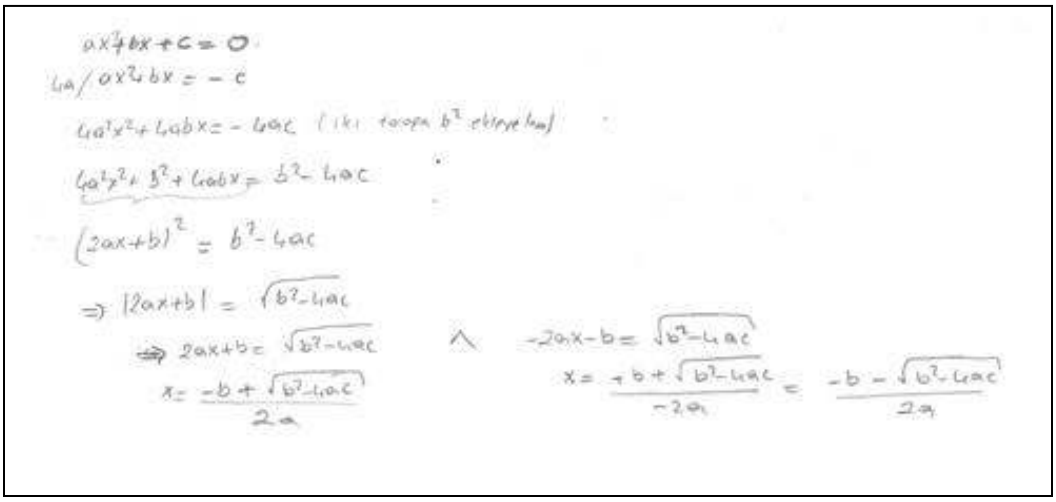
Katılımcı ÖA4D klinik görüşmede yedinci problemde de gösterilmesi istenen eşitliği üniversite birinci sınıfta soyut matematik dersi için ezberlediğini dile getirmiştir. Bunun ardından da ifadenin kanıtını bildiğini belirtmiştir. Fakat katılımcı kanıtı nasıl yapacağını anımsayamamıştır. Bu da katılımcının görüşmede yedinci problemi çözme sürecinde dışsal şemalardan otoriteyi kullandığını göstermektedir. Fakat ÖA4D yazılı sınavda yedinci problemi çözerken analitik şemaları kullanmış ve çözümünü deŞekil 6'daki gibi yapmıştır.




Şekil 6. ÖA4D'nin yazılı sınavda yedinci probleme ait çözümü

Katılımcı ÖA4D yazılı sınavda yedinci problemi çözerken bileşke fonksiyon ve bir fonksiyonun tersini alma kuralını kullanmıştır (bkz. Şekil 6.). Bu da analitik şemalardan aksiyomatik şemaları kullandığına dair bir delil oluşturmaktadır. Oysa ki katılımcının klinik görüşmede bu problemin çözümünü birinci sınıfta ezberlediğini dile getirmesi aslında dışsal şemaları kullandığını göstermektedir.

Benzer biçimde ÖA1C ve ÖA3C'de klinik görüşmede dördüncü problemi çözme sürecinde çözümü daha önce sınıfta gördüklerini dile getirmişlerdir. Fakat her iki katılımcı da yazılı sınavda analitik şemaları kullanmış ve çözümlerini de aşağıdaki gibi yapmışlardır.

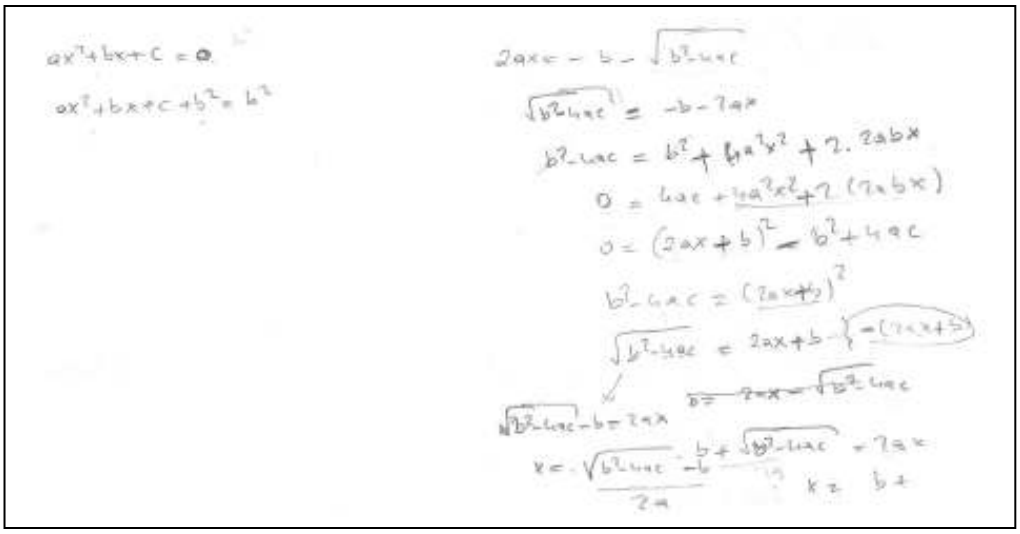



Şekil 7. ÖA1C'nin yazılı sınavda dördüncü probleme ait çözümü

Katılımcı ÖA1C dördüncü problemi yazılı sınavda çözerken önce eşitliğin her iki tarafına 4a ve daha sonra da $b^2$ eklemiş ve zihinsel sürecini kullanarak analitik şemalardan aksiyomatik şemaları kullanmıştır (bkz. Şekil 7.). ÖA1C, yazılı sınavda analitik şemalar ile çözdüğü dördüncü problemde çözümünün açıklamasını ise klinik görüşmede;

> "Şöyle bir şey aklımda kalmıştı ilk dönem biz bunun ispatını yapmıştık genel matematikte. Şimdi aslında çok hoşuma gitmişti ispat. Bu b kare falan ekliyoduk, öyle aklımda kalmıştı. Bunları hangi, ne eklediğimiz aklıma gelmedi ama neden eklediğim. Şimdi tersten gidince aklıma gelir diye. Şimdi geldi de zaten, 2ax eşit eksi b eksi kök içinde b kare eksi 4ac. Eksi b eksi 2ax, buda $ax^2$ artı bx artı c."

Biçiminde yaparak dördüncü problemin kanıtını ilk dönem genel matematik dersinde gördüğünü dile getirmiştir. Ezberlediği kanıtı yazılı sınavda doğru olarak yapan ÖA1C klinik görüşmede sonuçlandıramamıştır. Sadece denklemin köklerinden yola çıkarak denkleme ne ekleyip çıkarması gerektiğini anlamaya çalışmıştır. Daha sonra ise okulda genel matematik dersinde gördüklerini dile getirerek dışsal şemalardan otoriteyi kullanmıştır. Bu süreçte yaptığı çözüm ise aşağıda yer almaktadır.



Şekil 8. ÖA1C’nin klinik görüşmede dördüncü probleme ait çözümü

Dördüncü problemi Şekil 8’deki gibi çözen ÖA1C problemdeki ifadeye ekleme çıkarma yapması gerektiğini dersten anımsadığını dile getrimiştir. Ne ekleyeceğini belirlemek için ise kendisinin de belirttiği gibi yukarıdaki çözümü yaparak kökten yola çıkmış fakat bir sonuca ulaşmayı başaramamıştır.

Dışsal şemaları kullanan ÖA2A ikinci sınıfa devam etmekte olup yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanan katılımcılardandır. Katılımcı ikinci problemi çözerken hem yazılı sınavda ve hem de görüşmede dışsal şemaları kullanmıştır. Katılımcı, görüşmede dışsal şemalardan otorite kanıt şemasını kullandığı ikinci problemde açıklamasını;

> “Şimdi ben şeyi söyleyim. Birebirliği hiç bilmiyorum. Şunu biliyorum sadece. Böyle bişey görmüştük. A, B, C (Venn şeması ile üç küme çiziyor). f, A’dan B’ye, g’de B’den C’ye diyor. Şöyle bişey, şurası f, şu da g. Böyle bişey çizdik. En son lisede görmüştük. Geçen seneden de hatırlamıyorum. g bileşke f fonksiyonunun da A’dan C’ye birebir olduğunu gösteriniz. Birebirlik. Mesela şurdan a, b, c, 1, 2, 3. yani ben burada ispat yapmıyorum. Sadece mantıkla, şurda da x, y, z olsun. Bakın şimdi A’dan B’ye birebirse B’den C’ye birebirse, birebir oldu zaten. Şu şunla, şu şunla şu da şunla.”

Biçiminde yapmıştır. Her ne kadar öğretmen adayının çözümü deneysel şemalardan temel örnekler gibi görünse de kullandığı kanıt şeması dışsal şemalardan otoritedir. Çünkü katılımcı çizdiği venn şemasını lisede gördüklerini dile getirmiştir. Görüşmenin devamında öğretmen adayına birebirliğin ne olduğu sorulduğunda açıklaması aşağıdaki diyalogdaki gibi yapmıştır.

T : Birebirlik nedir buradaki peki?
ÖA2A: (sessizlik)
T : Şu şunla, yani a 1'e, 1 x'e gitti, b 2'ye, 2 y'ye gitti, c 3'e 3 z'ye gitti. Nedir birebirlik?
ÖA2A: Yani şöyle de olur. Şu şuna, şu şuna, örten değil yani birebir. Her değerin karşısında farklı bir değer var. Yani f(x) eşittir x.
T : f(x)=x…
ÖA2A: Değil mi yani?
T : Bu birebirliğin tanımı mı?
ÖA2A: Hocam buydu heralde birebir. Birebir, A'dan B'ye, a 1'e gitsin, b 2'ye gitsin, c de 3'e gitsin. Birebirlik, her bir değerin karşısında farklı bir değer var. Yani mesela a 1'e gitseydi, b de 1'e gitseydi o zaman birebir olmazdı.
T : Neden birebir olmazdı?
ÖA2A: Çünkü her bir değerin karşılığında farklı bi değer var. Burada B'de birebirmiş. Dolayısıyla a'da farklı bir değere gitcek.

Burada katılımcı yaptığı birebirlik tanımı ile çelişmektedir. Çünkü öğretmen adayı birebirliğin tanımını sözel olarak doğru vermekte fakat matematiksel olarak tanımlarken f(x)=x şeklinde sabit fonksiyon olarak ifade etmektedir.

ÖA2A: Şöyle. Şöyle bi rakam yazalım. Değer verebiliriz. a 2'ye gitmiş, 2 de y'ye. c 3'e gitmiş, 3'de z'ye. her eleman farklı bi elemana gidiyo. O yüzden.
T : O nedenle mi g bileşke f birebirdir?
ÖA2A: Evet, o yüzden öyle düşündüm.
T : Başka bir kuralı var mı peki birebirliğin? Yani birebir olması için başka ne gerekiyor?
ÖA2A: Vardır, derste gördük ama hatırlamıyom şu an. Yani biz bunu kitapta da gördük, ya zaten düz mantık, mantıklı ama hatırlamıyom şu an. Ben bunu mantıksal yapıyom. Ama (sessizlik).
T : Matematiksel olarak mı ifade edemiyorsun?
ÖA2A: Evet işte. Ona da çalışmam lazım. Mantığa dayanıyo, inanın ki mantığa dayanıyo. Ama ezberlemediğim için yapamıyorum.
T : Neyi, birebirliği mi ezberleyeceksin?
ÖA2A: Hayır ezberlemiycem. Bi iki defa baksam aklımda kalır.

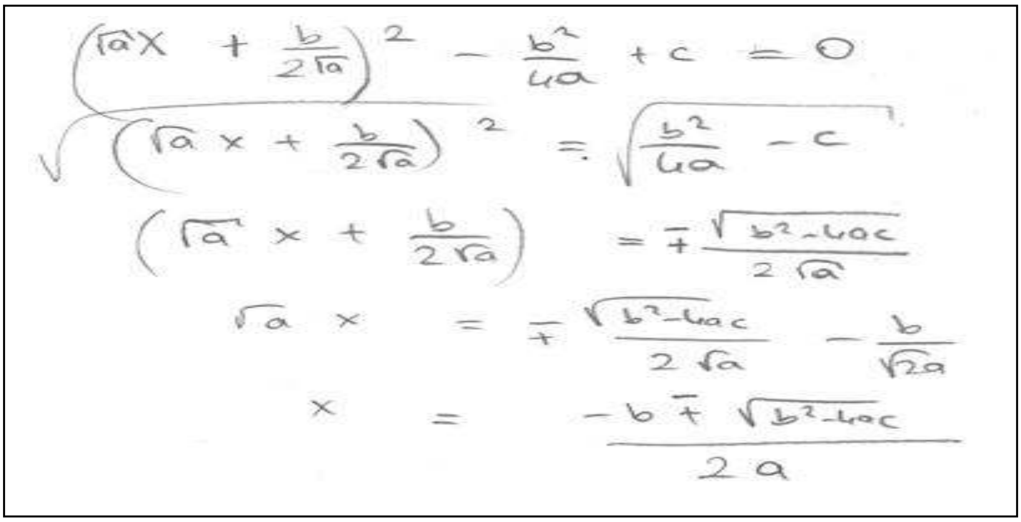
Öğretmen adayı sözel olarak ve venn şemasını kullanarak g bileşke f fonksiyonunun birebirliğini açıklamaktadır fakat yine de yaptığı açıklamadan çok emin değildir. Bunun yanı sıra tanımı derste gördüklerini fakat anımsamadığını ifade etmektedir.

Katılımcılardan ÖA2A altıncı problemi klinik görüşme sırasında çözememiştir çünkü birim fonksiyonun tanımını bilmemektedir. Fakat katılımcı sorulan ifadeyi daha önce gördüğünü;

ÖA2A: Neyse hocam ya yapamadım bu soruyu. (sessizlik) Zaten yapamadım da bu soruyu.
T : Tamam şimdi yapamaz mısın?
ÖA2A: Bu şey birbirine uymuyor ki. Açılımı hiç görmemişim. (sessizlik) Sanki biz geçen sene bunun ispatını gördük soyutta.
T : Soyutta mı görmüştünüz?
ÖA2A: Tam bakmadığım için hatırlamıyorum şimdi.

Biçiminde dile getirmiştir. Katılımcı eşitliğin doğruluğunu gösteremesede soyut matematik dersinde kanıtını gördüğünü dile getirmiştir. Bu da katılımcıya göre eşitliğin doğru olması için yeterli olmaktadır. Bu ise katılımcının dışsal şemalardan otoriteyi kullandığını göstermektedir.

Savunmasını dördüncü problemde otoriteye dayandıran katılımcılardan birisi de ÖA3C kodlu katılımcıdır. Katılımcılardan ÖA3C dördüncü problemin kanıtını yazılı sınavda analitik şemaları kullanarak yaparken klinik görüşmede dışsal şemalarla yapmıştır. Katılımcının yazılı sınava ait çözümü aşağıda yer almaktadır.



Şekil 9. ÖA3C'nin yazılı sınavda dördüncü probleme ait çözümü

ÖA3C yazılı sınavda dördüncü problemi çözerken eşitliğin her tarafını $\sqrt{a}$'ya bölerek işlemlerini tamamlamıştır (bkz. Şekil 9.). Katılımcı yazılı sınavda analitik şemalardan aksiyomatik şemaları kullanıyor gibi görünsede klinik görüşmede ÖA1C gibi dördüncü problemin kanıtını derste gördüğünü dile getirmiş ve açıklamasını aşağıdaki gibi yapmıştır.

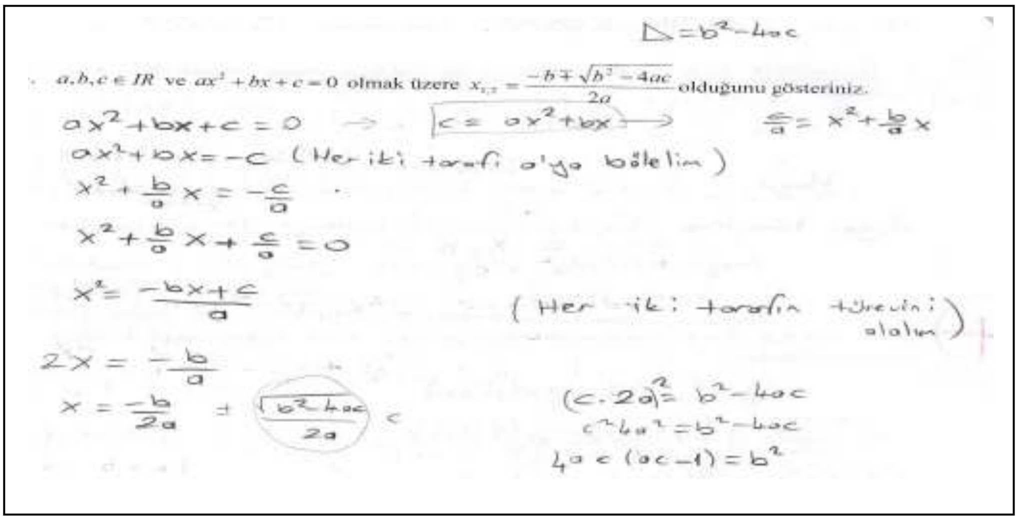
ÖA3C: Aaaaa! Ben bunu hatırlıyorum yaa, X Hoca'nın dersinden.
T : Yapmış mıydınız?
ÖA3C: Evet, evet, evet yapmıştık.
T : Hangi derste yaptınız?
ÖA3C: Hangi dersimize gelmişti? Özel Öğretim Yöntemleri 1 sanırım, tam emin değilim ama.
T : Geçen sene mi?
ÖA3C: Geçen dönem.
T : İlk dönem yani.
ÖA3C: Hıhı, evet ilk dönem. Bunun aynısıydı, bi plan yapmıştı, kolaydı da göstermek.
T : Sen bunu dersten hatırlıyorsun yani.
ÖA3C: Hıhı, evet, hatırlıyorum. Ama şimdi yapabilir miyim bilmiyorum? Ekleme çıkarma yapıp tam kareye tamamlıyoduk.
T : Bunu da mı dersten hatırlıyorsun?
ÖA3C: Tabi tabi ordan hatırlıyorum.

Bu süreçte ÖA3C problemi nasıl doğrulaması gerektiğini ve hangi yolu izlemesi gerektiğini özel öğretim yöntemleri dersinden anımsadığını dile getirmiştir. Diyalogun devamında ise problemi aşağıdaki biçimde doğrulamıştır.

T : Peki sen daha önce bunun üzerinde hiç düşündün mü? Bu nasıl bulunur diye merak ettiğin oldu mu?
ÖA3C: Yoo hiç öyle bişey düşünmedim. Hep bize bu doğrudan verildiği için, ezberden biliyorum zaten. Şimdi şöyle yapmıştım. Allah'ım nasıl? Şunu a kare falan yapıcam da. Hatırlıycam da, neyse tamam tamam yapıcam. a, evet a, nasıldı ya? Ama şimdi deniycem.
T : Tamam dene, istersen başka kâğıt veririm sana.
ÖA3C: (mırıldanarak işlem yapıyor) Nası yapmıştım yaa, daha öncekinde yapmıştım. $ax^2$ gelir, $ax^2$ gelir. Burada neyi yanlış yazdım, dur. (sessizce işlem yapıyor) x'in gelmesi lazım buradan. x nasıl geliyodu, neydi yaa? $ax^2$, evet, evet, evet. $ax^2$ artı 2 evet buradan da x'i alıcam, bölü 4a artı c eşittir sıfır ( $\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{\sqrt{a}.2}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=0$ ). Şimdi bunun karesi olacak. $b^2$ bölü 4a eksi c. Ben bunu çıkarıyorum. Ondan sonra 2b'ydi ya. Buradan x kök a artı b bölü 2 kök a eşittir b kare eksi 4ac bölü 4a ( $\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$ ). Şimdi bunun karekökünü alıyorum. Evet, karekökünü alıyorum. Doğru mu yanlış mı?
T : Neden doğru mu yanlış mı diye sordun kendi kendine?
ÖA3C: İşlemlerimde bi hata var mı diye baktım. x karekök a artı b bölü 2 karekök a eşittir. Ne yaptım ben? Tamam. Burada artı eksi.
T : Neden artı, eksi işareti koydun?
ÖA3C: (gülüyor) Her iki tarafın da karekökünü alıyorum da o yüzden. Karekök b kare eksi 4ac bölü 2 kök a, bu noldu? ( $\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)=\frac{\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}$ )
T : Bilmiyorum.
ÖA3C: (mırıldanıyor) Ay başım dönüyo artı, Allah'ım. Çalıştır, çalıştır. Yok, yok böyle. Tamam ya böyle olcak bu. Şimdi bunu yazdık mı?
T : Evet, tamam yazdık Ebru.
ÖA3C: Biz neyi bulduk, x'i bulduk. x karekök a eşittir şunu şuraya atarsak, eksi b artı eksi karekök b kare eksi 4ac bölü 2 karekök a ( $x\sqrt{a}=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2\sqrt{a}}$ ). Sonra her iki tarafı karekök a'ya böldüğümde x eşittir eksi b artı eksi karekök b kare eksi 4ac bölü 2a ( $x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ). Kökü bulduk.
T : Peki bu birebir X hocanın dersinde yaptığınız şekli mi?
ÖA3C: Evet, evet, evet.
T : Ezberledin mi yani oradan?
ÖA3C: Ezber, ezber, ezberlemedim de mantıken yapılır bu soru ya. Şimdi bakın buraya ben bunu nası ezberleyim.
T : O halde derste yaptığınız sana bir yol gösterici mi oldu?
ÖA3C: Evet, evet bana yol gösterdi. Yani hem ezberlemiş olsam böyle çok düşünmez doğrudan yapardım, o kadar uğraştım. Ama tam kareye tamamlamam gerektiğini dersten hatırlıyorum, yani o bana bi ipucu oldu, yol gösterdi.

Görüşmenin sonunda öğretmen adayına kanıtı ezberleyip-ezberlemediği sorulduğunda ise ezberlemediğini, sadece derste yapılmış olmasının ona bir yol gösterici olduğunu dile getirmiştir. Oysa öğretmen adayı burada kanıta başlarken derste gördüğü yolu kullanarak dışsal şemalardan otoriteyi kullanmıştır. ÖA3C gibi yazılı sınavda da kanıtı sonuçlandıran ÖA4C klinik görüşmede sonuçlandıramamış ve dördüncü problemin kanıtını daha önce derste gördüğünü "İlk sene gördüğümüz için unutmuşluğumda olabilir ama mantığını biliyordum da hiç daha önce ispatlamamıştım." ifadesi ile belirterek dışsal şemalardan otoriteyi kullanmıştır. Bu ifadeler ise dördüncü problemi yazılı sınavda da analitik şemaları kullanarak çözen ÖA3C ve ÖA4C'nin aslında analitik şemaları kullanmadıklarına, dışsal şemaları kullandıklarına dair bir delil oluşturmaktadır.

ÖA2C yazılı sınavda ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmasına rağmen dördüncü problemi çözerken yazılı sınavda ve görüşmede dışsal şemaları kullanmıştır. Katılımcının yazılı sınavda yaptığı çözümü aşağıda görülmektedir.

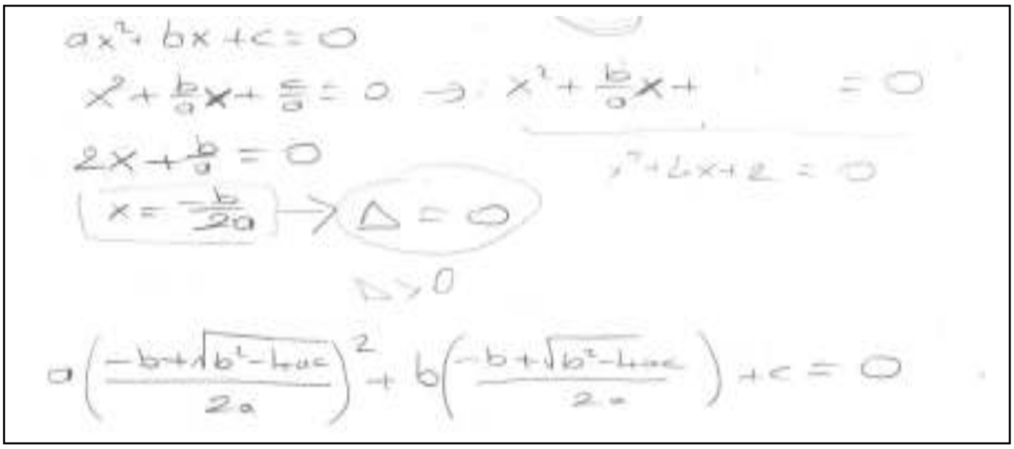



Şekil 10. ÖA2C'nin yazılı sınavda dördüncü probleme ait çözümü

Katılımcı yazılı sınavda dördüncü problemi çözerken önce eşitliğin her iki tarafını a'ya bölmüş ve daha sonra da her iki tarafın türevini almıştır (bkz. Şekil 10.). ÖA2C klinik görüşme sürecinde dördüncü problemin kanıtını derste daha önce gördüğünü ise "Ben bunun ispatını daha önce gördüğüm halde ilk aklıma gelen x'i yalnız bırakıcam sonuçta." şeklinde ifade etmiştir. Bunun devamında ise açıklamasını;

> "O yüzden her tarafı a'ya böldüm. b bölü a, x, c bölü a eşittir sıfır. Sonra burada bişey ekleyip çıkarıp tam kare yapmam gerekiyodu. Benim öyle tamsayılarla aram pek iyi değildir. Hani yani işlem falan yapmayı beceremedim. O yüzden x'i yalnız bırakmaktan vazgeçip türev aldım burada. Türev alınca x'ler gidicek, x'in türevini alırsam, bu da sıfır olucak. O zaman 2x artı b bölü a eşittir sıfır. Buradan x eşittir eksi b bölü 2a. Tamam sonuca baktığımda eksi b bölü 2a tuttu ama şu kök delta ( $\Delta$ ) gelmiyo. Türevde ne kayboldu anlamadım ben (sessizlik). Bıraktım bende. "

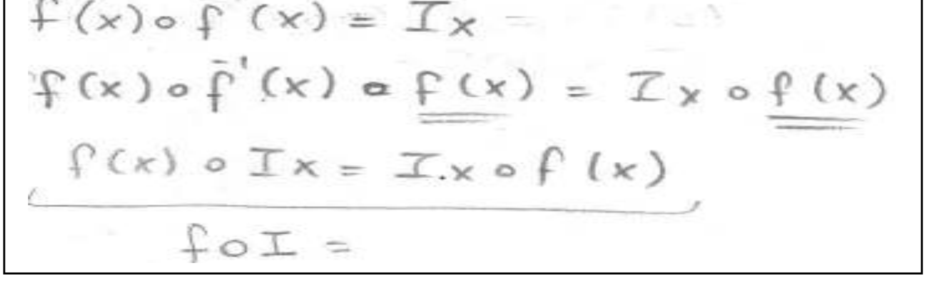
Biçiminde yapmıştır. Bu süreçte öğretmen adayı x'i yalnız bırakmak için denklemin türevini almış fakat buradan bir sonuca ulaşamamıştır. Bu süreçte ÖA2C'de kanıtı dersten anımsadığını dile getirdiği için dışsal şemalardan otoriteyi kullanmıştır. Görüşmede çözümünü ise aşağıdaki gibi yapmıştır.




Şekil 11. ÖA2C'nin klinik görüşmede dördüncü probleme ait çözümü

ÖA2C dördüncü problemi Şekil 11'deki gibi türev yardımıyla çözmeye çalışmış fakat problemi sonuçlandıramamıştır. Burada katılımcının türev alma nedeni ise x'i yok etmektir. Görüldüğü üzere katılımcı dördüncü problemi çözerken hem yazılı sınavda ve hem de görüşme de çözümünü aynı biçimde yapmıştır. Bu süreçte ise katılımcı dışsal şemalardan otoriteyi kullanmıştır.

ÖA4B kodlu katılımcı dördüncü sınıfa devam etmekte olan ve yazılı sınavda ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanan öğretmen adaylarındandır. Katılımcı altıncı problemi çözerken hem yazılı sınavda ve hem de görüşmede dışsal şemaları kullanmıştır. Aşağıda yazılı sınavda yaptığı çözüm bulunmaktadır.




Şekil 12. ÖA4B'nin yazılı sınavda altıncı probleme ait çözümü

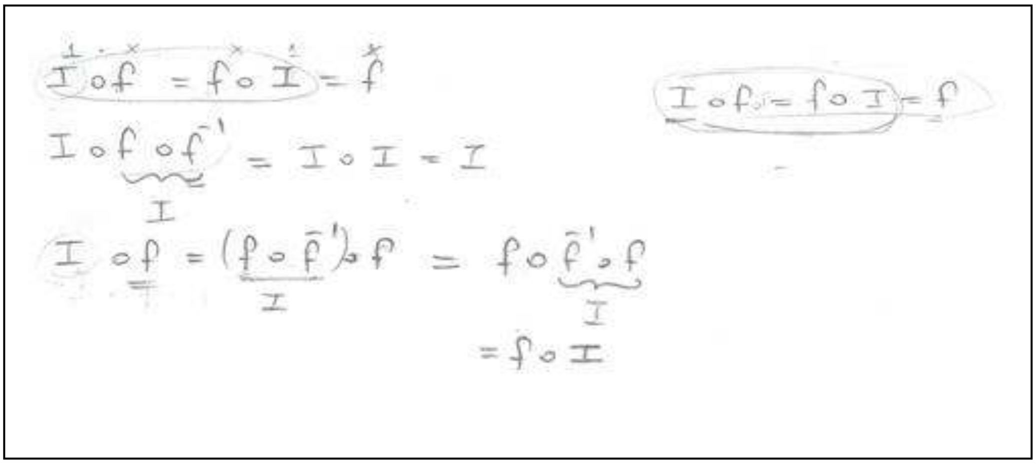
Şekil 12'de ÖA4B'nin yazılı sınavda altıncı problemi nasıl çözdüğü görülmektedir. Katılımcı yazılı sınavda problemi çözerken f ile f fonksiyonunun tersinin bileşkesinin birim fonksiyona eşit olduğunu belirterek çözüme başlamış fakat sonuca ulaşamamıştır. Aşağıda bu katılımcının görüşme diyalogundan alıntı ile çözümüne yer verilmiştir. ÖA4B görüşmede açıklamasını önce;

ÖA4B: Bu soru şey tamam hatırladım. Bu tip sorularda benim, vermiş olduğu bir şey. Birim fonksiyon bileşke f eşittir f bileşke birim fonksiyon, o da eşittir f. Bunun doğru mu yanlış mı diye sorsalar kesinlikle biliyorum doğrudur.
T : Nereden biliyorsun?
ÖA4B: Öyledir birim fonksiyon. Birim fonksiyonu 1 gibi düşünürsek f fonksiyonunun yerine x yazdığımızda 1 ile herhangi bir sayıyı çarptığımızda mutlaka x'i elde ederiz.

Biçiminde deneysel kanıt şemalarından temel örnekler ile yapmıştır. Fakat görüşmenin devamında açıklamasını;

ÖA4B: Ona dayanarak da bunu bilmeyen biri biraz düşünse bulabilir. Burada ne yapıyorum ben, olduğunu gösteriniz, ispatlıyorum. Birim fonksiyon çarpı f fonksiyonu bileşke f'in değilini ekliyorum. f bileşke f'in değilibana daima birim fonksiyonu verir. Bunu biliyorum. I bileşke I da bana I'yı verir ama ben başka bir şeyi elde ettim. Niye böyle çıktı? Olmadı. Nasıl yani ya? (sessizlik) Durdurmak mümkün mü biraz düşünsem? Çok düşüncem gibi geldi de bana.
T : Düşün tabi.
ÖA4B: (sessizlik) Şöyle mi yaptım acaba. Bunu ne yapıyoduk? Aklıma gelen... Bileşke fonksiyon yerine şu şekilde fonksiyon yazmış olabilir miyim? Bu şekilde yazdıysam eğer yani f bileşke f'in değilibirim fonksiyona eşit olduğu için birim fonksiyon yerine f bileşke f'in değiliyazıyorum bileşke f yani aynen devam ettiriyorum eşittir f bileşke f'in değili bileşke f. Burası da zaten birim fonksiyona eşit olduğu için f bileşke birim fonksiyon, yani o yüzden değiştirmenin bir sakıncası yok yani değişebilir. Birim fonksiyon bileşke f fonksiyonu eşittir f bileşke birim fonksiyona ulaştım ama fonksiyona nasıl ulaşacağım. Birim fonksiyon bileşke f fonksiyonu…(mırıldanıyor, sessizlik).
T : Şunu gösterdin I bileşke f eşittir f bileşke I.
ÖA4B: Onu gösterdim. Ama diğer tarafa (sessizlik). Çok kolay bir şeydi ama hatırlamıyorum şimdi ama.
T : Nereden hatırlamıyorsun? Daha önce gördün mü?
ÖA4B: Evet. Soyutta gördük ama…
T : En son fonksiyonlar konusunu soyut matematikte mi gördün?
ÖA4B: Bunu soyut matematikte gördüm hocam.

Şeklinde yaparak verilen ifadenin kanıtını daha önce soyut matematik dersinde gördüğünü fakat anımsamadığını dile getirerek dışsal şemalarından otorite kanıt şemasını kullanmıştır. Öğretmen adayı için bu ifadeyi derste görmüş olmak doğru olması için yeterli olmuştur. Çünkü ÖA4B eşitliğin bir tarafını gösterip diğer tarafını göstermek için herhangi bir çaba göstermeden daha önce derste gördüğünü ifade etmiştir. Katılımcının görüşmedeki çözümü aşağıda yer almaktadır.



Şekil 13. ÖA4B’nin klinik görüşmede altıncı probleme ait çözümü

Şekil 13’de ÖA4B’nin çözümü yer almaktadır. Katılımcı eşitliğe f fonksiyonunun tersini ekleyerek doğrulamaya çalışmış fakat doğrulaması için yeterli olmamıştır. Bunun üzerine ÖA4B bu eşitliğin kanıtını daha önce derste gördüğünü fakat şu anda anımsamadığını dile getirmiştir.

ÖA3A kodlu katılımcı üçüncü sınıfa devam etmekte olan ve yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanan katılımcılardandır. Katılımcı yedinci problemi çözerken de hem yazılıda ve hem de görüşmede dışsal şemaları kullanmıştır. ÖA3A görüşmede problemi çözerken farklı birkaç yol denemiş ve bu çözümler onun için yeterli olmuştur. Bu çözümleri de aşağıdaki gibi yapmıştır.

ÖA3A: (sessiz bir biçimde işlem yapıyor) Bu soruda ben şöyle düşündüm. İlk önce hani şu tanımı alırız, şunu aldıktan sonra. Şunu yine hani şu yukardaki gösterimde yerine yazınca, mesela herhangi bir g(x) fonksiyonu bi değere eşit olcak ya, onun geldiği değer a gibi bi değer. Hani sabit fonksiyon olmuş gibi oluyo ama. Hani şurda f(a), mesela f(a)’nın tersini sormuş oluyor. Buna da b gibi bi değer atamış olalım. O zaman f(b) eşittir a oluyo dedim. Yani öyle bi fonksiyonlar tanımlanmalı ki bunlar hangi kümedeyse işte buradan alınan değer buna gittiğinde tersinde bu vermeli. Aslında bu soruyu pek çözemedim ben. Zaten biraz böyle düşünüp bıraktım kağıtta ama. Ya bu eşitliğin çıkması için buradan gidiyim dedim, çıkamadım. Bi de sondan gidiyim dedim (sessizce işlem yapıyor). Ben dedim ki f(b) eşittir a olsun. O zaman burada g’nin tersinden b gelir. Aynı şekilde bu seferde, yani şunların değeri olduğunu kabul edersek buradan sonuç x çıkıyo.

T : Bunun doğru olduğunu kabul edersek derken, burada g(x)’i b olarak, f(b)’yi de a olarak sen tanımladın. Zaten onları sen tanımladın.

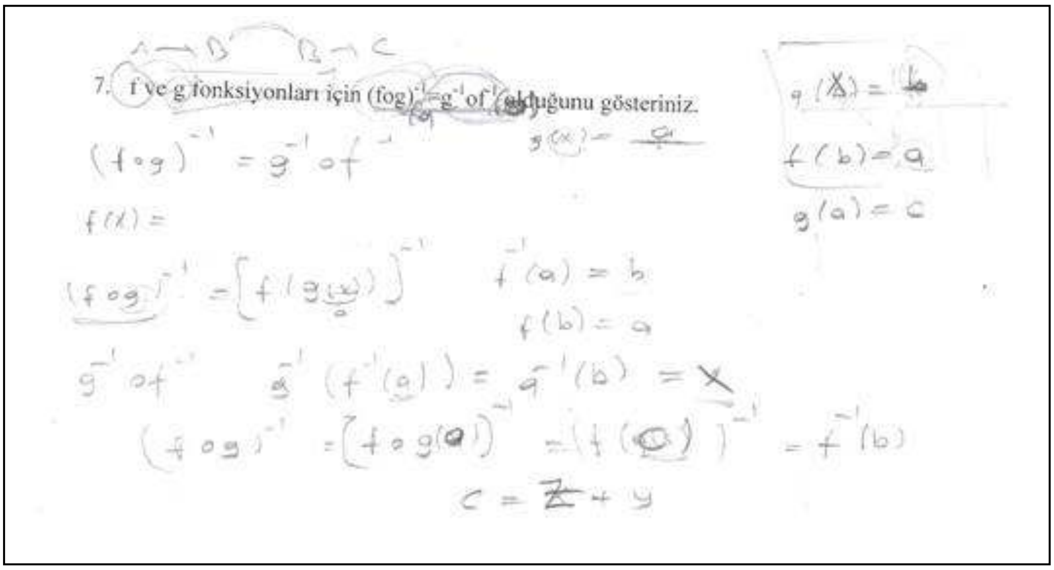
ÖA3A: Evet tanımladım. O zaman eşitliğin şu tarafına bakarsak bunun sonucu x olur. Bu tarafına bakarsak o zaman (sessizce işlem yapıyor). Şimdi bunu şu şekilde gösterdikten sonra g(x) b’ye eşittir. O zaman f(b)’nin tersini soruyo bana. Buradan tersi, şunun x’e eşit olduğunu göstermem lazım benim. Ama şöyle bişey de var. Buradan başladığım fonksiyon yani şurdaki fonksiyon ile şurdaki fonksiyon birbirine eşit olur değil mi? Şurda x’leri açarsam şurda da x’leri açmam lazım. Ama şurda a ile başladım, o zaman şurda a’yı almam lazım, şurda da.

T : Ama g(a) diye bir şey tanımlamadın.

ÖA3A: Evet, işte. Buradan çıkamadım tanımlamalarla o zaman. Peki tanımlarsak nolcak? Bu sefer daha çok karışcak. O zaman f(g)’yi de bilmiyorum çünkü.

T : Başka bir şekilde gösteremez misin acaba?
ÖA3A: Hangisini şunu mu?
T : Hayır problemde sorulan bu eşitliği.
ÖA3A: Valla ben genellikle böyle soruların, eşitliklerin gösteriminde şey yapıyorum. Şurdan gidiyorum. Eğer çıkmaza girersem tersten gitmeyi tercih ediyorum. Ama burada ikisinde de başarılı olamadım. Neyle ulaşabilirim başka ki. Aklıma gelmiyo ya.
T : Farklı bi çözüm gelmiyor mu aklına?
ÖA3A: Ya şu anda gelmiyo.
T : Bu yaptıkların doğru geliyor mu sana?
ÖA3A: Ya aslında şu aşamada bi sorun yok yani. Şu bilgilerin şöyle çevriminin yanlış olduğunu düşünmüyorum ama. Şurada mesela b, a falan dediğimde bir sabite eşitlemiş gibi gözüküyo olabiliriz ama mesela ama sonuçta şurdaki ifadenin tamamına b dedim. Asıl ifade bi sabit değil sadece gösterim olarak ifadenin şekli ama. Şurda birkaç daha tanımlı ve bunun hangi kümelerden. O zaman bunun ortak tanımlı, hangisinden tanımlı. Mesela f A'dan B'ye, g B'den C'ye gibi bi durumu olması lazım ki, hani bi ortak kümeleri olması lazım ki. Çünkü şurda harflerin birbirleriyle şeyleri yeterli olmuyo. Ama hatırladığım kadarıyla da bunun denklemlerin değişik soruları verildiğinde böyle bi tanımlama şart koşuluyo mu onu da hatırlamıyorum.
T : Yani bu verildi size öyle mi?
ÖA3A: Evet.
T : Nerede verilmişti?
ÖA3A: Lisede. Kolaylık olsun diye, hani ÖSS sorularını falan çözelim diye.

Yukarıda kullandığı bu farklı çözüm yollarına rağmen katılımcı, problemde verilen ifadenin kendisine daha önce lisede tanım olarak verildiğini dile getirmiştir. Bu tanımında verilme nedenini ise ÖSS sorularını çözmekte kolaylık sağlaması olduğunu ifade etmiştir. Bu da öğretmen adayının aslında dışsal şemalardan otoriteyi kullandığını göstermektedir.



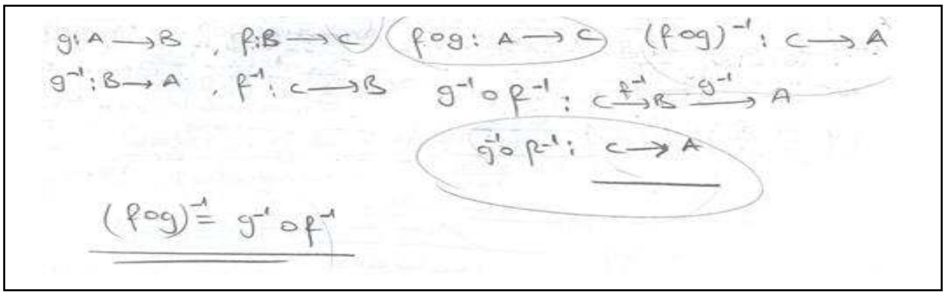
Şekil 14. ÖA3A'nın klinik görüşmede yedinci probleme ait çözümü

ÖA3A, yedinci problemi çözmek için farklı çözüm yollarını kullansa da aslında bu eşitliği liseden bildiğini dile getirmiştir (bkz. Şekil 14.). Problemi çözerken ise fonksiyonun tersini alma kuralını kullanmaya çalışmıştır. Katılımcı yazılı sınavda da dışsal şemaları kullandığı yedinci problemde çözümünü benzer biçimde yapmıştır.

Çalışmaya katılan bazı öğretmen adayları problemleri çözerken anlamını bilmeden ezberledikleri tanımları ve kuralları kullanmışlardır. Bunlardan ÖA3D üçüncü sınıfa devam etmekte olan bir öğretmen adayıdır. Katılımcı yazılı sınavda bütün şemaları eşit oranda kullanmıştır. Katılımcının görüşmeye başlandığında son derece heyecanlı olduğu gözlenmiştir fakat görüşme ilerledikçe heyecanını yenmeyi başarmıştır. Hem yazılı sınavda ve hem de görüşmede dışsal şemaları kullandığı yedinci problemi görüşmede okuduktan sonra;

> "f ve g fonksiyonları için bunu da kuraldan. Aslında bunların hepsini kural olarak biliyorum. Bunu da nasıl yapabilirim? Kural derken hani ilk terim değil de ikinci terim tersi alınırken böyle yapıldığını bildiğim için öyle oluyor diyorum aslında ben. O da g'nin tersinde f'in tersinde bileşke f(x) oluyor. Şuraya mesela bişey desem, yine ben A desem. f'in tersinde x'e A desem ne olur? g'nin tersinde A eşit olduğu yerde f(x) ne olur? Burada 1 bölü A olur dimi? 1 bölü A değil miydi ya? Tersinin tersi, bunun tersi 1 bölü A tamam doğru. f(x) burada 1 bölü A. g'nin tersinde A da burada da eşitlediğim bir şey yok gerçi g'nin tersinde A şuraya eşit dimi? En son hali bu da g'nin tersinde bileşke f'in tersi olmuş olur. İkisi de g'nin tersinde, biri A içerisi, biri de y'nin tersinde f'in tersinde x. Yine A f'in tersinde x olmuş oluyo. Ama, şu yaptığımın aynısı zaten. Buradan da f(x)'in A, 1 bölü A olduğunu buluyorum, ne işime yarıyo?"

Problemde verilen ifadenin bir kural olduğunu dile getirmiş ve yine problemi bir kural yardımıyla çözmeye çalışmıştır. Fakat daha önceden ezberlediği kuralı doğru biçimde anımsayamadığı için problemi çözerken karşısına çıkan bazı durumların ne işine yarayacağına karar vermekte zorlanmıştır. Bu da gösteriyor ki katılımcı anlamını bilmeden ezberlediği kuralları kullanarak dışsal şemalardan otoriteyi kullanmıştır. Katılımcı yedinci problemde yazılı sınavda da dışsal şemaları kullanmasına rağmen daha farklı bir yol izlemiştir. ÖA3D'nin yazılı sınavda yedinci probleme ait çözümü aşağıda yer almaktadır.




Şekil 15. ÖA3D'nin yazılı sınavda yedinci probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA3D yedinci problemi yazılı sınavda çözerken $(fog)^{-1}$ ve $g^{-1}of^{-1}$'nin tanım ve değer kümelerini tanımlamışdır (bkz. Şekil 15.). Bunun ardından da tanım ve değer kümeleri birbirine eşit olduğu için problemde verilen ifadenin de eşit olduğunu yazmıştır. Oysa ki iki fonksiyon ifadesinin birbirine eşit olması için sadece tanım ve değer kümelerinin birbirine eşit olması yeterli olmamaktadır.

ÖA1A birinci sınıfa devam etmekte olan öğretmen adaylarından birisidir. Öğretmen adayı yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanmıştır. Katılımcının görüşmeye ilk başlandığında tedirgin olduğu gözlenmiştir. Fakat daha sonra katılımcının heyecan ve tedirginliği geçmiş ve görüşmenin devamında rahat ve kendisinden emin bir tavır sergilediği gözlenmiştir. Katılımcı birinci problemi çözerken hem yazılı sınavda ve hem de görüşmede dışsal şemaları kullanmıştır. ÖA1A görüşmede aşağıdaki açıklamayı yaparak birinci problemin savunmasında dışsal şemalardan otorite kanıt şemasını kullanmıştır. Öğretmen adayı birinci problemi çözmek için öncelikle fonksiyonun tanımını aşağıdaki biçimde vermiştir.

"Bir ifadenin fonksiyon olabilmesi için tanım kümesindeki değerlerin bu ifade de yerine yazıldığı zaman reel kümesinde görüntü kümesinde de olması gerekir bence. Bu ifade de rakamlardan birini yerine koyduğumuz zaman sağlamıyor. Fonksiyon değildir dedim."

ÖA1A fonksiyonların tanımı ile ilgili birinci problemde bildiği tanımı dile getirerek problemde verilen ifadenin neden fonksiyon olmadığını açıklamaya çalışmıştır.

T : Peki bir ifadenin fonksiyon olmaması için senin yaptığın tanımlama yeterli mi?
ÖA1A: Yani. İllaki tam değildir ama yeterli hatırladığım kadarıyla.
T : Nerden kaldı bu tanım aklında? Nereden hatırladığın kadarıyla?
ÖA1A: Böle kalmış aklımda. Tanım kümesindeki ifadelerin karşılığının değer, görüntü kümesinde de yazdığımız zaman bulunması gerekiyor.
T : Peki neden öyle düşünüyorsun?
ÖA1A: Öyle öğrendik.
T : Öyle öğrendik derken nerden öğrendin.
ÖA1A: Daha önce gördüğüm kadarıyla da öyle, genel matematik dersinde de gördüğüm kadarıyla öyle anlatıldı. Sınıfta ek bir şeylerde anlatılmıştır ama benim hatırladığım kadarıyla bu kadar.

Öğretmen adayı verilen ifadenin fonksiyon olmama nedenini daha önceden öğrendiği tanıma bağlamaktadır. Oysa öğretmen adayı daha önce genel matematik dersinde de gördüğü tanımı yanlış anımsamaktadır. Bunun en önemli nedeni tanımı zihninde oluşturmasından ziyade ezberlemiş olması olabilir.

T : Yani diyorsun ki bunların görüntü kümesinin olması fonksiyon olması için yeterli.
ÖA1A: Tabi. Bize verilen küme bu sonuçta. Buradaki ifadeleri yerine yazdığımızda, bir sınırlama belirtmemiş bize, sadece doğal sayılar kümesi falan dememiş.
T : Peki sen bir küme tanımlayabilir misin?
ÖA1A: Fonksiyon kümesi mi?
T : Hayır bunun için, şu ifade için fonksiyon olabilen bir küme tanımlayabilir misin?

ÖA1A: Reel sayılar kümesi bunun için tanımlanabilir.
T : Bu durumda fonksiyon olur mu peki?
ÖA1A: Evet.
T : Gösterebilir misin peki onu?
ÖA1A: Reel sayılar dersem tanım kümesi burası ( $\{1,2,3,......,100\}$ ). Tanım kümesi burası, görüntü kümesi de reel sayılar kümesi yapılırsa, hani reel sayılarda tanımlanan bir ifade olarak söylersem bu o zaman fonksiyon olabilir.
T : Peki fonksiyon olabilmesi için sadece bir kümeden bir kümeye tanımlanması mı gerekiyor? Herhangi bir koşul ya da şart gerekiyor mu?
ÖA1A: Gerekiyordur. Ne gerektiğini hatırlamıyorum ama gerekiyordur.

ÖA1A yaptığı tanımlamadan hala çok emin değildir. Bu nedenle de başka koşullarıda sağlaması gerektiğini ama bu koşulların neler olduğunu anımsamadığını dile getirmektedir. Bu ifadesi ise öğretmen adayının daha önce öğrendiği tanımı ezberlediğini ve kendisinin yapılandırmadığını göstermektedir. Bu ise yaptığı açıklamayı anlamını bilmeden bir kurala dayandırdığı için dışsal şemalardan otorite kanıt şemasını kullandığını göstermektedir.

ÖA1A yedinci problemi doğrulama sürecinde de yazılı sınavda ve görüşmede dışsal şemaları kullanmıştır. Görüşmede açıklamasını önce;

ÖA1A: Yok hayır iyiyim aslında. Yok ya çözemiyorum. (Sessizlik sonra yapmaya başlıyor) f fonksiyonu A'dan B'ye bir fonksiyon olsun. g'de B'den C'ye fonksiyon olsun. f bileşke g de C'den A'ya oluyor dolayısıyla. f'in tersi B'den A'ya, g'nin tersi de C'den B'ye bir fonksiyon. Şurdan da $g^{-1}$ bileşke $f^{1}$ de A'dan C'ye olur. Bunun ($(fog)^{-1}$) tersi A'dan C'ye oldu. Yok olmadı, C'den A'ya tamam. A'dan C'ye, bunun tersini aldığımızda A'dan C'ye bir fonksiyon. Eşit olur.
T : Eşit olur derken, neden?
ÖA1A: Başka ne olabilir ki?
T : Açıklayabilir misin?
ÖA1A: Tamam. f'e A'dan B'ye bir fonksiyon dedim, dolayısıyla tersini aldığımızda B'den A'ya bir fonksiyon olur.
T : Neden A'dan B'ye iken tersi B'den A'ya oluyor?
ÖA1A: Görüntü kümesi ile tanım kümesi yer değiştiriyor tersini aldığımız zaman. Sonra g fonksiyonu da B'den C'ye olur dedim. Dolayısıyla g'nin tersi aynı şekilde C'den B'ye oluyo. Verdiklerimden fog fonksiyonunu yazdım, nerden nereye, C den A ya bir fonksiyon fog fonksiyonu. Verdiği tanıma göre yaptım, bunun tersi A'dan C'ye bi fonksiyon oluyo, tersini aldığımızda. Burda da g'nin tersi de f'in tersi de, hani eşit olduğunu söylemiştim göstermek için, baktım A'dan C'ye bi fonksiyon bu. Dolayısıyla A'dan C'ye, eşit.
T : Peki verilmiş olan bu ifadenin birbirine eşit olması için bu bileşkenin ayrı ayrı aynı kümeden kümeye tanımlanmış olması yeterli mi? Bu eşitliğin doğru olduğunu gösterir mi?
ÖA1A: (sessizlik)
T : Burada fog'nin tersi ile g'nin tersi bileşke f'in tersinin tanım kümeleri A ve görüntü kümeleri C oldu. Tanım ve görüntü kümelerinin eşit olması bu fonksiyonların eşit olduğunu gösterir mi?
ÖA1A: Olmayabilir gibi. Aklıma farklı bir yol geldi bir anda.

Tanım ve değer kümeleri aynı olduğu için eşit olur şeklinde yapmıştır. Fakat görüşmeciye bunun yeterli olup-olmadığı sorulduğunda yeterli olmayabileceğini dile getirerek aşağıdaki çözümü yapmıştır.

T : Peki onu görelim.

ÖA1A: Tamam. ($(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ yazıyor) Şuna ( $[f(g(x))]^{-1}=a$ yazıyor) a dersek f(a)=g(x) olcak. (mırıldanıyor) Saçmaladım ben.

T : Neden saçmaladığını düşündün?

ÖA1A: f(a)=g(x) buldum.

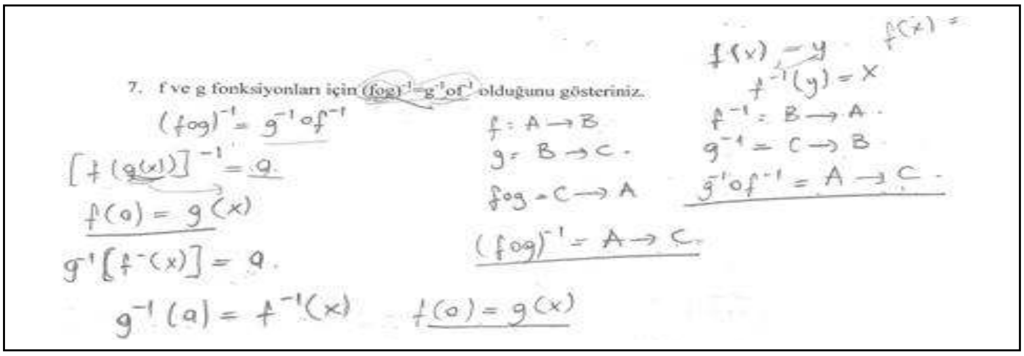
T : Nasıl buldun onu?

ÖA1A: f(g(x))'in tersi a imiş. Tersini aldım ben yine, f(a) eşittir g(x)'miş. Bunu buldum. Bunun buna eşit ($(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$) olduğunu söylemiş. Buna da ($g^{-1}(f^{-1}(x))=a$) a diyim. Bunun tersi ($(fog)^{-1}$)a bunun da ($g^{-1}of^{-1}$) tersi a. Buradan ($g^{-1}(f^{-1}(x))=a$) tersini alırsak $g^{-1}(a)$ eşittir $f^{-1}(x)$ olur. Dolayısıyla f(a)=g(x) oldu.

T : Burada ne yaptığını anlatır mısın lütfen.

ÖA1A: fog(x)'in tersi a ya eşitmiş dolayısıyla f(a) eşittir g(x) oldu. a'ya eşit değilmiş a'ya eşit olduğunu ben söyledim. Verdiği tanımda da g nin tersi bileşke f'in tersi x'in fog(x)'in tersine eşit olduğunu söylemiş. Ona da a dedim. Burada a dediğim için. Buradan $[f(g(x))]^{-1}=a$'nın tersinden f(a)=g(x) oldu. Daha sonra $g^{-1}(f^{-1}(x))=a$'dan $g^{-1}(a)=f^{-1}(x)$ olur. Buradan da f(a)=g(x) olur. Bu nedenle de eşittir.

Bu ikinci çözümde ÖA1A fonksiyonun tersini alma kuralını uygulamıştır. Fakat bu kuralı $(fog)^{-1}$ için doğru şekilde kullanırken $g^{-1}of^{-1}$ için yanlış şekilde kullanmıştır. Dolayısıyla da kuralları anlamsız bir biçimde kullanarak dışsal şemalardan otorite kanıt şemasıyla çözümünü aşağıdaki biçimde yapmıştır.




Şekil 16. ÖA1A'nın klinik görüşmede yedinci probleme ait çözümü

Şekil 16'da da görüldüğü gibi katılımcı ÖA1A yedinci problemi çözerken bir fonksiyonun tersini alma kuralını kullanmıştır. Fakat bunu yaparken $(fog)^{-1}$ için doğru biçimde yapmış fakat fonksiyonun tersini alma kuralını $g^{-1}of^{-1}$'e transfer edemeyerek yanlış bir eşitliğe ulaşmıştır. ÖA1A yazılı sınavda ise sadece $(fog)^{-}1$'nin ve $g^{-1}of^{-1}$'in A kümesinden B kümesine tanımlı olduğunu belirterek çözümünü bu şekilde bırakmıştır.

ÖA2A 2. sınıfa devam etmekte olan öğretmen adaylarından birisidir. Öğretmen adayı yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanmıştır. ÖA2A kendine güveni olmayan ve görüşme esnasında tedirgin olan bir katılımcıdır. Katılımcı yazılı sınavda ve görüşmede birinci problemi çözerken dışsal şemaları kullanmıştır. Öğretmen adaylarından ÖA2A'da birinci problemde ÖA1A gibi fonksiyon tanımını tam olarak anımsayamamış ve ezberlediğini dile getirerek dışsal şemalardan otoriteyi kullanmıştır. ÖA2A'nın dışsal şemaları kullandığını gösteren diyalog aşağıda sunulmuştur.

ÖA2A: $2n^2+n^3$ ifadesini bir fonksiyon olarak tanımlayabilir miyiz? Tanımlayabiliriz demiştim heralde bu soruya.
T : Neden tanımlayabiliriz?
ÖA2A: Yerine değer veririz, şunun içindeki değerlerden. Şimdi hocam, burada n yerine değerler veririz. Herhangi bir tanımsızlık söz konusu değilse sağlıyodur yani. Ya buradaki değerlerin bunu sağlaması lazım.
T : Peki bir ifadenin fonksiyon olması için bu yeterli midir?
ÖA2A: Yeterli değildir ama (sessizlik).
T: Peki başka neye ihtiyacımız var?
ÖA2A: Başka neye ihtiyacımız var? Bi bakalım, fonksiyon olması için başka neye ihtiyacımız var? Hocam görüntü kümesi bu, şu değer kümesi oluyo galiba. Buna verdiğimiz değerlerden elde ettiğimiz sonuçlar görüntü kümesi. Bu görüntü kümesinin her bir karşılığı da değer kümesi olduğu için. Değer kümesinin her bir karşılığı görüntü kümesi olduğu için fonksiyondur. Yani mesela farklı bir, 1, 1 için iki tane değer kullanmıyoruz. Fonksiyondur, yani görünüyo zaten fonksiyon olduğu, aşikar.

ÖA2A ilk olarak verilen ifadenin açık bir biçimde fonksiyon olduğunu dile getirmiştir. Ama verdiği tanımda henüz eksiklikler bulunmaktadır. Verilen ifadenin nasıl aşikâr bir biçimde fonksiyon olduğu sorulduğunda;

"Şimdi bir yandan herhangi bir değer verelim. Şurda mesela 1 verdiğimiz zaman farklı bişey çıkıyo, 2 verdiğimiz zaman farklı bişey çıkıyo. 3 verdiğimiz zaman farklı, her seferinde farklı bi sonuç çıkıyo. Yani her bi değer için farklı bi değer geliyo. Fonksiyondur."

Şeklinde bir açıklama yapmıştır. Bunun yeterli olup-olmadığı sorulduğunda ise yanıtı evet olmuştur. Başka bir koşul var mı şeklindeki bir soruya ise;

ÖA2A: Hocam fonksiyonun özelliklerini o kadar çok bilmiyom ki ben. Biliyorsunuz geçen sene soyut gördük ama inanın soyuta ben fazla çalışmadım. Haa ÖSS'de bize zaten soru veriliyodu direk çözümünü yapıyoduk. Yani o kadar testlere dayalı çalıştık ki biz. Mantık var, evet mantık var ama yani daha çok ezber var. Yani görünüyo 1 koyduğum için bi değer, 2 koyduğum için bi değer, görünüyo yani. Başka bişey var mı fonksiyon olması için?
T : Sence var mı?
ÖA2A: Hatırlamıyorum.

Biçiminde yanıt vermiştir. Bunun yanı sıra ÖA2A fonksiyonları çok iyi bilmediğini, genellikle çoktan seçmeli sınavlar olduklarını ve ezberlediğini dile getirmiştir.

ÖA1A ve ÖA2A önceden öğrendikleri ve ezberledikleri fonksiyon tanımını eksik olarak anımsamışlardır. Buna bağlı olarak da birinci problemi çözmüş ve savunmalarını yapmışlardır. Bu katılımcılar ile benzer olarak ÖA2B, ÖA3A ve ÖA3D'de eksik olarak anımsadıkları veya ezberledikleri tanım ile problemi çözerek açıklamalarını yapmış ve dışsal şemalardan otoriteyi kullanmışlardır.

Yukardaki öğretmen adayları gibi birinci problemde dışsal şemaları kullanan ÖA3B yazılı sınavda ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanan öğretmen adaylarındandır. ÖA3B üniversite sınavı sonucunda fen bilgisi öğretmenliğini kazanmıştır. Bunun sonucunda da birinci sınıfta fen bilgisi öğretmenliğinde öğrenim görmüştür. Daha sonra genel not ortalaması yüksek olduğu için ikinci sınıfta öğrenimine ilköğretim matematik öğretmenliğine geçiş yaparak devam etmiştir. Katılımcı görüşme boyunca kendisine güvenen ve kendisinden emin bir tavır içerisindeydi. Fakat bunun yanı sıra görüşmeye başlamadan önce fonksiyon konusunda eksikleri olduğunu ve bu konuda yetersiz olduğunu dile getirmiştir. Katılımcı, dışsal şemalardan otoriteyi kullandığı birinci problemde açıklamasını aşağıdaki şekilde yapmıştır. Ayrıca katılımcı birinci problemi çözerken yazılı sınavda da dışsal şemaları kullanmıştır.

T : Sen aslında bunun fonksiyon olduğunu mu düşünüyorsun?
ÖA3B: Evet.
T : Nasıl gösterirsin?
ÖA3B: Gösteremem.
T : Gösteremez misin? Açıklayamaz mısın?
ÖA3B: Gösteremem, evet orda çoğumuz eksik kalıyoruz. Neden fonksiyon olduğunu göstermekte eksik kalıyoruz. Böyle şeyler daha çok bilgilendirmek amaçlı kullanılıyor. İçeriğine çok fazla bakmıyoruz. Ezber diyim ben ezber. Yani fonksiyon, işte fonksiyonlara başladık çocuklar. f(x) eşittir 2x bilmem ne. Bu fonksiyondur. İşte x yerine 1 koyarsan f(x) şu olur, bu tanım kümesi, bu değer kümesi falan. Ama niye fonksiyondur? O bizim eğitim sistemimizde yok bence. Ben fen bilgisinden matematiğe geçiş yaptım. Şimdi biraz da onun bende etkisi var. Tam matematik olarak düşünemiyo olabilirim. Ama şimdi burada zannediyorum ki yine eksiklerimiz var yani. Mesela şimdi şunları sadece öyle yaptık geçtik. Mesela bunların açılımları var ya, nerden geldi, nasıl böyle oldu? Bunlar mesela hiç verilmedi bize. Bunların mesela ispatları var, nerden geliyolar, nasıl çıkıyolar? Yok yok yok, yine verilmiyo yine verilmiyo. Burada verilmiyo. Hocalar zaman yok, yetişmez, program belli, kendiniz araştırın diyolar.

ÖA3B verilmiş olan ifadenin fonksiyon olduğunu düşünmekte fakat nedenini açıklayamamaktadır. Bu noktada da eğitim sisteminde kendine göre eksik gördüğü noktaları dile getirmekte, eğitim sisteminin ezbere dayalı olduğunu ve açılımların gerekçelerinin, nedenlerinin açıklanmadığını ifade etmektedir. Birinci problem ile ilgili savunmasını ise takip eden diyalogdaki gibi dile getirmiştir.

T : Fonksiyon olması için ne olması gerekiyor?
ÖA3B: Fonksiyon olması için ne olması gerekiyo? Elemanların bi yere eşlenmesi.
T : Peki elemanların bir yere eşlenmesi için herhangi bir şart gerekli mi?
ÖA3B: İşte (sessizlik).
T : Hangi durumda eşleyip hangi durumda eşlemiyoruz?
ÖA3B: Onu şu anda hatırlamıyorum. Ama değer kümesi belli olmadığı için fonksiyon değildir.
T : Fonksiyon olması için değer kümesinin mutlaka belli mi olması gerekiyor? Ya da değer kümesi belli olmadığı için fonksiyon değildir diye neden düşünüyorsun?
ÖA3B: Değer kümesi belli olmadığı için. Ya bir fonksiyon olması için, bize öyle lanse edildi yani, bir elemanı bi yere götürecek yani illaki. Değil mi, fonksiyon budur.
T : O durumda fonksiyon olur mu?

ÖA3B: Fonksiyon olur. Aldığımız elemanı belli işlemler sonucu bi yere götürecek. Başka bi sayıya ya da aynı sayıya da olabilir. Yani değer kümesi illa olmalı bence

ÖA3B kodlu katılımcı kendi ifadesiyle "lanse edilmiş" olan fonksiyon tanımı kullanarak problemi çözmüş ve savunmasını da yukarıdaki şekilde yaparak dışsal şemaları kullanmıştır. Bunun yanı sıra 4.sınıfta öğrenimlerine devam etmekte olan ÖA4B ve ÖA4D kodlu öğretmen adayları ise bir ifadenin fonksiyon olması için birebir ve örten olması gerektiğini dile getirmektedirler. Bunlardan ÖA4B bunu; "Fonksiyon olabilmesi için bildiğim kadarıyla birebir ve örten olmalıydı, hatırladığım kadarıyla. Ama herhangi birini sağlamazsa fonksiyon olmaz." şeklinde dile getirirken ÖA4D katılımcısı;

"Fonksiyon olabilmesi için öncelikle birebir ve örten olması lazım. Öğretmenlerden faydalandığım bir bilgi bu. Birebir ve örten olduğunu öğretmenlerimiz sadece söylemişti bize. Ama 1. sınıfta soyut matematikte bunun üzerinde çok uğraştık. Şu an 4. sınıfız tamamıyla unutmuş bir haldeyiz."

Biçiminde ifade etmiştir. Bu da gösteriyor ki öğretmen adayları anlamını bilmeden ezberledikleri veya zihinlerinde yanlış olarak oluşturdukları tanımları hatırlayarak problemi çözmektedirler. Bu da öğretmen adaylarının dışsal şemalardan otorite kanıt şemasını kullandıklarını göstermektedir.

ÖA4B ve ÖA4D gibi 4. sınıfta öğrenimine devam etmekte olan ÖA4A kodlu öğretmen adayı ise birinci problemdeki ifadenin fonksiyon olması için bağıntı olması gerektiğini aşağıdaki diyalogda dile getirmiştir.

ÖA4A: Fonksiyon olabilmesi için aralarında bir bağlantı olması lazım. Bağıntı derken A'dan B'ye bir bağıntı olması lazım. Zaten onun özel bir şeklide fonksiyondur. Zaten fonksiyondur. Fonksiyon mesela…
T : Bağıntı dediğin şey nedir ya da onun özel durumu?
ÖA4A: Bir kümede bağıntı olduğu zaman A'dan B'ye bir bağıntı olur. Ama bazen A dan B'ye o bağıntılarda özel olanlarını seçiyoruz mesela. $x=y$ bağıntıysa mesela $y=x^2$ yi seçtiğimiz zaman bu fonksiyon oluyor. Bunun içinden bazılarını alıyoruz.
T : Diğer bağıntıları neden almıyoruz, nasıl sınırlandırıyoruz?
ÖA4A: Diğer bağıntıları işe yaramadığı için almıyoruz.
T : Sınırlandırmayı neye göre yapıyoruz?
ÖA4A: Sınırlandırmayı da değer kümesinde bulduğumuz değerlere göre sınırlandırma yapıyoruz. Tanım kümemizi de bilmemiz gerekir. Tanım kümesinde yerine koyup değer kümesinde bulmamız gerekir. Değer kümesine göre de sınırlandırabiliriz.
T : Başka bir koşul var mı peki bu ifadenin fonksiyon olabilmesi için?
ÖA4A: Aklıma gelmiyor
T : Tamam eklemek istediğin başka bir şey var mı?
ÖA4A: Hayır. Burada bağıntının değer kümesini bilmediğimizden fonksiyon olarak tanımlayamıyoruz yani.

Birinci problemde hem yazılı sınavda ve hem de görüşmede dışsal şemaları kullanan ÖA4A, ÖA4B ve ÖA4D gibi 4. sınıfta öğrenimine devam etmekte olan öğretmen adayları diğer sınıflardaki öğretmen adaylarına göre daha karmaşık tanımlar vermişlerdir. Yani katılımcılar fonksiyonun tanımını verirken başka tanımlar veya kavramlar da kullanmışlardır. Örneğin; ÖA4B ve ÖA4D bir ifadenin fonksiyon olması için birebir ve örten olması gerektiğini dile getirirken ÖA4A bağıntı olması gerektiğini dile getirmiştir. Oysa ki 1, 2 ve 3. sınıflardaki katılımcılar fonksiyonun tanımını verirken ya eksik tanımlamışlar veyahut da fonksiyon olması için tanım ve değer kümesinin verilmiş olması gerektiğini dile getirmişlerdir.

Katılımcılardan ÖA1B ise birinci problemde verilen ifadenin fonksiyon olması için verilen aralıkta tanımsız olmaması gerektiğini dile getirmiştir. Bunu görüşmede açıklarken ise;

ÖA1B: Şimdi bunun elemanlarını doğal sayılar olarak almamızı istiyor, fonksiyon olarak tanımlayabilmem içinde tanımsız olmaması gerekiyo. Buda polinom fonksiyon olduğu içinde bu aralıkta onu tanımsız yapan bir değer yoktur. O yüzden bunu bir fonksiyon olarak tanımlayabilirim.
T :2n kare artı n küpü mü tanımsız yapan bir değer yoktur?
ÖA1B: Evet bu arada yok.
T : Bu arada tanımsız yapan bir değer yok derken nereyi kastediyorsun?
ÖA1B: Yani n'i 1, n'i 2, bu ifadeye koyduğum zaman bir değer çıkacaktır, öyle değil mi?
T : Bu aralıkta mı çıkacaktır? Yani 1'den 100'e kadar…
ÖA1B: Hayır bu aralıkta değil, doğal sayılar çıkacaktır. O yüzden de tanımsız yapan bir değer yoktur.
T : O yüzden de fonksiyon mudur?
ÖA1B: Fonksiyondur.
T : Peki bir ifadenin fonksiyon olabilmesi için sadece tanımsız yapmayan elamanların olması yeterli mi? Yani bütün elemanlarının tanımlı olması yeterli mi karşısındakinin?
ÖA1B: Mesela polinom fonksiyon için verdiğim değerlerin doğal sayı çıkmasıydı ya da tam sayı çıkmasıydı
T : Peki o koşul yeterli mi fonksiyon olabilmesi için?
ÖA1B: O koşul yeterli mi? Hıhı. Yani mesela burada bir bölenli bir değer olsaydı işte buna y deki değer sıfırdan başlasaydı sıfır verdiğimde bu tanımsız olacaktı. O zaman diyecektim ki bu bir fonksiyon değildir. Ama öyle bi değer yok.

Katılımcıya göre bir ifadenin fonksiyon olabilmesi için verilen ifadede bütün elemanlara karşılık bir görüntüsünün olması yeterlidir. ÖA1B'ye göre bir ifadenin fonksiyon olması için başka bir koşula gerek yoktur. Katılımcı bu kuralı liseden anımsadığını dile getirmiştir. Bunu da;

"Liseden, lise bilgilerimden hatırlıyorum. Lise döneminden hatırlıyorum. Sanki öyleydi ya. zaten tanımlı olduğu aralık eğer tanımlıysa o ifade o bir fonksiyondur şeklinde söylüyorduk sanki. Öyle hatırlıyorum."

Şeklinde açıklamıştır. Bu da gösteriyor ki öğretmen adayı lisede öğrendiği ve ezberlediği veya başka bir bilgiyle karıştırdığı kuralı kullanarak hem yazılı sınavda ve hem de görüşmede dışsal şemalardan otorite kanıt şeması yardımıyla birinci problemi doğrulayarak savunmuştur.

ÖA1D kod adlı katılımcı birinci sınıfa devam etmekte olan bir öğretmen adayıdır. Katılımcı görüşme süresince gayet sakin ve kendinden emin bir tavır sergilemiş ve yöneltilen bütün problemleri yanıtlandırmıştır. ÖA1D yazılı sınavda bütün kanıt şemalarını eşit oranda kullanan bir katılımcı olup birinci problemde yazılıda ve görüşmede dışsal şemaları kullanmıştır. Öğretmen adayı birinci problemi çözme sürecinde önce fonksiyonun tanımını vermiştir. Tanımı verirken aşağıdaki ifadeyi kullanmıştır.

ÖA1D: Fonksiyon yazalım önce. A ve B boş kümeden farklı iki küme olsun. A'dan B'ye tanımlı her bağıntıya A'dan B'ye bir fonksiyon denir. Fonksiyonun tanımını yaptık. Ama buradan bişey elde edemiycez.

T : Bağıntıdan kastettiğin nedir?

ÖA1D: Yani A kartezyen A herhangi bir küme. Burada A'dan B'ye olduğu için A kartezyen B'deki herhangi bir küme. Bağıntı derken A kartezyen B. Burada $n^3+2n^2$ gibi düşünelim. Yani f(n) eşittir $n^3+2n^2$ diye düşünelim. Sonra burada değerler verelim. İfadesini bir fonksiyon olarak tanımlayabilir miyiz? Açıklayınız. Tanımlayabiliriz. Neden? Çünkü f(1), ben bi grafik çiziyim buna (grafik çiziyor). Çizmiştim (yazılı sınavda çizdiğini dile getiriyor).

T : Tekrar çizebilirsin.

ÖA4A gibi ÖA1D'ye göre de bir ifadenin fonksiyon olması için bağıntı olması gerekmektedir. Fakat burada ÖA1D'nin verdiği tanıma göre her bağıntı bir fonksiyondur. Katılımcı bir ifadenin bağıntı olması için gereken koşullardan ise bahsetmemiştir. ÖA1D kodlu katılımcı fonksiyonun tanımını verdikten sonra fonksiyon olup-olmadığı sorulduğunda ifadenin grafiğini çizmiştir. Onun ardından da çizdiği grafik yardımıyla ifadenin fonksiyon olup-olmadığını görüşmede kendince açıklamaya çalışmıştır.

ÖA1D: Tamam. Şimdi $n^3+2n^2$ hemen yazalım şöyle. Şimdi $n^2$ parantezinde (n+2)'dir. Bunların kökleri n=-2'dir. n sonuçta çift katlı köktür. Eksi 2'yi yazalım, sıfırı yazalım. Şurda teğet olacak, bunun gibi. Şöyle bir şey, şöyle bir grafik olacak.

T : Bu fonksiyonun grafiği mi?

ÖA1D: Evet. $n^3+2n^2$, n eksi 2'de geçecek, sıfırda da teğet. Şimdi fonksiyon olabilmesi için bir değerde hepsinin farklı değer alması gerekiyo. x'lerin y ekseninde, x ekseninde alınan her değerin y eksenin de farklı bir değere gitmesi gerekiyo.

T : Hepsinin farklı değere gitmesi gerekiyor mu?

ÖA1D: Evet. Söylüyorum baştan, her x farklı y'ye gitmesi gerekiyor, birebir olması gerekli. Farklı olabilmesi için her x ekseninde alınan herhangi bir değerin y ekseninde farklı bir değere gitmesi gerekiyor. Dolayısıyla eksi 2'nin tüm ayrıntılarıyla düşünebiliriz. Bunun için farklı değer için bu olabilir. Dolayısıyla bu, tekrar çiziyorum x ekseninde alınan herhangi bir değer için alınan x değerinin y ekseninde hepsinin farklı gitmesi. Yani y eksenine muhakkak gitmesi. Ama hepsinin farklı değere gitmesi.

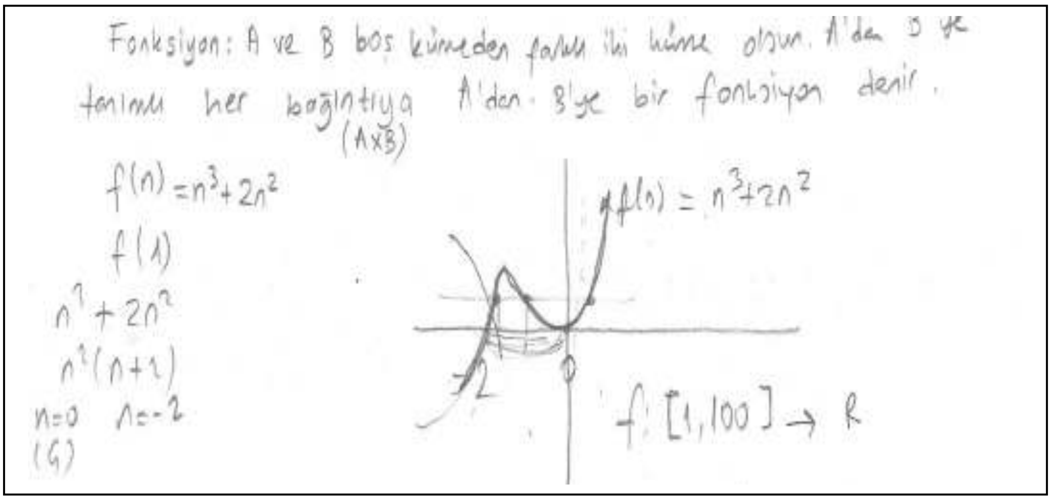
T : Hepsinin farklı değere mi gitmesi gerekiyor?

ÖA1D: Farklı değil, o birebirlikle karıştırıyoruz. Şimdi söylüyorum baştan. Yani bütün x'lerin bi y'ye gitmesi gerekiyo.

T : Aynı olabilir mi?

ÖA1D: Aynı olabilir. Birebir olması için ama aynıya olamaz. Her x farklı y'ye gitmesi gerekiyo birebir olması için. Ama fonksiyon olması için x eksenindeki bütün değerlerin y ekseninde herhangi bi değere gitmesi gerekiyo doğrusuyla f(n), f(n) bu grafiğe göre fonksiyondur. f(n) ya da şu ifade ($n^3+2n^2$), f(n)'de zaten $n^3+2n^2$ olduğuna göre o zaman bu ifade bir fonksiyondur.

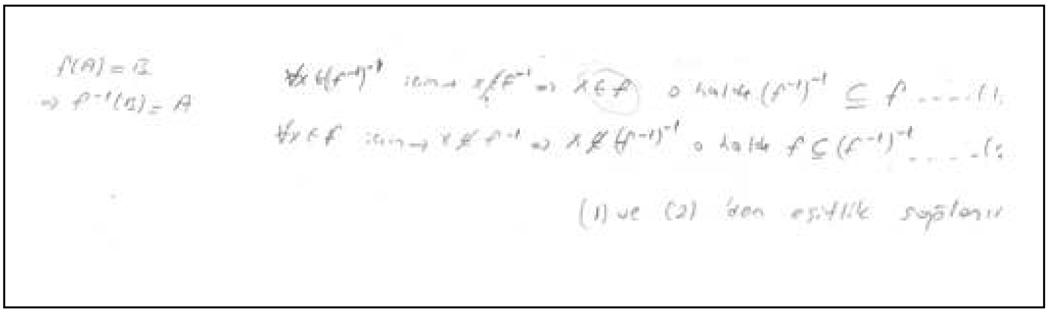
Burada öğretmen adayı verilen ifadenin bir fonksiyon olduğunu tanım ve çizdiği grafik ile açıklamaya çalışmıştır. Görüşmede açıklamasını yukarıdaki biçimde yapan ÖA1D çözümünü de aşağıdaki gibi yapmıştır.




Şekil 17. ÖA1D'nin klinik görüşmede birinci probleme ait çözümü

ÖA1D birinci problemin çözümünü Şekil 17'deki gibi yaparak açıklamasını tamamlamıştır. Görüldüğü üzere katılımcı önce fonksiyonun tanımını yazmış ve ardından da çizdiği grafik ile problemde verilen ifadenin fonksiyon olduğunu açıklamaya çalışmıştır. Fakat bu süreçte katılımcının verdiği fonksiyon tanımı yanlıştır. Çünkü her fonksiyon bir bağıntıdır fakat her bağıntı bir fonksiyon değildir, bir ifadenin fonksiyon olması için farklı koşulları da sağlaması gerekmektedir. Katılımcı bu süreçte yanlış bir genellemeye ulaşmıştır. Bunu da "Her fonksiyon bağıntıdır." koşulunu düşünerek dile getirmiş olabilir. Bu da katılımcının daha önceden ezberleyerek yanlış anımsadığı fonksiyon tanımı olduğu için ÖA1D'nin dışsal şemalardan otoriteyi kullandığı söylenebilir. Katılımcı yazılı sınavda da klinik görüşmedeki gibi bir çözüm yaparak grafik çizmiştir.

ÖA1C birinci sınıfta öğrenimine devam etmekte olan öğretmen adaylarından birisidir. Yazılı sınavda ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmasına rağmen dokuzuncu problemi çözerken yazılı sınavda ve görüşmede dışsal şemaları kullanan katılımcılardandır. Katılımcının yazılı sınavda yaptığı çözüm aşağıda yer almaktadır.




Şekil 18. ÖA1C'nin yazılı sınavda dokuzuncu probleme ait çözümü

ÖA1C yazılı sınavda dokuzuncu problemi çözerken kümelerden yola çıkarak problemi sonuçlandırmıştır (bkz. Şekil 18.). Katılımcı problemi çözerken f ile $(f^{-1})^{-1}$'in birbirinin alt kümeleri olduğunu belirterek problemde verilen eşitliğin doğruluğunu göstermeye çalışmıştır. Oysa ki bunu gösterirken geçerli deliller öne sürememiştir. Katılımcı görüşmede ise açıklamasını aşağıdaki gibi yapmıştır.

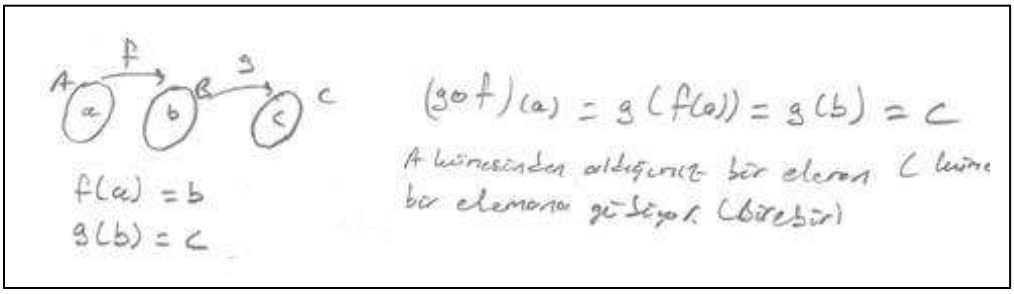
ÖA1C: Yok. (problemi okuyor) f'in tersi A eşittir B, f'in tersi B eşittir A $(f(A)^{-1}=B$, $f(B)^{-1}=A)$. (sessizlik)
T : Oradaki f'in tersi B eşittir A'yı $(f(B)^{-1}=A)$ fonksiyonun tersi kuralından…
ÖA1C: Evet. Tersi A.
T : Hıhı devam.
ÖA1C: Bundan sonra ne yapıyoruz? (sessizlik)
T : Oraya ne yazdın, f(x)'in tersi bileşke f eşittir x ((f 1)f(x)=x) mi?
ÖA1C: Hıhı. Şunu içeri alırsam tersinin tersi f(x).
T : Fonksiyonun tersi kuralına göre mi aldın?
ÖA1C: (sessizlik) Hıhı yine aynı şekilde. Burayı ne aldık? f'in tersi bileşke f'mi yaptık? Öyleyse şurası birim fonksiyon yaptı. I(x) eşittir x birim fonksiyondan x eşittir x, yani bu şekilde.
T : O zaman bu sağ tarafa yaptığın çözüm müydü?
ÖA1C: Hıhı evet. f'in tersini de aldık burada, daha sonra f'in tersinde f(x) birim fonksiyon..
T : Burada f'in tersini aldıktan sonra f'in tersinin tersini aldık.
ÖA1C: Hıhı.
T : Tersinin tersini alınca bir tane tersi gitti mi?
ÖA1C: Bir ters gitti. Normalde şunun sağlamasını yaparsak bunu içeri aldığımızda şurası x olur f(x) buraya gelir. Tersinin tersinde. Bu şekilde tersten gittik yani. f'in tersi bileşke f(x) $((f^{1}of)(x))$ de birim fonksiyon oldu. Birim fonksiyonda I(x) eşittir x'dir. Karşı tarafta x olduğundan eşittir dedik.

Katılımcılardan ÖA1C dokuzuncu problemi çözerken f'in tersi bileşke f'i alarak bunları x'e eşitlemiş ve ardından da f'in tersi bileşke f'i birim fonksiyona eşitlemiştir. Birim fonksiyon x'e eşit olduğundan dolayı x eşittir x elde edinci dokuzuncu problemdeki ifadenin doğru olduğunu dile getirmiştir. Katılımcı bunu yaparak bildiği kuralları anlamsız bir biçimde kullanarak dışsal şemalardan otorite ile problemin doğruluğunu savunmuştur. Buna dair çözümü ise aşağıda yer almaktadır.


Şekil 19. ÖA1C'nin klinik görüşmede dokuzuncu probleme ait çözümü

ÖA1C dokuzuncu problemi çözerken önce bir fonksiyonun tersini alma kuralı ile çözmeyi denemiş fakat başaramamıştır (bkz. Şekil 19.). Bunun üzerine de f fonksiyonu ile f'in tersinin bileşkesini alarak problemi çözmeye çalışmıştır. Katılımcılardan ÖA1C dokuzuncu problemi çözerken hem yazılı sınavda ve hem de görüşmede dışsal şemaları kullanmış fakat farklı çözüm yolları izlemiştir.

Bazı katılımcılar ise doğru olarak bildikleri bazı tanımları farklı bir duruma transfer edememişlerdir. Katılımcılardan ÖA3A ve ÖA4D ikinci problemde hem yazılı sınavda ve hem de klinik görüşmeler sırasında birebirliğin tanımını doğru biçimde yazmış ve dile getirmişlerdir. Fakat bunu matematiksel olarak gösterirken farklı bir gösterim biçimi kullanmışlardır. Aşağıda bu öğretmen adaylarından ÖA4D'nin yazılı sınavda yaptığı çözüm görülmektedir.




Şekil 20. ÖA4D'nin yazılı sınavda ikinci probleme ait çözümü

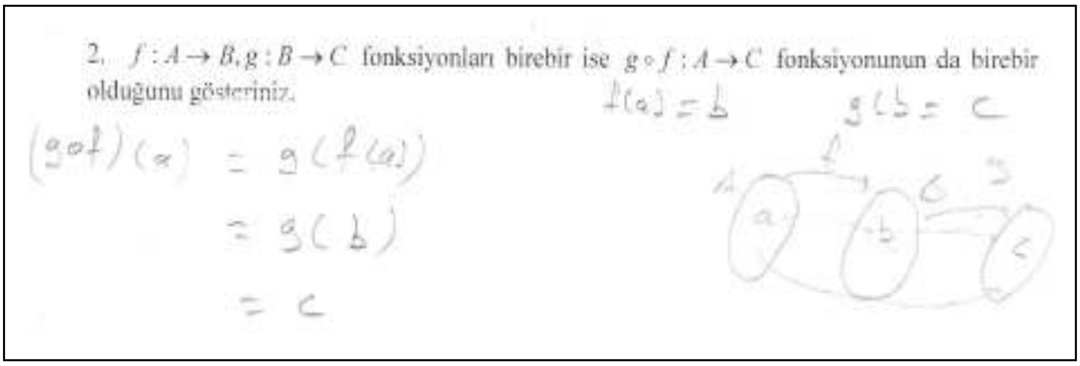
Katılımcı Şekil 20'deki çözümünde birebirliğin tanımını sözel olarak yazarken ifade etmeye çalışmış fakat matematiksel gösterimde problemde verilen ifadenin örtenliğini göstermiştir. Bu da katılımcının ezberlediğine dair bir delil oluşturmaktadır. ÖA4D ile gerçekleşen görüşmeden örnek diyaloga ise aşağıda yer verilmiştir.

ÖA4D: Fonksiyonları birebir ise g bileşke f fonksiyonunun da birebir olduğunu gösteriniz. g bileşke f. (İşlem yapıyor) Şimdi ben burada bir eleman almış oluyordum. g bileşke fonksiyonunda bir eleman almış olsam diye düşündüm. Ben bunu nasıl yaparım? Bu şekilde yazabilirim. Şimdi belki şu şekilde de yazmış olabilirim. Mesela birebirse bu bir elemana gidecek sonuçta. f(a) eşit b. O zaman ben f(a) yerine b'yi yazabilirim. b böyle bir sayı olursa bunun sonucu da c'dir dedim. Sonuçta bunlar farklı rakamlar aynı bu şekilde birebirdir diye düşünmüş olabilirim. Doğruluğuna gelirsek ne kadar doğru bilmiyorum ama.

T : Doğruluğuyla çok ilgilenmiyorum zaten. Düşünce biçimiyle ilgileniyorum. Buradaki g bileşke f ne peki? Onu nasıl yorumlarız?

ÖA4D: g bileşke f de düşündüğüm şey mesela bir eleman aldığımız zaman fonksiyonunda, sonuçta bu birebir ise şeye gidiyor, 3 tane şekil olması lazım. A kümesi, B kümesi, C kümesi (Şekil çizdi). Şu şekilde bir şeyler var. f fonksiyonu g fonksiyonu şeklinde. Sonuçta benim A kümesine aldığım ilk eleman a idi. Bunu f fonksiyonuna götürdüğüm zaman buraya b olarak getirdiğimi düşündüm. Bu zaten birebirdi böylece C kümesi ve diğer fonksiyonların c elemanı olarak düşündüm. Sonuçta bunlar birebir ise bu da birebirdir diye düşündüm.

Açıklamasını yukarıdaki biçimde yapan ÖA4D çözümünü de aşağıdaki gibi yapmıştır. Katılımcılardan ÖA3A'da ikinci problemdeki açıklamasını benzer biçimde yapmıştır.




Şekil 21. ÖA4D'nin klinik görüşmede ikinci probleme ait çözümü

ÖA4D sözel olarak tanımını doğru verdiği birebirliği g bileşke f fonksiyonuna transfer etmekte sorun yaşamıştır. Çünkü ÖA4D'nin Şekil 21'de yer alan çözümüne bakıldığında katılımcının matematiksel olarak g bileşke f fonksiyonunun birebirliğini değil örtenliğini gösterdiği görülmektedir. Bu da birebirlik ve örtenlik tanımlarının öğretmen adayının zihnine yerleşmediğinin veya matematiksel tanımları ezberleyerek karıştırdığının bir göstergesi olabilir. Bakıldığında katılımcının ikinci problemi yazılı sınavda ve görüşmede aynı biçimde çözdüğü görülmektedir.

Öğretmen adaylarından ÖA1A birinci sınıfa devam etmekte olup ikinci problemde hem yazılı sınavda ve hem de görüşmede dışsal şemalardan otorite kanıt şemasını kullanmıştır.

ÖA1A= f A'dan B'ye. Fonksiyon verilmiş (Sessiz bir biçimde düşünüyor). Fonksiyonun A'dan C'ye olduğu bize verilmiş. f fonksiyonu A'dan B'ye birebir olarak verilmiş. f, A'dan B'ye, g B'den C'ye. Bileşke de A'dan C'ye bir fonksiyon olduğuna görüyoruz. Bunların birebir olduğu bize verilmiş. Mesale $x_1$ ve $x_2$ değerleri aldığımızda $x_1$ $x_2$'ye eşit olduğu zaman $f(x_1)$ eşit $f(x_2)$ olduğu zaman bu fonksiyona birebir diyebiliyoruz. Bu f fonksiyonuymuş. f, A'dan B'ye birebir bir fonksiyonsa $x_1$ $x_2$ değerlerini karşılığı, eğer $x_1$ $x_2$'ye eşitse $f(x_1)$ $f(x_2)$'ye eşit olur birebirse.

T : Eşit derken?

ÖA1A: Yani $x_1$ eşit $x_2$ ise $f(x_1)$ eşit $f(x_2)$ olmak zorunda birebirliğin koşulundan. Sonra bu A'da aldığımız eleman B'de sağlıyomuş. Sonuçta g fonksiyonu da B kümesinden C kümesine tanımlı bir fonksiyon. Yani birbirine bağlantılı olarak ilerliyo. Burada B kümesinden aldığımız elemanlar, aynı şeyi yaptığımızda. $x_1$ $x_2$ aldığımız elemanlar $x_1$ $x_2$'ye eşitse fonksiyonlarda eşit olur. Fonksiyonlar birebirmiş, bileşke A'dan C'ye tanımlanmış, tanımlanan bu fonksiyonda birebir olmak durumundadır.

ÖA1A problemi açıklarken başta deneysel şemalardan sezgisel şemaları kullanıyor gibi görünmektedir.

ÖA1A: Bu değerleri de fonksiyonda yerine koyduğumuzda $f(x_1)$ eşit $f(x_2)$ oluyo. Dolayısıyla A'da aldığımız elemanların C'de karşılığının olması birbirine bağlantılı olduğunu gösterir. Dolayısıyla A'dan C'ye fonksiyonu da birebir bir fonksiyondur.

T : Birebir olması için A'daki bir elemanın C'de görüntüsünün olması yeterli mi? Nasıl karar veriyoruz?

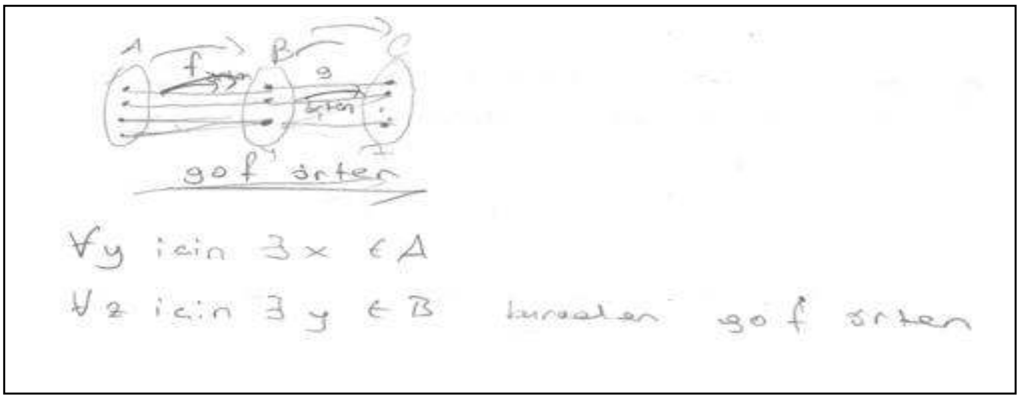
ÖA1A: Bu tanımdan. Bana öğretilenden.

Öğretmen adayı birebirliğin tanımını sözel olarak doğru biçimde ifade etmektedir. Fakat g bileşke f fonksiyonuna birebirliğin tanımını transfer etmekte sorun yaşamaktadır. Katılımcı için A kümesindeki bir elemanın C kümesinde görüntüsünün olması ifadenin birebir olması için yeterlidir.

Katılımcılardan ÖA3D üçüncü sınıfa devam eden ve yazılı sınavda bütün şemaları eşit oranda kullanan katılımcılardandır. Katılımcı beşinci problemi yazılı sınavda boş bırakmış ve görüşmede de g bileşke f'in örtenliğini gösterirken önceden öğrendiği bir kuralı kullanarak örtenliğin tanımını da bir örnek ile göstermiştir. Bunun içinde açıklamasını;

"Örtenlikte yine biraz önceki (2. problem) düşündüğüm fonksiyondaki gibi. Başta ki fonksiyon örten olduğu zaman bileşkesi örten oluyordu. f fonksiyonu birebir olduğu zaman bileşke fonksiyonu da birebir oluyordu. Bir fonksiyon örten olduğu zaman o fonksiyonu da örten oluyo, öyle bi bilgi hatırlıyorum. Kural mı yazmıştık derste, öyle hatırlıyorum. Bunlardan birinde tersini koyarak yaptım. f A'dan B'ye, g'de B'den C'ye, yine A'dan C'ye demişim. Bu fonksiyon A'dan C'ye. Bunun örtenliği nasıl yapılır acaba? Yine böyle bir değer verip tanım kümesinde de, değer kümesinde de. Yani burada tanım kümesinin her değeri için burada bi görüntü oluşuyorsa örtendir açık bir eleman kalmaması gerekiyor. Değer kümesinde açıkta eleman kalmamışsa örtendir."

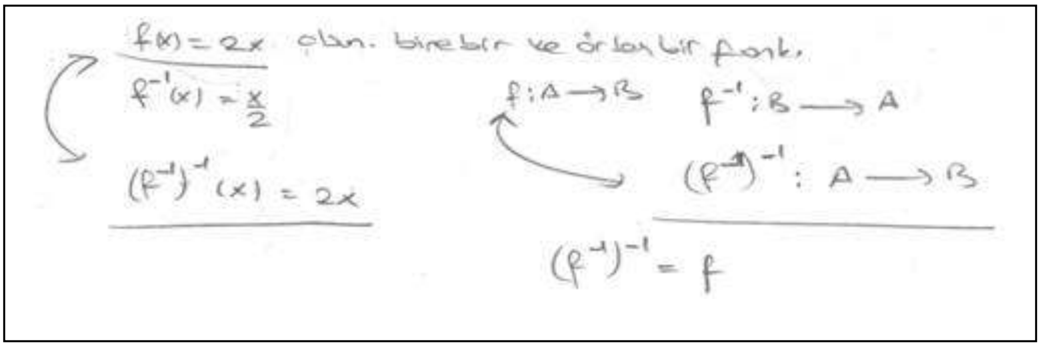
Şeklinde yapmıştır. Katılımcı aynı ifadeyi birebirlik içinde kullanmıştır. Yani verilen fonksiyonlardan biri birebir ise g bileşke f'de birebirdir şeklinde düşünmektedir. ÖA3D bunun bir kural olduğunu dile getirmiştir. Öğretmen adayı burada anlamını bilmeden kuralları delil olarak göstererek dışsal şemalardan otoriteyi kullanmıştır. Bunun yanı sıra katılımcılardan ÖA2D ve ÖA4A örtenliğin formal ve sözel tanımını klinik görüşmede doğru bir biçimde vermişler fakat bu tanımı g bileşke f'e transfer edememişlerdir. Bu da katılımcıların ezberledikları tanımı içselleştiremediklerini ve içselleştiremedikleri için de kullanamadıklarını gösteriyor olabilir. Bu katılımcılardan ÖA2D ise beşinci problemi çözerken yazılı sınavda deneysel şemaları kullanırken ÖA4A dışsal şemaları kullanmıştır. Aşağıdaki Şekil 22'de ÖA2D'nin yazılı sınavda beşinci probleme ait çözümü görülmektedir.




Şekil 22. ÖA2D'nin yazılı sınavda beşinci probleme ait çözümü

ÖA2D klinik görüşmede örtenliğin tanımını, problemde verilen ifadeye transfer etmekte zorlanmasına rağmen yazılı sınavda tanımladığı kümeler ile g bileşke f fonksiyonunun örtenliğini göstermiştir. Bu da katılımcının yazılı sınavda deneysel şemaları kullandığını göstermektedir.

Klinik görüşmeye katılan ÖA3D dokuzuncu problemin çözümünde dışsal şemaları kullanan ve üçüncü sınıfa devam etmekte olan öğretmen adaylarındandır. Katılımcı dokuzuncu problemi çözerken yazılı sınavda deneysel şemaları kullanmış fakat klinik görüşmede dışsal şemaları kullanmıştır. Katılımcı yazılı sınavda çözümünü aşağıdaki gibi yapmıştır.




Şekil 23. ÖA3D yazılı sınavda dokuzuncu probleme ait çözümü

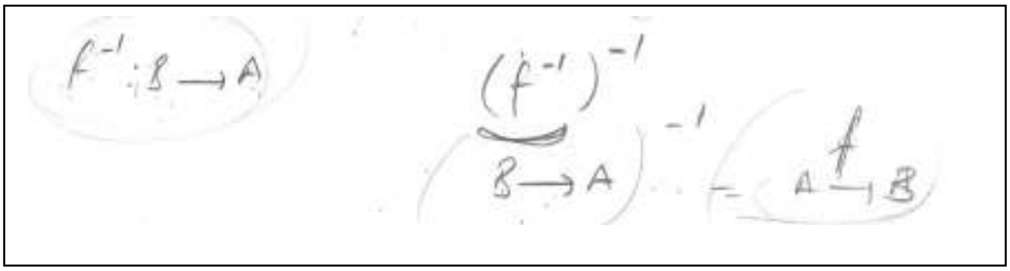
Katılımcı yazılı sınavda dokuzuncu problemi çözerken çözümünü Şekil 23'deki gibi yapmıştır. Bu süreçte katılımcı f fonksiyonunu 2x olarak tanımlamış ve tanımladığı bu fonksiyonun önce tersini ve daha sonra tekrar tersini almıştır. Bunun sonucunda da f ile $(f^{-1})^{-1}$'in birbirine eşit olduğunu görünce problemdeki ifadenin de eşit olduğunu belirtmiştir. Bu da katılımcının deneysel şemalardan temel örnekleri kullandığına dair bir delil oluşturmuştur. Katılımcı klinik görüşmede ise aşağıdaki süreci izlemiştir.

ÖA3D: f, A'dan B'ye birebir ve örten fonksiyonsa…(sessizlik)
T : f'in tersinin tersi de f'dir.
ÖA3D: Hıhı.
T : Bunu göstereceksin.
ÖA3D: f, A'dan B'ye gidiyorsa f'in tersi de B'den A'ya gidiyor dedim. Burada da f'in tersinin tersi, f'in tersinin B'den A'ya olduğunu buldum. Bununda tersi olduğu için yani B'den A'ya gidince tersi olduğu için bu yine A'dan B'ye gidicek. A'dan B'ye giden fonksiyonda f fonksiyonu diye düşünürüm herhalde.
T : 7. problemde yaptığın gibi yaptın yani

Görüşmeye katılan ÖA3D dokuzuncu problemde verilen ifadeyi doğrulamak için f ile $(f^{-1})^{-1}$'in tanım ve değer kümelerinin aynı olması gerektiğini dile getirmiştir. Katılımcı bu yöntemi yedinci problem için de kullanmıştır.

ÖA3D: İlk başta böyle düşünüyordum. Bi de birebir ve örten olduğu zamanda, birebir örten fonksiyon olduğu zaman böyle bi kural var mıydı acaba? Birebir örten olduğu zaman birebir eşleme oluyo. Tanım kümesi ve değer kümesinde birebir eşleme. Hem birebir hem örten açıkta eleman kalmıyo değer kümesinde. Birebir eşleme oluyo. O yüzden de tersi var. Tersinin de tersi de birebir oluyo. Onu da ispatlamam gerekiyo değil mi?
T : Yoo gerekmiyor.
ÖA3D: Ha gerekmiyo. f, A'dan B'ye zaten birebir örten fonksiyonsa tersi de birebir ve örten fonksiyon. Bunun terside birebir ve örten fonksiyon. f'e gidiyo. Yani f'in, f A'dan B'ye, f'in tersi B'den A'ya. f'in tersinin de tersini bulduğumuz için o da tekrar yine A'dan B'ye gidiyo. A dan B'ye olan fonksiyonda f fonksiyonu. O yüzden böyle düşündüm herhalde. Burada da böyle düşünmüş müyüm?

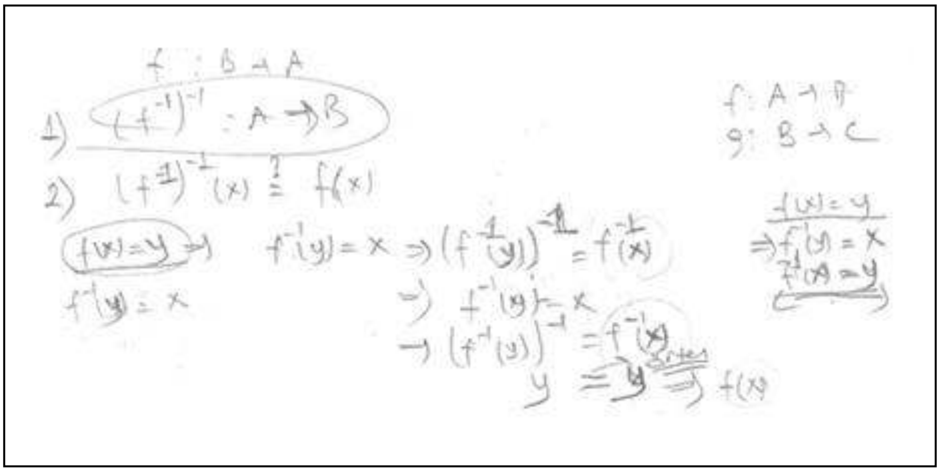
Ayrıca ÖA3D bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için birebir ve örten olması gerektiğini dile getirmektedir. Bunun içinde dokuzuncu problemde verilen ifadenin birebir ve örten olduğunu göstermek istediğinde görüşmeci buna gerek olmadığını belirtmiştir. Bunun üzerine katılımcı f ile $(f^{-1})^{-1}$'in tanım ve değer kümeleri aynı olduğu için eşit olduklarını belirterek doğrulamayı gerçekleştirmiştir. Oysa verilen ifadenin eşit olması için tanım ve değer kümelerinin birbirine eşit olması yetmemektedir. Bu ifadenin eşit olduğunu değil sadece tanım ve değer kümelerinin eşit olduğunu gösterir. Oysa ki tanım ve değer kümeleri birbirine eşit olan farklı fonksiyonlar yazılabilir. Bu da gösteriyor ki katılımcı dışsal şemalardan otoriteyi kullanmıştır. Çözümünü de aşağıdaki biçimde yapmıştır.



Şekil 24. ÖA3D'nin klinik görüşmede dokuzuncu probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA3D dokuzuncu problemi çözerken sadece tanım ve değer kümelerinin aynı olduğunu göstermiştir (bkz. Şekil 24.). Bunu göstermek ise katılımcının dokuzuncu problemdeki ifadeyi doğrulaması için yeterli olmuştur.

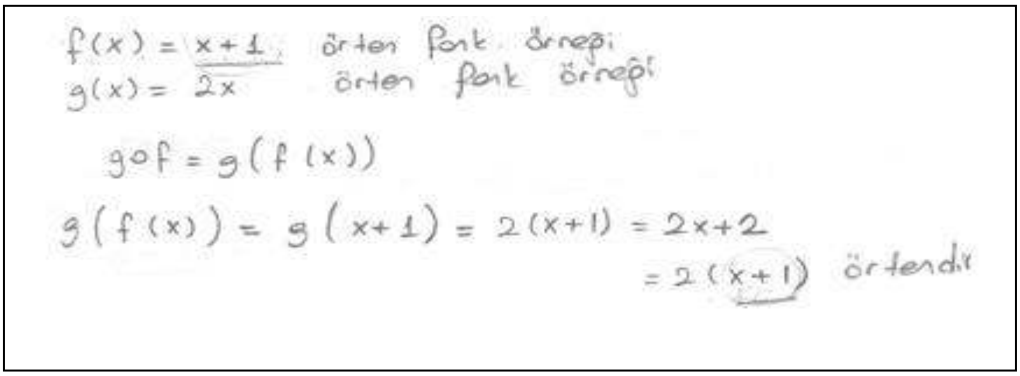
ÖA4A klinik görüşmede dokuzuncu problemin doğrulanması sürecinde dördüncü sınıflardan dışsal şemaları kullanan tek katılımcıdır. Katılımcı aynı zamanda yazılı sınavda da dışsal şemaları kullanmıştır. ÖA4A'da ÖA3A ve ÖA3D gibi verilen ifadenin eşit olduğunu göstermek için önce $(f^{-1})^{-1}$ ile f'in birebir ve örten olması gerektiğini ve bunu da göstermek gerektiğini dile getirmiştir. Bunun yanı sıra ÖA4A'da $(f^{-1})^{-1}$ ile f'in tanım ve değer kümelerinin birbirine eşit olması gerektiğini ifade etmiştir. Bu da dışsal şemalardan otorite kanıt şemasının kullanıldığına dair bir delildir. Katılımcının dokuzuncu problemi görüşmede nasıl çözdüğü ise aşağıda görülmektedir.




Şekil 25. ÖA4A’nın klinik görüşmede dokuzuncu probleme ait çözümü

Şekil 25’de ÖA4A dokuzuncu problemi çözerken $(f^{-1})^{-1}$ ile f’in tanım ve değer kümelerinin eşit olması gerektiğini belirtmiştir. Bunun ardından da fonksiyonun tersini alma kuralı ile problemde verilen ifadeyi doğrulamaya çalışmıştır. Katılımcı yazılı sınavda da benzer bir çözüm ile problemi sonuçlandırarak savunmasını yapmıştır.

Dördüncü sınıf öğretmen adayı olan katılımcılardan ÖA4B beşinci problemi çözerken yazılı sınavda deneysel şemaları kullanmış olmasına rağmen klinik görüşmede dışsal şemaları kullanmıştır. Katılımcı yazılı sınavda çözümünü aşağıdaki biçimde yapmıştır.




Şekil 26. ÖA4B’nin yazılı sınavda beşinci probleme ait çözümü

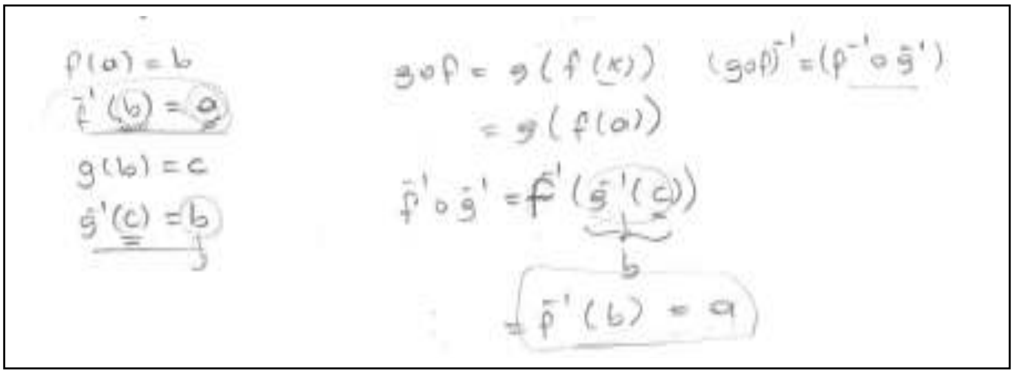
ÖA4B yazılı sınavda beşinci problemi çözerken kendisi birer tane f ve g fonksiyonu tanımlamıştır (bkz. Şekil 26.). daha sonra g bileşke f fonksiyonunu bulmuş ve örten olduğunu belirtmiştir. Katılımcı görüşmede ise yanlış anımsadığı örtenlik tanımını g bileşke f fonksiyonuna uygulayarak problemi sonuçlandırmıştır. Bu süreçte katılımcı aşağıdaki yolu izlemiştir.

ÖA4B: Fonksiyonları örten ise bunu da şu soru gibi yapacağım. Örten fonksiyon olduğu için şöyle diyeyim ona f(a) eşit b. Gene. a'yı A kümesinden seçiyorum, b yi B kümesinden. Değilini alıyorum yani tersini.

T : f'in tersini neden alıyoruz burada?

ÖA4B: Çünkü örtenlikte öyle bir şey kaldı aklımda. Kesin öyle bir şey var ama, dediğim gibi sorunluyum örtenle. Burada alınan bir elemanın tanım kümesinde görüntüsü bulunması gerekiyor sanırım. O yüzden örtendir ya da örten değildir diyeceğim. Eğer yoksa örten değildir diyeceğim. Birbirini kapsamadığı için, örtmediği için. Burada g(b) eşittir c diyorum. Bunun değili eşittir b'ye gider. Bu şekilde yazıyorum bunları. Daha sonra burada g bileşke f'in açılımını yapıyorum. (işlem yapıyor) Bu şekilde, x yerine a dediğim için şöyle yazsam daha düzgün olucak, f(a). Ha şöyle. Bunun da tersini almam gerekiyo benim. Bunun da tersi bu şekilde alınıyo. Bu hemen hemen böyle. Tamamen ezber yani. Aklımda böyle kalmış. Yani mantıklı mı bilmiyorum bu şekilde oluyo bildiğim kadarıyla. Burada da yukarıda yaptığım gibi bununla bunun eşit olduğunu gösteriyorum. f'in değili, g'nin değili açıyorum c olsun çünkü buradan yola çıkacağım için c dedim. g'nin değilinden c, b ye gider. f'in değili b de a ya gider. Zaten bunlar örten olduğu için, mesela g'nin değili c, b olduğu için bunu bana vermiş örten diye öyle bir değer seçiyorum ki b gider o yüzden bu örtendir. Burası örtense tamam burada sorun yok ilk aşamayı geçtim. İkincisinde de aynı şekilde bunun da tanımı vermiş bu da örten. Yani öyle bir b değeri verin ki demiş a değerini buluyorum. O yüzden, zaten bunlar fonksiyondur, örten fonksiyondur. Bileşke de örtendir.

ÖA4B kodlu katılımcı örtenlikte ifadenin tersinin alınması gerektiğini anımsamaktadır. Katılımcı bunu ezberlediğini ve aklında tamamen böyle kaldığını dile getirmektedir. Katılımcı burada anlamını bilmeden ezberlediği farklı tanımları birbirine karıştırmıştır. Daha sonra da bu tanımları beşinci problemi çözmek için kullanmıştır. Bu da katılımcının dışsal şemalardan otoriteyi kullandığını göstermektedir.




Şekil 27. ÖA4B'nin klinik görüşmede beşinci probleme ait çözümü

Şekil 27'de ÖA4B'nin beşinci problemi çözerken izlediği yol görülmektedir. Katılımcı bu süreçte tanımladığı f ve fonksiyonaının tersini bulmuştur. Daha sonra da önce g bileşke f fonksiyonunu ve ardından da f'in tersi bileşfe g'nin tersini bularak birbirine eşit olduğunu yazmıştır. Katılımcı problemi çözme sürecinde yanlış anımsadığı örtenlik tanımını kullanmış ve işlemlerini buna göre yaparak tamamlamıştır. Bu da katılımcının klinik görüşmede dışsal şemaları kullandığını göstermektedir.

ÖA4B gibi ÖA1A'da bir ifadenin örten olması için tersinin olması gerektiğini;

> "Bu soruları yaptıktan sonra birebirliğin ve örtenliğin tanımına baktım. Daha doğrusu genel matematik ve soyut defterlerime baktım. Ordan örtenliğin tanımından tersinin alınabilir olması gerektiğini biliyodum. Soruya baktığımda başta hatırlamadım ama sonra hatırladım örten olması için tersinin alınabilir olması gerektiğini. O şekilde yaptım. Derste gördük, ordan hatırladım. Yani örten olabilmesi için tersinin alınabilmesi gerekir."

Biçiminde dile getirerek görüşmede de yazılı sınavda olduğu gibi dışsal şemalardan otoriteyi kullanmıştır. Burada hem ÖA4B ve hem de ÖA1A bir fonksiyonun tersinin olması için birebir ve örten olması gerekir ifadesi ile örtenliğin tanımını birbirine karıştırmış olabilirler.

Katılımcılardan ÖA4D beşinci problemi ikinci problemle aynı biçimde çözerek yazılı sınavda ve klinik görüşmede dışsal şemaları kullanmıştır. Katılımcı görüşmede beşinci problemi aşağıdaki gibi çözmüştür.

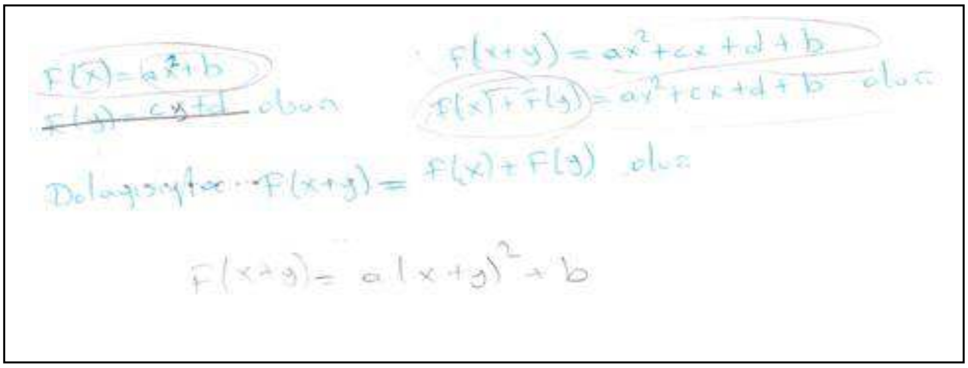
> "Bizim elemanlarımızın hepsi buradaki bir elemana gidiyorsa; A kümesindeki bütün elemanların B'deki bir elemana gittiğini düşünürsek sonuçta bizim diğer fonksiyonumuz da B'den C'ye burada da B'deki bütün elemanlar C'deki bir elemana gidiyor. Sonuçta A'dan çıkan biri C'deki bir elemana ulaşabiliyormuş. Mantıken düşündüğümde bunun örten olduğunu söyleyebilirim. g bileşke f fonksiyonunun örten olduğunu söyleyebilirim. Ama ispatına geldiğimizde nasıl olabilir. a, b, c şekline giden elemanlar söyleyebiliriz. f(a) neye eşittir b'ye eşittir. Sonuçta diğer elemanlarda bu şekilde gittiğinde örtendir yazabilirim. g fonksiyonu için ise g(b) eşit c dediğim takdirde örtendir. Bu bize veriliyor zaten. b fonksiyonu f(a) ya eşit o zaman g(f(a)) eşit c şeklinde yazabilirim. Buradan da g(b) eşit f(a) eşit c'dir."

ÖA4D burada beşinci problemi doğru olarak çözmüştür fakat çözüm şekli ikinci problem olan birebirlik ile aynıdır. Bunun sonucunda da katılımcı örtenlik ile birebirliği ya birbirine karıştırmış veyahutta matematiksel ifadelerine birbirine karıştırmış olabilir. Bunu da;

> "Örtenlikte şu an kafam karıştıran şey tanım kümesindeki elemanlar görüntü kümesine gittiklerinde görüntü kümesinde açıkta eleman kalırsa bu bir kere içine fonksiyon olmuş oluyor. Ama örten olmuş oluyor mu? Örten olmuş olmuyor. Çünkü görüntü kümesinde açıkta eleman kalıyor. Hepsinin bir elemana gitmesi lazım. Şimdi aklıma gelen bir şey gene kafamı karıştırdı. Birebirlikte iki elemanın görüntü kümesinde bir elemana gitmesi de mümkün gibi gözüküyor. Çünkü burada 5 eleman vardır burada 4 eleman vardır. 2 eleman bir elemana gidebilir. Ama bu durumda birebirle fark ne?"

Şeklinde açıklayarak görüşmede anlamanı bilmeden ezberlediği birebirlik ve örtenlik kavramlarının tanımlarını birbirine karıştırmıştır. Bu da öğretmen adayının dışsal şemalardan otoriteyi kullandığını göstermektedir.

Dışsal şemalardan otoriteyi kullanan katılımcılar çoğunlukta olmasına rağmen sembolik kanıt şemaları kullanan katılımcılar da olmuştur. Bunlardan ÖA2A üçüncü problemin çözümünde dışsal şemaları kullanmasının yanı sıra yazılı sınavda de ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanmıştır. Fakat katılımcı yazılı sınavda üçüncü problemi çözerken deneysel şemaları kullanmıştır. Çözümünü ise aşağıdaki gibi yapmıştır.




Şekil 28. ÖA2A'nın yazılı sınavda üçüncü probleme ait çözümü

ÖA2A kodlu katılımcı yazılı sınavda deneysel şemaları kullanarak çözdüğü üçüncü problemde F(x) ve F(y) yerine kendince fonksiyonlar tanımlamıştır (bkz. Şekil 28.). bunun için de F(x) yerine ikinci dereceden bir fonksiyon tanımlarken F(y) yerine birinci dereceden bir fonksiyon tanımlamıştır. Bunun ardından da problemi çözmüştür. Katılımcının dışsal şemaları kullandığı görüşmeye ait diyaloğa ise aşağıda yer verilmiştir.

T : Peki bu durumda bu eşitlik doğru mu yanlış mı?
ÖA2A: Doğru hocam.
T : Peki neye dayanarak doğru olduğunu söylüyorsun bana?
ÖA2A: Neye dayanarak? Kümelerde vardı hocam.
T : Nasıl kümelerde vardı?
ÖA2A: S(AUB) eşittir S(A) bileşke S(B) (S(AUB)=S(A)US(B)) bunun gibi. Aynı şey hocam. S(A+B) eşittir S(A) artı S(B) (S(A+B)=S(A)+S(B)) oluyo. Toplam oluyo.
T : Burada S(A) neyi temsil ediyor?
ÖA2A: Eleman sayısını.
T : Peki kümelerde ortak elemanları varsa ne yapacağız?
ÖA2A: Kesişim eksi, fark.
T : Peki burada ne olacak?
ÖA2A: Burada öyle bişey yok. Burada ortak eleman yok.
T : Yok mu?
ÖA2A: Yooo, ortak eleman, olabilir hocam. Mesela 2 artı 2 eşittir 4.
T : Bu tür eşitliklerin olması, mesela sen burada 2 artı 2 eşittir 4 dedin. S(AUB) eşittir..
ÖA2A: S(A+B)…
T : Tamam S(A+B)=S(A)+S(B) gibi eşitliklerin olması sana göre $F\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{F(x)+F(y)}{2}$ eşitliğinin doğru olmasını sağlar mı?
ÖA2A: Sağlıyo.

T : Başka bir açıklaman var mı peki buna?
ÖA2A: Şu an yok hocam. İnanın ki 2 artı 2 eşittir 4 ise bu da eşittir.
T : Yani 2 artı 2 eşittir 4 olması bu eşitliğin doğru olmasını mı sağlıyor?
ÖA2A: Sağlıyo.
T : Peki yeterli mi?
ÖA2A: Yeterli değil tabiî ki de. Ama dedim ya hocam benim ispatla pek aram yoktur. Ama bu eşitlik doğrudur.

Katılımcılardan ÖA2A görüşmede üçüncü problemde dışsal şemalardan sembolik kanıt şemasını kullanmıştır. Çünkü burada katılımcı için S(AUB)=S(A)US(B) eşitliğinin veya S(A+B)=S(A)+S(B) eşitliğinin doğru olması problemde sorulan eşitliğin doğru olduğunu göstermek için yeterlidir. Bu nedenle de katılımcı savunmasını bu eşitliklerin doğruluğundan yola çıkarak yapmıştır.

ÖA2D ikinci sınıfa devam etmekte olan ve yazılı sınavda bütün şemaları eşit oranda kullanan katılımcılardandır. ÖA2D kodlu katılımcı görüşmede sekizinci problemi doğrulama sürecinde işlemleri yapmaya başlamış fakat sonuçlandıramamıştır. Bu süreçte katılımcı ilk olarak verilen eşitliğin doğruluğunun son derece açık olduğunu aşağıdaki biçimde ifade etmiştir.

ÖA2D: (sessizlik) Olduğunu gösteriniz. Bunun olduğunu nasıl göstereceksek! Aşikâr.
T : Neden aşikâr?
ÖA2D: Biz ezberledik ya!
T : Ha ezberlediniz.
ÖA2D: Kanun olarak gördük zaten.

Katılımcı önce verilen ifadenin aşikâr olarak eşit olduğunu çünkü ifadeyi bir kanun olarak ezberlediğini dile getirmiştir. Fakat daha sonra eşit olduğunu aşağıdaki biçimde göstermeye çalışmıştır.

ÖA2D: Buna y diyelim. Buna da x. Buna a, b, c diyelim. Üstlerden gitmek gerek. Bi dakka bunlara a, b, c dersem diğerleriyle karışır. Biz bunlara alfa, beta ve gama diyelim.
T : Tamam.
ÖA2D: x üzeri alfa eşitmiş ab oluyor, x üzeri beta eşitmiş a oluyor, x üzeri gama eşitmiş b oluyor. Bu eşitlikten…
T : Onu nasıl yazdın?
ÖA2D: Ben böyle yaparım her zaman için. 2 üzeri 8 eşittir 3 ($\log_2 8=3$) ise 2 üzeri 3 eşittir 8'dir, logaritmada.

Katılımcılardan ÖA2D logaritmik fonksiyonları üstel fonksiyon olarak yazmak için ezberlediği bir örneği kullanmaktadır. Katılımcı görüşmede logaritmik fonksiyonları üstel hale getirdikten sonra çözümüne aşağıdaki gibi devam etmiştir.

ÖA2D: İspatlamaya gidiyorum ama… Şimdi buradan bunları toplamış bunu bulmuş, dimi? Sonuç bu. x üzeri alfa eşit x üzeri beta artı x üzeri gama. 2 üzeri 5 eşittir 2 üzeri 3 artı 2 üzeri 2. buradan x üzeri alfa, demek ki ortak paranteze topluycaz. Ortak çarpan parantezine topluyoruz ilk önce. Gama parantezine alıyorum, x üzeri gama parantezinde x üzeri beta eksi gama artı 1, bunu bulduk. ($x^{\alpha}=x^{\gamma}(x^{\beta-\gamma}+1)$ Buradan bir şey çıkar mı? Ama benim bulduğum şey bunu araştırmıyorum ki ben şimdi.

T : Neyi araştırıyorsun?

ÖA2D: Yanlış yere kaydı. Böyle mi olur?

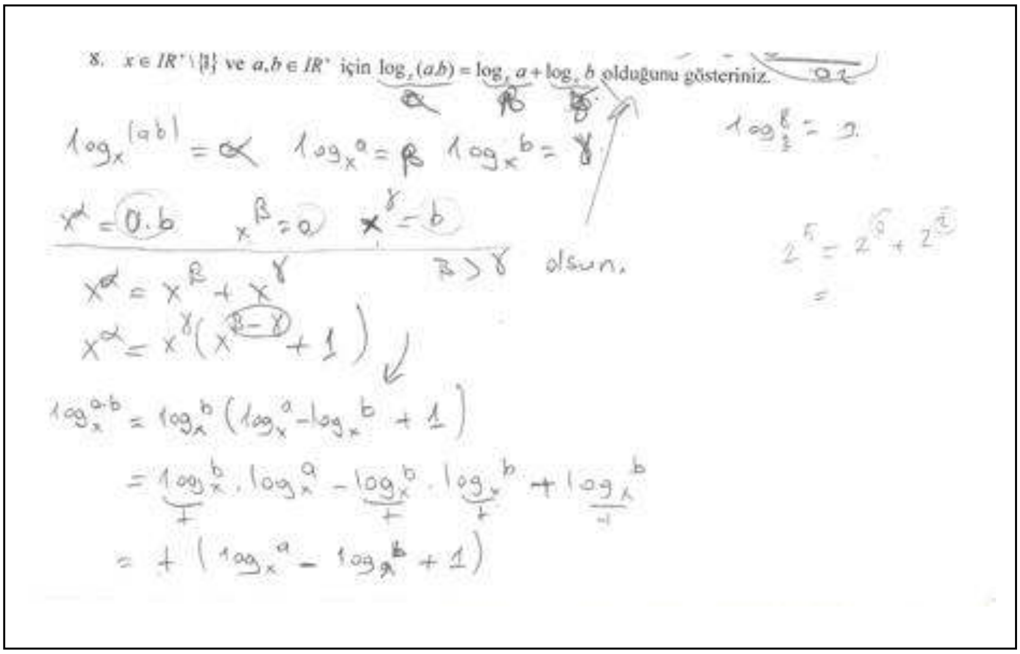
T : Bilmiyorum. Sen karar vereceksin nasıl yapman gerektiğine veya doğru olup olmadığına.

ÖA2D: Burada tekrar logaritma dönüşümü yapalım. Bakalım ne olacak? Logaritma x tabanında a çarpı b eşit logaritma x tabanında b parantez logaritma x tabanında a eksi logaritma x tabanında b artı 1, kapat parantez. Buda eşittir logaritma x tabanında b çarpı logaritma x tabanında a eksi logaritma x tabanında b çarpı logaritma x tabanında b artı logaritma x tabanında b. Bu da artı, artı, artı, logaritma x tabanında a eksi logaritma x tabanında b artı 1.

T : Her iki tarafın niye karesini aldın orada?

ÖA2D: Her iki tarafın niye karesini aldım? Toplamı bulmak için şu toplam var ya. Onu arayacağım. Karesini aldığımda çıkıyordu. İspata yönelik yaptığım için zaten… (yaptıklarını mırıldanarak inceliyor) Bunlar zaten x kare t değil miydi hocam? x, k, t, bunlar gider o zaman. 2'ler gitti, x, t artı k kaldı o zaman. Bu tarafta da a çarpı b.

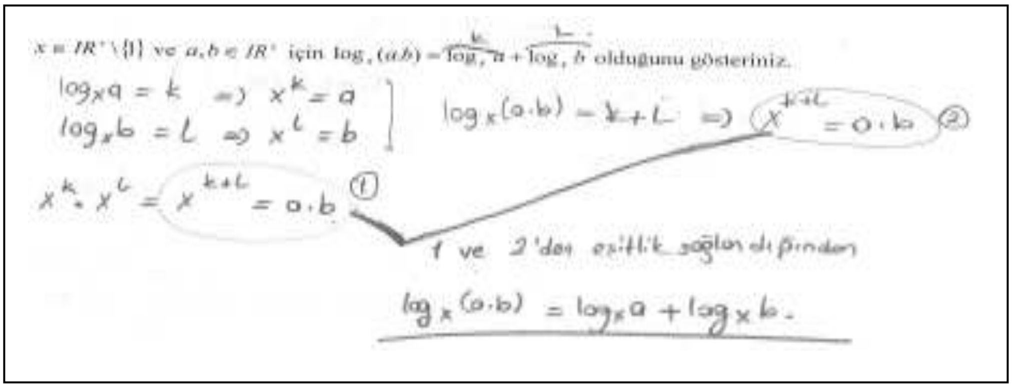
ÖA2D görüşme sırasında sekizinci problemde verilen ifadeyi doğrulama sürecinde yaptığı işlemler sonucunda problemi sonuçlandırmayı başaramamıştır. Katılımcı problemi çözerken yanlış anımsadığı bazı kuralları da kullanmıştır. Örneğin; katılımcı $2^5$ sayısını eşittir $2^3$ artı $2^2$ ($2^5=2^3+2^2$) şeklinde yazarak işlemlerini yürütmüştür. Katılımcının problemi sonuçlandıramamasındaki nedenlerden biri yanlış anımsadığı sembolik kurallar olabilir. Katılımcının görüşmede dışsal şemalardan sembolik şemayı kullandığı sekizinci probleme ait çözümü Şekil 29'da görülmektedir.




Şekil 29. ÖA2D'nin klinik görüşmede sekizinci probleme ait çözümü

ÖA2D sekizinci problemi çözerken önce logaritmanın tanımını kullanarak verilen ifadeyi üstel konuma getirmiştir (bkz. Şekil 29.). Katılımcı daha sonra sembolik olarak yanlış anımsadığı üstel sayı kurallarını kullanarak problemi çözmeye çalışmış fakat sonuçlandıramamıştır. Katılımcı yazılı sınavda da benzer bir çözüm yaparak dışsal şemaları kullanmıştır.

Dışsal şemalardan otorite ve sembolik şemaların yanı sıra alışkanlık edinilmiş şemaları kullanan katılımcılar da olmuştur. Bunlardan birinci sınıfa devam etmekte olan ÖA1A dokuzuncu problemin çözümünde yazılı sınavda analitik şemaları kullanırken klinik görüşmede dışsal şemaları kullanmıştır. Katılımcının yazılı sınavda yaptığı çözüm aşağıda yer almaktadır.




Şekil 30. ÖA1A'nın yazılı sınavda sekizinci probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA1A yazılı sınavda analitik şemaları kullanarak çözdüğü sekizinci problemde logaritma tanımını ve üslü sayıları kullanmıştır (bkz. Şekil 30.). Bunun yaparken ise önce logaritmanın tanımını kullanarak ifadeyi üslü olarak yazmış ve ardından da üslü sayıların özelliklerini kullanarak eşitliğin doğru olduğunu göstermiştir. Bunun yanı sıra klinik görüşmede dışsal şemaları kullandığı sekizinci problemde açıklamasını aşağıdaki gibi yapmıştır.

ÖA1A: (Problemi sesli olarak okuyor) $\log_x(a.b) = \log_x a + \log_x b$'ye eşit olduğunu söylemiş. Logaritma x tabanında a'yı k'ya eşitliyorum. Logaritma x tabanında b'yi de l'ye eşitliyorum (söylediklerini yazıyor). Buradan x üzeri k eşittir a, x üzeri l eşittir b oldu.

T : Bunları nasıl yazdın?

ÖA1A: Bunları logaritmanın tanımından, üstel şekilde yazdım.

T : Peki, devam edelim.

ÖA1A: (Konuşurken işlemlerini de yapıyor) Logaritma x tabanında a çarpı b'de, $\log_x a$ =k demiştim. $\log_x b$ =l demiştim. Dolayısıyla toplamları k artı l oldu. Burada da aynı logaritma tanımını kullanırsak x üzeri k artı l eşittir a çarpı b olur. Tamam, burada da a çarpı b aynı değeri çarparsak, x üzeri k çarpı x üzeri l eşittir x üzeri k artı l olur

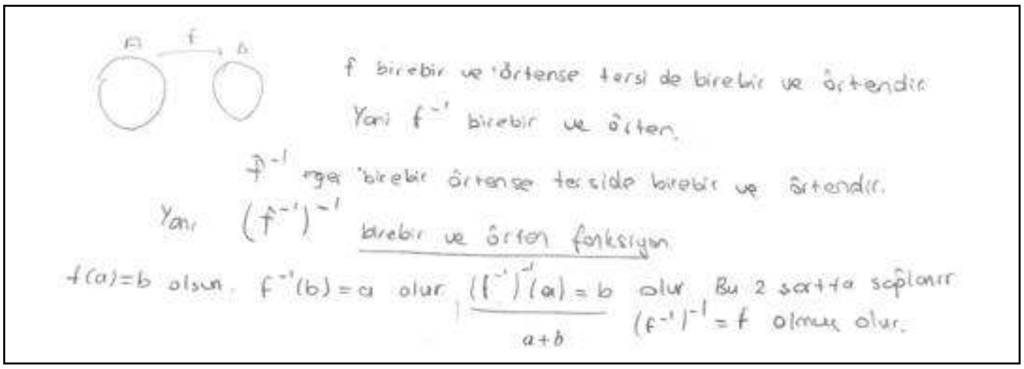
($a.b=x^k.x^l=x^{k+l}$). Aldığımız sonuçlar birbirini destekliyor. İkisi birbirine eşit. Dolayısıyla da göstermiş olduk.

Katılımcılardan ÖA1A sekizinci problemi çözmek için işlemleri yaparken aslında istenen ifadenin eşit olduğunu göstermek yerine öyle olduğunu kabul edip sadece üstel şekle getirmektedir. Daha sonra yaptıklarını anlatması istendiğinde ise;

T : Ne yaptığını anlatabilir misin?
ÖA1A: (Yaptığı işlemleri anlatıyor) b eşittir y. Logaritma x tabanında k eşit a. x üzeri l eşit b oldu. Buraya baktığımızda logaritma x tabanında a.b, logaritma x, x tabanında a eşit k dedim, logaritma x tabanında b eşit l demiştim. x üzeri k eşit a'ya, x üzeri l'de b'ye eşit oldu. Logaritma z tabanında a çarpı b eşit k artı 1'ye eşit oldu. Sonra yine x üzeri k+1=a.b bunun x üzeri k eşit a ve x üzeri l eşit b olduğunu bulduk. Dolayısıyla x üzeri k+1 eşittir.
T : Burada eşitliğin doğru olduğunu düşünerek mi işleme başladın?
ÖA1A: Yok hayır eşit olduğunu düşünerek başlamadım. Buna k diyorum buna l diyorum. a'yı b'yi ayrı ayrı buldum ben burda. Buraya baktığımda da buradan a çarpı b'yi buldum. a çarpı b, x üzeri k artı 1 imiş. Dolayısıyla ikisinde de a çarpı b'yi aynı bulduğum için doğrudur.
T : Peki neden böyle bir yol izlemeyi tercih ettin?
ÖA1A: Neden böyle bir yol izlemeyi tercih ettim? Bilmiyorum ki. Böyle gösterebildiğim için gösterdim.

Açıklamasını yukarıdaki gibi yapmıştır. En son neden böyle bir yol izlediği sorulduğunda ise böyle gösterebildiği için böyle gösterdiğini dile getirmiştir. Bu da katılımcının dışsal kanıt şemalarından alışkanlık edinilmiş şemaları kullandığını göstermektedir.

ÖA3A yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanmasına rağmen dokuzuncu problemi çözerken yazılı sınavda analitik şemaları kullanmıştır. Fakat görüşmede dokuzuncu problemde dışsal şemayı kullanan bir diğer katılımcıdır. Katılımcının dokuzuncu problem için yazılı sınavda yaptığı çözüm aşağıda yer almaktadır.




Şekil 31. ÖA3A'nın yazılı sınavda dokuzuncu probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA3A yazılı sınavda dokuzuncu problemi çözerken bir fonksiyonun tersini alma kuralını kullanarak analitik şemalardan aksiyomatik şemaları kulanmıştır (bkz. Şekil 31.). Fakat katılımcı klinik görüşmede dokuzuncu problemi dışsal şemalar ile doğrulamış ve açıklamasını aşağıdaki gibi yapmıştır.

ÖA3A: (sessizlik) Mesela şurdan kümeyle başlıycam gibi. Bunla başlamak daha kolay olcak sanırım (işlem yapıyor).

T : f üzeri eksi bir üzeri eksi bir A eşittir f'in tersi A'nın tersi. Yani bunlar A'mı x'mi?

ÖA3A: A, x olarak. Aslında x'in tersini de tanımlamam lazım burada.

T : Burayı nasıl yazdın? f(x)'in tersi.

ÖA3A: Yani hocam şurda başladığım fonksiyon burada x, pardon A olsun dedim. Hani f'in tersinde A'da şunu kabul edersek x olur ya. Yani şurayı direk x olarak aldım. x eşit ya, o zaman f'in tersinde x f(A) alırsam şurası x olur.

T : Tamam sonra nasıl devam edeceksin?

ÖA3A: (sessizlik, işlem yapıyor) Şöyle yapıyım. a, b eleman A olsun. c, d eleman B olsun diyelim. f(a)=c desem, f(b)=d desem heralde bi sorun olmaz. Aynı şekilde o zaman f(c)'nin tersi a, f(d)'nin tersi b olur.

T : Bu kadar çok değişkene neden ihtiyacımız var?

ÖA3A: Çünkü tersinin tersini aldığımızda kendine eşit olcak ama onun kanıtı için gerekli olucak diye düşündüm. Aslında şu soruda birçok değişkene ihtiyacımız olduğunu hissettirmek bana burada daha fazla kullandırttı yani.

T : 7. Problem mi?

ÖA3A: Evet. Şimdi şöyle yapsak (sessizce işlem yapıyor). Şöyle düşündüm şimdi…Şöyle düşünürsek eğer, ifadeyi göstermek için. İfade mantık olarak doğru mudur? Herhangi bir fonksiyonu işleme soktuğumuzda tersinde, şurda b tersi eleman B'den olucak, değil mi? Tersi olduğu için A'da olcak, A'ya gidicek, değil mi şunun sonucu? Yani sonuç A'ya gidiyo olcak. Ama bunun da tersini aldığımız zaman, yani buradaki eleman A'ya giden bi eleman. A'dan bir eleman. Bunun da tersi o zaman B'ye giden bi eleman olucak.

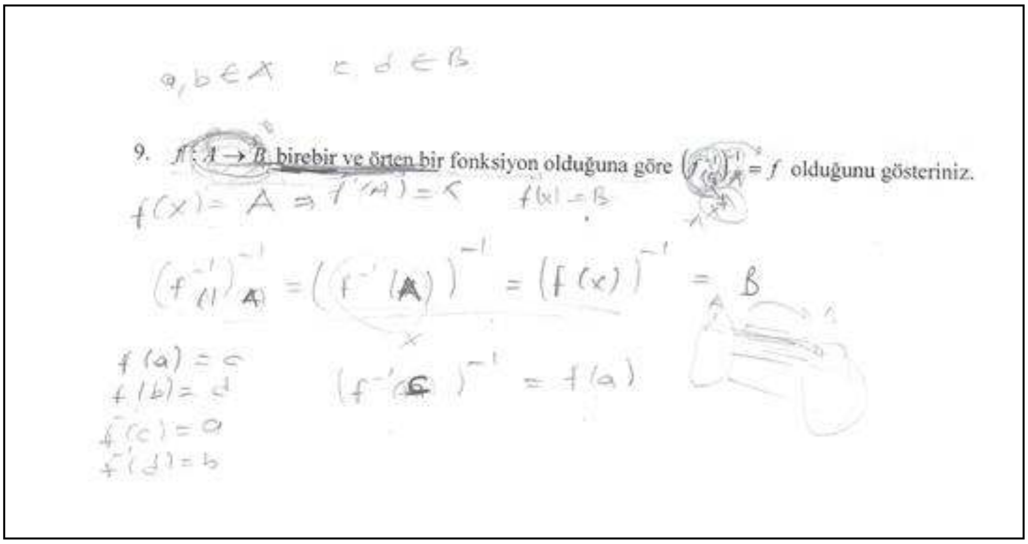
T : Peki burada f'in A'dan B'ye tanımlanması ile f'in tersinin tersinin A'dan B'ye tanımlanması bu eşitliğin doğruluğunu göstermek için yeterli mi?

ÖA3A: Şöyle bişey var ama. Eğer öğrenci yıllarımdan hatırlıyosam, 1. sınıftan f birebir ve örten ise terside bunun birebir ve örtendir. Soyut dersinden hatırladığım, ispatladığımız kadarıyla öyle hatırlıyorum. Eğer bunun tersi de birebir ve örtense ve aynı şekilde A'dan B'ye gidiyosa bu demek ki tersinin tersi kendisine eşittir. Çünkü hem birebir olcak. Birebir ne demek (sessizlik)? Hem açıkta eleman kalmıycak ve hem de A'dan B'ye gitcek. Her eleman bi elemana gitmiş olcak. Burada açıkta eleman kalmıycak. Ve yine tanım ve görüntü kümesi yine aynı olmuş olacak. Yani şurda şu sorunun ispatı için ilk önce f birebir ve örtense tersinin de birebir ve örten olduğunun gösterilmesi gerekir. Ardından tanım kümelerinin ve görüntü kümelerinin de aynı olduğunun gösterilmesi lazım. Gösterelim ki eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

T : Neden?

ÖA3A: (sessizlik) Birebir ve örten olduğu gösterilmek zorunda zaten bunun. Biz zaten tek yoldan öğrenmiştik bunu. Başka yolda aklıma gelmiyo.

ÖA3A açıklamasını aynen ÖA3D gibi yapmıştır. ÖA3A'ya göre de dokuzuncu problemde verilen ifadenin eşit olması için birebir ve örten olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Bunun yanı sıra katılımcı için $(f^{-1})^{-1}$ ile f'in tanım ve değer kümelerinin birbirine eşit olması ifadelerin birbirine eşit olması için gereklidir. Bunun yanı sıra ÖA3A dokuzuncu problemi bazı değişkenler kullanarak çözmeyi denemiştir. Fakat katılımcı açıklamasının sonunda tek bir yoldan öğrendiklerini ve aklına başka bir yol gelmediğini dile getirerek dışsal şemalardan alışkanlık edinilmiş kanıt şemalarını kullanmıştır. Çözümünü ise aşağıdaki gibi yapmayı denemiştir.




Şekil 32. ÖA3A'nın klinik görüşmede dokuzuncu probleme ait çözümü

ÖA3A dokuzuncu problemi Şekil 32'deki gibi çözmeyi denemiştir. Bu süreçte farklı farklı değişkenler tanımlamıştır. Ama herhangi bir sonuca ulaşamamıştır. Aslında katılımcı görüşmede de yazılı sınavda olduğu gibi bir fonksiyonun tersini kullanmaya çalışmış fakat bir sonuca ulaşamamıştır.

Sonuç olarak; dışsal şemaları kullanan katılımcıların çoğunluğu otorite kanıt şemasını kullanmışlardır. Fakat birkaç tane alışkanlık edinilmiş ve sembolik kanıt şeması da kullanılmıştır. Dışsal şemalardan otorite kanıt şemasını kullanan katılımcılar genellikle ezberledikleri tanımları, kuralları veya formülleri kullanmışlar veya bu ezberlediklerini yanlış anımsayarak işlemlerini yürütmüşlerdir. Bu süreçte öğretmen adayları zaman zaman doğru biçimde dile getirdikleri bazı tanımları da farklı durumlara transfer edememişlerdir. Bu da katılımcıların aslında tanımı içselleştiremediklerinden, sadece ezberlediklerinden dolayı kaynaklanıyor olabilir. Dışsal şemaları kullanan bir kısım öğretmen adayı da problemde verilen ifadeyi daha önce gördüklerine dair öğretmen, ders kitabı, ders, arkadaş gibi kaynaklar göstererek herhangi bir çözüm yapmamışlardır. Bunun yanı sıra katılımcılar, sembolik şemalarda sembolleri anlamsız bir biçimde kullanırken alışkanlık edinilmişte de problemi tek yoldan çözmeyi öğrendiklerini ve o yolu kullandıklarını dile getirmişlerdir. Bunun yanı sıra yazılı sınavda bazı problemlerde bazı katılımcılar analitik şemalar kullanmış gibi görünselerde aslında klinik görüşmeler sırasında bu şemaların dışsal şemalar olduğu da ortaya çıkmıştır.

### 3.3.2 Deneysel Kanıt Şemalarının Farklı Sınıf Seviyelerindeki İlköğretim Matematik Öğretmeni Adayları Tarafından Kullanımına Dair Bulgular

Deneysel kanıt şemasında fiziksel gerçeklerin veya duyusal deneyimlerin yardımıyla tahminler denetlenmekte, doğrulanmakta veya yanlış oldukları görülmektedir. Buna bağlı olarak da deneysel kanıt şemaları öğrencilerin geçerlik için kullandıkları özel örnekleri ve sezgisel desenleri içermektedir. Birey deneysel kanıt şemalarında daha önceden kendisine gösterilmiş olan bir veya birkaç örneği savunmasında kullanmasının yanı sıra sezgilerine de güvenmektedir ve bu sezgilerini savunmalarında veya çözümlerinde kullanmaktadır. Deneysel şemalar temel örnekler ve sezgisel olmak üzere iki alt şemadan oluşmaktadır.

Bu çalışmada bütün problemler göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adaylarının %18,2'si (288 problem) yazılı sınavda ve %31,25'inin (50 problem) de klinik görüşmelerde deneysel şemaları kullandıkları görülmektedir. Klinik görüşme katılımcılarının 14'ü birinci sınıf, 16'sı ikinci sınıf, 14'ü üçüncü sınıf ve 6'sı da dördüncü sınıfa devam etmektedir. Deneysel şemaların klinik görüşmede farklı sınıf seviyelerinde kullanımına bakıldığında 1, 2 ve 3. sınıfların kullanımı birbirine son derece yakın olmasına rağmen dördüncü sınıfların kullanımında bir düşüş meydana geldiği görülmektedir. Bunun yanı sıra klinik görüşmeye katılan katılımcılar yazılı sınavda 42 problemde deneysel şemaları kullanmışlardır. Bu da gösteriyor ki klinik görüşmede deneysel şemaları kullanan bütün katılımcılar yazılı sınavda deneysel şemaları kullanmamışlardır. Bunun yanı sıra deneysel kanıt şemalarının bütün alt şemaları kullanılmıştır. Fakat katılımcıların en fazla kullandıkları şema temel örnekler kanıt şeması olmuştur. Bu süreçte ise katılımcıların çoğu problemde verilen durumu bir örnek ile doğrulamaya çalışmışlardır. Bunun yanı sıra birkaç problemde de sezgisel şemalar kullanılmıştır.

ÖA1C yazılı sınavda ikinci problemi boş bırakmış olmasına rağmen klinik görüşmede çözüme ilişkin önemli ipuçları vermiş fakat sonuçlandıramamıştır. Bunu da aşağıdaki biçimde dile getirmiştir.

ÖA1C: Bir ifade verilmiş. Birebirin tanımı öncelikle tanım kümesindeki farklı her elemanın değer kümesinde farklı elemanlarla eşlenmesi diye biliyorum. Şimdi buradan A'dan B'ye üst fonksiyon, buradan yola çıktım. g bileşke f fonksiyonu g'de f kapsar. f fonksiyonu A'dan B'ye, diğer fonksiyonda, g'de B'den C'ye. (sessizlik) B'den C'ye (sessizlik). olduğunu gösterin diyo.

T : Nasıl göstereceğiz?

ÖA1C: A, B, C kümelerini kendimiz seçelim. Fakat burada da doğru olduğunu gösterin diyor. Bir öncekinden, g bileşke f'de bir elaman alsak. (sessizlik)

T: Burada birebirliğin tanımını mı hatırlayamadın?

ÖA1C: Birebirliğin tanımını biliyorum da şimdi ispat ederken nereden başlıycam? Keyfi bir eleman seçsek. Öyle gitsek ama nerden seçsem? (sessizlik)

T: Birebirlik nedir sana göre?

ÖA1C: Birebirlik tanım kümesindeki farklı her elamanın değer kümesinde farklı elemanlarla eşleşmesi demek. Yani görüntüsünde farklı olmak var. (sessizlik) Birebir olması. Şu şekliyle şurdan yola çıkarsam A'dan B'ye, B'den C'ye geçiyoruz veya ikinci bir yol olarak keyfi bir eleman seçelim. Başlıyacam da nereden başlıycamı bilemiyorum. Hangisinden başlıycam? Şu taraftan seçicem de, g(x).

Katılımcı birebirliğin tanımını sözel olarak doğru biçimde ifade etmiş ve bu tanımı kullanarak seçtiği A, B ve C kümeleri yardımı ile ifadenin doğruluğunu göstermeyi denemiştir. Bu süreçte de seçtiği keyfi bir eleman ile problemi sonuçlandırmaya çalışmış fakat başarılı olamamıştır. İkinci problemde deneysel şemaları kullanan diğer katılımcılar ise çözüme ulaşmışlardır.

İkinci problemde yazılı sınavda ve görüşmede deneysel şemalardan temel örnekleri kullanarak çözüme ulaşan ÖA3D ve ÖA4B kodlu öğretmen adayları birer tane f ve g fonksiyonu tanımlayarak g bileşke f'in birebirliğini göstermeye çalışmışlardır. Bunlardan ÖA3D yazılı sınavda kanıt şemalarını eşit oranda kullanırken ÖA4B ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanmıştır. Bu katılmcılardan ÖA3D klinik görüşmede ikinci problemin çözümünü aşağıdaki biçimde yapmıştır.

ÖA3D: f A'dan B'ye, g B'den C'ye. Bunları biraz hatırlıyorum böyle şeyler görmüştük. Cebirde ya da ondan öncekilerden birinde görmüştüm galiba. Soyut matematikte olabilir, lineer cebirde falan görmedik ama cebire giriş ya da soyut matematikte olabilir. Fonksiyonlar ve birebir. (sessizlik)

T : Burda nasıl düşünürsün ?

ÖA3D: A'daki bir eleman B'ye gidiyorda, B'deki bir eleman C'ye gidiyorsa bu da (g bileşke f) A'dan C'ye gidiyor denir (Sessizlik, düşünüyor). Hatırlıyorum, nasıl yapmıştım? A'dan B'ye, B'den C'ye bir fonksiyon almıştım (Sessizlik). Burada bir fonksiyon almıştım heralde. f(x) eşit 2x olsun mesele (İşlem yapıyor). Diğeri de (g(x)) 3x olsun. Burda g(x)'de x yerine f(x) fonksiyonu, yerine koyunca, mesela g(x) 3x gibi bir fonksiyon olarak düşündüm. f(x) 2x gibi düşündüm. Birebir olması için, yani g bileşke f(x)'in olması için g'de f(x). g(x) eşit 2x. O zaman f(x) g'de 2x olduğunu düşününce g bileşke f aldım, 6x oldu (g(2x)=6x). Bu da g bileşke f(x) oldu. Dolayısıyla birebir demiştim. Bu birebir ve örten bu da birebir ve örtense g bileşke f'de birebir ve örten. Her biri farklı bir fonksiyon. O yüzden her x değeri için farklı bir değer oluyo aslında.

Katılımcı yukarıdaki biçiminde g bileşke f fonksiyonunun birebir olduğunu ifade etmiştir. Aynı şekilde ÖA4B'de f ve g'ye farklı birer fonksiyon tanımlayarak g bileşke f fonksiyonunun birebirliğini göstermişlerdir. Bu süreçte katılımcılar deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmışlardır.

Bazı katılımcılar görüşmelerde (ÖA2B, ÖA3D ve ÖA4C) üçüncü problemde yer alan F(x) fonksiyonunu ikinci dereceden olan $x^2$ olarak tanımlamışlardır. Bu problemde katılımcılardan ÖA3D yazılı sınavda analitik şemaları kullanırken görüşmede deneysel şemaları kullanmıştır. Bu süreçte ÖA3D klinik görüşmede çözümünü ve açıklamasını aşağıdaki gibi yapmıştır.

ÖA3D: Burada ne yapmıştım. Buna da ayrı ayrı demiştim herhalde. Ne yapmıştım ki? Burada bir fonksiyon belirleyim, F(x)'e bir fonksiyon verip yapmıştım galiba (düşünüyor). Burada napmıştım? 2. dereceden olduğu için F(x)'le F(y)'ye değerler verip öyle yapmıştım. Yani fonksiyon belirlemiştim. F(x) ve F(y)'ye ait değerleri bulup $F\left(\frac{x+y}{2}\right)$'ye bakmıştım. Sonra da $\frac{F(x)+F(y)}{2}$'ye bakmıştım. İkisi birbirine eşit çıkmıştı. O zaman doğrudur demiştim. Ama fonksiyonları neler almıştım, hatırlamıyorum.

T :Farklı fonksiyon kullanabilirsin. İllaki oradaki çözümünü yapman gerekmiyor.

ÖA3D: F(x)'i x kare alsam mesela, F(y)'yi de y kare alıyım. (işlem yapmaya başladı, sonuçlandırdı). Bu buna eşit çıkmadı. Eşit olmadı hocam, demek ki eşit değilmiş.

T :Eşit olabilecekleri bir durum olabilir mi?

ÖA3D: Her 2. dereceden fonksiyon için olamaz herhalde.

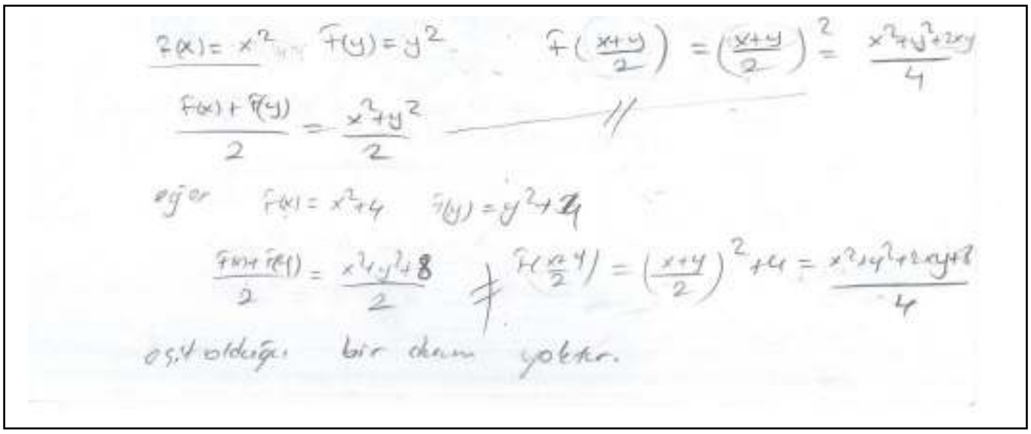
T : Neden?

ÖA3D: Çünkü burada parantez içinde 2 var, onun karesini alıyo. Bi de x artı y'nin karesini alıyo. Buradan 2xy gibi bi değerde geliyo ama buradan gelmiyo. Buradan $\frac{1}{2}$ gibi bi değer de geliyo ama bundan gelmiyo. Buradan bölü 4'de gelir, ama buradan gelmez. Ama mesela 2 bilinmeyenli bir denklem olabilir miydi? x kare, y kare. Burada x kare artı 4, y kare artı 2 olsa ne olurdu, ne olurdu? (işlem yapıyor) 2'nin karesiyle ne olacaktı o zaman şunun karesi artı 4 olacaktı. Yani yine aynı şey. Burada fazladan 16 oluyor, buradakinde 8 oluyor, yani farklı oluyor. Değerleri farklı aldığım zaman hangi fonksiyonda yerine koyacağım, y bölü 2 farklı oluyor. Şunlarda ikisinde de aynıydı böyle kullandım. Bunu da ben 4 yapıyım en iyisi böyle kafam karıştı. ($F(x)=x^2+4$, $F(y)=y^2+4$ olarak tanımladı, tekrar işlem yaptı). 8 olacak böyle olunca. x artı y bölü 2'nin karesi artı 4. Burada da x kare artı y kare artı 2xy artı 8 bölü 4. Burda da birbirine eşit çıkmıyor yine.eşit değil, burda da eşit çıkmamıştı.

T : Dolayısıyla eşit olduğu bir durum yoktur diyorsun.

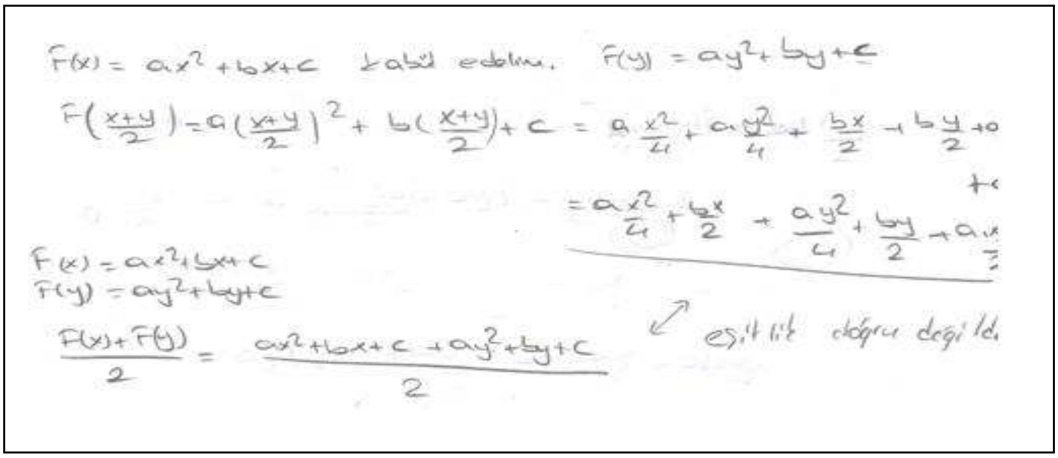
ÖA3D: Eşit olduğu bir durum yoktur.

Katılmcılardan ÖA3D görüşmede problemi çözme sürecinde önce F(x)'i $x^2$ ve F(y)'yi de $y^2$ olarak tanımlamış ve ifadenin eşit olmadığını görmüştür. Daha sonra katılımcıya bu ifadenin eşit olduğu bir durum olup-olmadığı sorulduğunda tekrar farklı fonksiyonlar ($F(x)=x^2+4$, $F(y)=y^2+4$) tanımlayarak eşit olmadığını göstermiştir. Böylece de bu ifadenin hiçbir zaman eşit olmadığını iki farklı örnekle göstermiş ve bunlar da katılımcı için yeterli olmuştur. Bu süreçte ÖA3D deneysel kanıt şemalarından temel örnekleri kullanmış ve çözümünü de aşağıdaki gibi yapmıştır.




Şekil 33. ÖA3D’nin klinik görüşmede üçüncü probleme ait çözümü

ÖA3D üçüncü problemi çözerken önce F(x) fonksiyonunu $x^2$ ve F(y) fonksiyonunu da $y^2$ olarak tanımlamış ve ifadenin eşit olmadığını göstermiştir (bkz. Şekil 33.). Daha sonra ise F(x)’i $x^2+4$ ve F(y)’yi de $y^2+4$ olarak tanımlamış ve yine ifadenin eşit olmadığını görünce eşit olduğu bir durum yoktur demiştir. Katılımcının yazılı sınavdaki analitik şemaları kullandığı çözümü ise aşağıda yer almaktadır.




Şekil 34. ÖA3D’nin yazılı sınavda üçüncü probleme ait çözümü

Katılımcı görüşmede deneysel şemalar ile çözdüğü üçüncü problemi yazılı sınavda analitik şemalar ile çözmüştür (bkz. Şekil 34.). Problemi çözerken ikinci dereceden bir denklemin genel ifadesini kullanarak problemde verilen durumun eşit olmadığını ortaya koymuştur.

Üçüncü problemde ÖA3D gibi katılımcılardan ÖA4C'de önce F(x) için $x^2$ tanımlamış daha sonra da $x^2$-2x tanımlamıştır. Her iki fonksiyon için de ifade doğru çıkmayınca eşitliğin doğru olmadığına karar vermiştir. ÖA2B için ise sadece $x^2$ değerinin ifadeyi sağlamamış olması eşitliğin doğru olmadığını göstermeye yeterli olmuştur. Bu süreçte örnekleri kullanan katılımcılar eştliğin yanlış olduğunu temel örnekleri kullanarak göstermişlerdir.

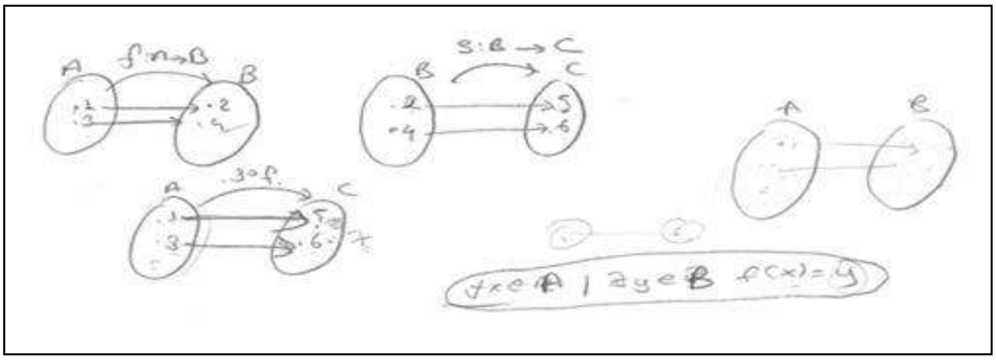
ÖA2B ve ÖA3B'de ikinci problemi çözme sürecinde hem yazılı sınavda ve hem de görüşmede venn şeması ile kümeler çizip fonksiyonlar tanımlayarak deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmışlardır. Bu süreçte ÖA2B açıklamasını;

> "Bu A kümesi. Bir B kümesi çiziyorum bunun da elemanları 1, 2, 3. Niye ikisi de üç çünkü birebir olduğu için hepsi birbirine eşit olcak. Eşleştiriyoruz şöyle mesela fonksiyonumuzda f, A'dan B'ye. Sonra bir C kümesini de oluşturuyoruz. B'den C'ye de birebirmiş. Onlara da değer veriyoruz x, y, z diye, yine üç değer. Bunları da eşleştiriyoruz. A'dan B'ye birebir, B den C'ye de birebir ise A'dan C'ye birebir olduğunu gösteriniz diyor. Buradan A ile C'yi bir alırsak şöyle bir küme yan yana. A'dan şey elemanları alalım. a'dan 1'e, buradan da buna yani g'ye direk gelecek, a'dan g'ye olacak. b'de 2'ye, 2'de x'e, yani b'den x'e, c'den de y'ye. g fonksiyonu A'dan C'ye."

Şeklinde yaparken ÖA3B'de;

> "Fonksiyonları birebirse. Ha ben bunları şekil çizerek gösteriyorum. A kümesi, B kümesi. f fonksiyonu A'dan B'ye, bu şekilde. g fonksiyonu da B'den C'ye. Şimdi A kümesinden, g bileşke f A'dan C'ye geçiyomuş. A kümesinden aldığım bir elemanı C kümesine götürmüş en son. Şöyle (yazıyor), hah. Fonksiyonunun birebir olduğunu gösteriniz. Şimdi birebir fonksiyon ne demek? Önce onu diyim. Mesela şöyle. Değer kümesinde boşta eleman kalmaması, tanım kümesinde boşta eleman kalmayacak. Burada da mesela 2, 4, 5'e götürsün, 6 (çiziyor). Sonuçta C kümesinde 5 var 6 var. A'da da 1 var 3 var. Şimdi A'daki f fonksiyonu 1'i 2'ye götürdü, g fonksiyonu 2'yi 5'e götürdü. Sonuçta 1 5'e gitmiş oluyo. Öyle düşünüyorum. 1 5'e gitti. 3'ü 4'e götürmüştü f fonksiyonu, g fonksiyonu 4'ü 6'ya götürdü. Sonuçta 3 6'ya gitmiş oldu. Burada da 3 6'ya gitti. Burada boşta eleman kalmadı. Yani her elemanı bi elemana eşleyebildik. Bu da birebir fonksiyondur."

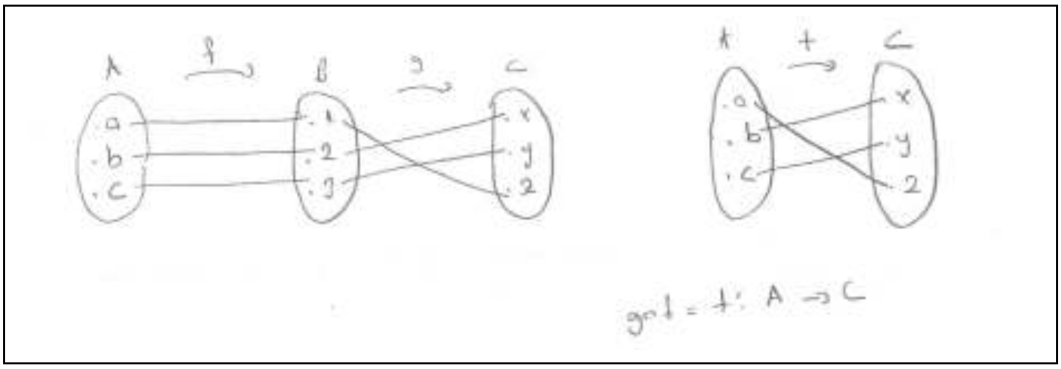
Biçiminde yapmıştır. Her iki katılımcının da venn şeması ile tanımladıkları fonksiyonlar birebir fonksiyona birer örnektir.



Şekil 35. ÖA3B'nin klinik görüşmede ikinci probleme ait çözümü

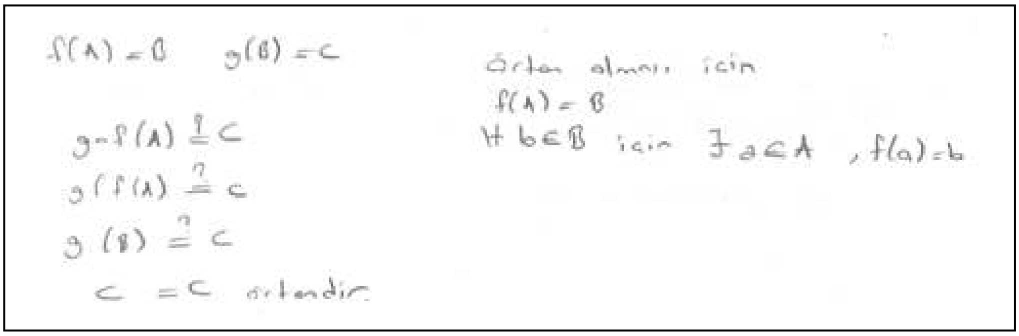
ÖA3B ikinci problemi çözerken önce f fonksiyonunu A'dan B'ye venn şeması ile ve daha sonra da g fonksiyonunu B'den C'ye venn şeması ile tanımlamıştır (bkz. Şekil 35.). Bu süreçte katılımcının tanımladığı fonksiyonlar birebirdir. Son olarak ise venn şeması ile tanımladığı A ve C kümeleri yardımıyla g bileşke f fonksiyonunun birebir olduğunu göstermiştir. Burada katılımcı seçtiği örnek kümeler yardımıyla g bileşke f'in birebirliğini göstererek deneysel kanıt şemalarından temel örnekleri kullanmıştır.

ÖA3B ile benzer biçimde ÖA2B'de klinik görüşmede çözümünü Şekil 36'daki gibi yapmıştır. Burada da ÖA2B için bir örnek ile ifadenin birebirliğini göstermek yeterli olmuştur. Çünkü katılımcı için seçtiği bir örneğin birebirliğini göstermek g bileşke f'in birebirliğini sağlamak için yeterli olmuştur.




Şekil 36. ÖA2B'nin klinik görüşmede ikinci probleme ait çözümü

Birebirlik kavramı ile karıştırılan kavramlardan biri olan örtenliği içeren beşinci problemde katılımcılardan ÖA2B yazılı sınavda analitik şemaları kullanırken görüşmede deneysel şemaları kullanmıştır. Katılımcının yazılı sınavda yaptığı çözümü aşağıda görülmektedir.




Şekil 37. ÖA2B'nin yazılı sınavda beşinci probleme ait çözümü

ÖA2B yazılı sınavda beşinci problemi çözerken örtenliğin tanımını kullanmıştır (bkz. Şekil 37.). Bu süreçte katılımcı önce örtenliğin tanımını yazmış ve daha sonra da eşitliğin doğruluğunu göstermiştir. Fakat katılımcı klinik görüşmede çözümünü venn şeması çizerek;

ÖA2B: Şimdi burada 1, 2, 3, 4 çok yazmayalım. Buna A kümesi diyelim. bi tane de C kümesi çizelim (venn şeması çiziyor). Burada örten dediği için burada o zaman nasıl olacak üç elemandan fazla olamaz. Çünkü o zaman açıkta eleman kalır fonksiyon tanımına göre. Onun için olmaz. Burada da x, y'yi bu da örten mesela g(C) olduğu için buradan da en fazla üç defa dolanabilir. Burada bir eşleşme var.

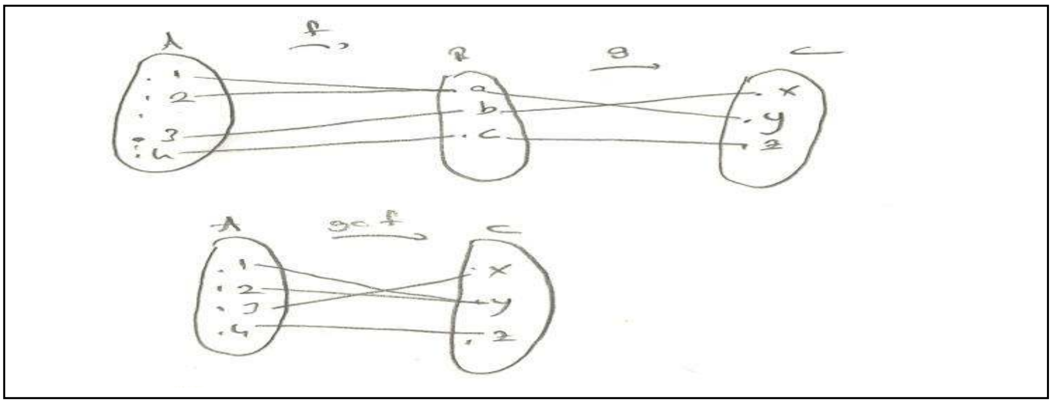
T : Tamam.

ÖA2B: Onun için işte yani g bileşke f(A).

T : Burada ne bize g bileşke f'in örten olduğunu gösteriyor?

ÖA2B: Buradan A ile C'yi de aldığımızda mesela o zaman 1, 2, 3, 4. Buradan işte eşleştirme yapıldı zaten. 1'le 2 a'ya,a'da y'ye gitti, x'le 3, bu buraya. 4 c'ye, c'de z'ye eşleşir.

Şeklinde yapmıştır. Katılımcının çözümü ise aşağıda yer almaktadır.



Şekil 38. ÖA2B'nin klinik görüşmede beşinci problem ait çözümü

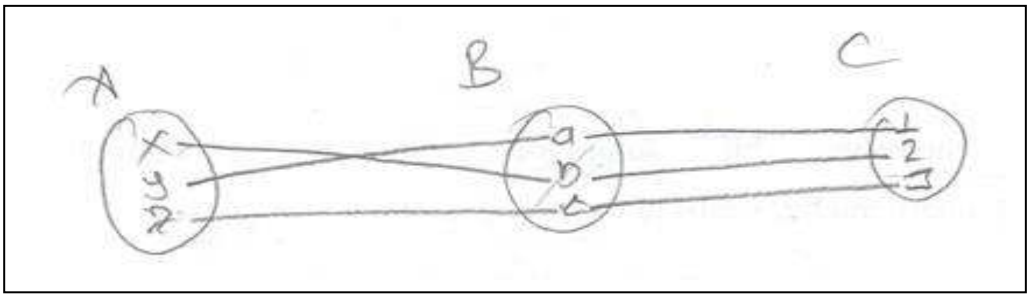
Katılımcılardan ÖA2B beşinci problemi Şekil 38'deki gibi çözmüştür. Çözümden de görüldüğü gibi katılımcı problemi çözerken venn şeması ile üç tane küme yardımıyla f ve g fonksiyonlarını tanımlamıştır. Bunun ardından g bileşke f fonksiyonunu yine venn şeması yardımı ile göstermişdir. Bunun sonucunda da örten olduğunu açıklamıştır.

Klinik görüşmeye katılan ÖA2A ve ÖA3B'de beşinci problemi doğrulama sürecinde ÖA2B gibi birer tane örnek venn şeması çizerek açıklamayı uygun görmüşlerdir. Bunu yaparken de ÖA2A görüşmede açıklamasını;

ÖA2A: Fonksiyonunun örten olduğunu gösteriniz. Hocam bunu yine aynı mantıkla yapayım ben. Şurda a olsun, şurda c olsun. Burada mesela birebir örtenle alakası olmadığı için açıkta eleman kalabilir. Burada mesela x, y, z, a, b, c; burada da 1, 2, 3 olsun (Venn şeması çiziyor). Açıkta eleman kalmayacak ya! f A'dan B'ye gitsin. Hepsi farklı elemana gittiği için. Şu da şöyle gitsin. Bu da g, B'den C'ye. g bileşke f'de A'dan C'ye bir fonksiyon olduğu için.

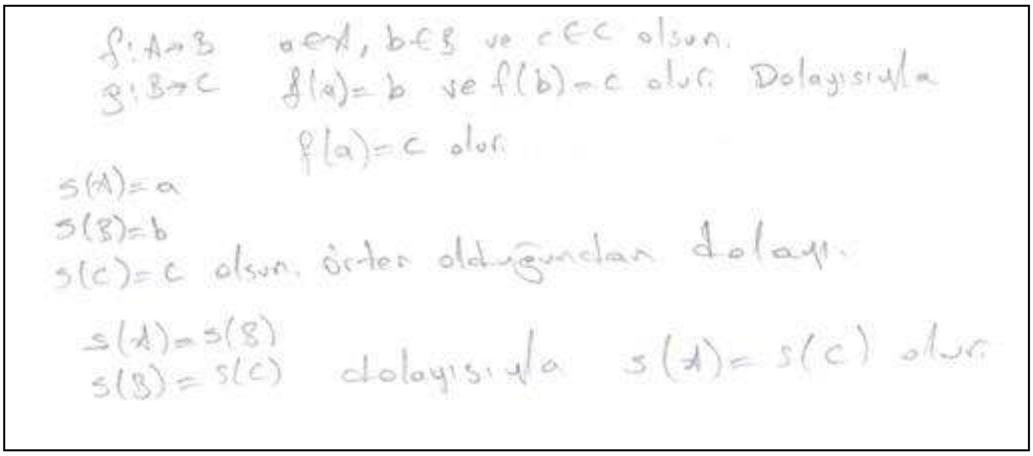
T : Peki burada örtenliği nasıl belirliyorsun?
ÖA2A: Burada mı?
T : Evet.
ÖA2A: Açıkta eleman kalmayacak yani.
T : Nerede açıkta eleman kalmayacak?
ÖA2A: Değer kümesindeki elemanların…

Şeklinde venn şeması çizerek bir örnek ile açıklamıştır. Çözümünü ise aşağıdaki gibi yapmıştır.




Şekil 39. ÖA2A'nın klinik görüşmede beşinci probleme ait çözümü

ÖA2A görüşmeler sırasında beşinci problemde gösterilmesi istenen ifadeyi seçmiş olduğu kümeler yardımı ile göstermiştir (bkz. Şekil 39.). Bunu yaparken ise A, B ve C şeklinde venn şeması ile üç tane küme belirlemiş ve ifadenin doğruluğunu göstermiştir. ÖA2A beşinci problemin çözümünü yazılı sınavda ise dışsal şemalar ile yapmıştır. Katılımcının yazılı sınavdaki çözümü ise aşağıda görülmektedir.



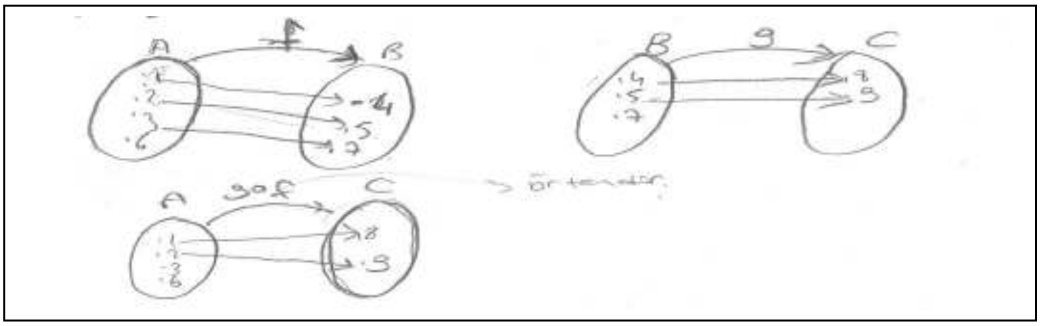

Şekil 40. ÖA2A'nın yazılı sınavda beşinci probleme ait çözümü

ÖA2A beşinci problemi görüşmelerde deneysel şemalar ile çözmesine rağmen yazılı sınavda dışsal şemalar ile çözümünü yapmıştır (bkz. Şekil 40.). Problemi yazılı sınavda çözerken ise yine A, B ve C biçiminde üç küme düşünmüştür. Bu süreçte ise A kümesi ile C kümesinin eleman sayılarının birbirine eşit olduğunu ve dolayısıyla da problemdeki ifadenin örten olduğunu belirtmiştir. Oysa ki iki fonksiyonun eleman sayılarının birbirine eşit olması o fonksiyonların örten olduğunu göstermez.

Hem yazılı sınavda ve hem de görüşmelerde deneysel şemaları kullanan ÖA3B'de görüşmede ÖA2A'nın görüşmede yaptığına benzer bir açıklamayı;

ÖA3B: Örtenlik (uzun bir sessizlik)
T : Bunlar zaten fonksiyonlar için çok temel kavramlar.
ÖA3B: Yani, ben yine şekil çizmişimdir. A'dan B'ye f fonksiyonu. Şimdi hocam özel ders veriyorum ya, böyle öğrenciler direk söylediğim şeyi anlamıyolar mesela. Böyle önce şekil falan çizdiğim zaman daha iyi oluyo, bende de o yüzden öyle bi alışkanlık kalmış, öyle yapmışımdır kesin.
T : Neden şekil çizince daha çok akıllarında kalıyor sence?
ÖA3B: Görsellik. Ya bazıları anlıyo, çünkü hani zeka çeşitleri var, biliyorsunuz. Herkeste farklı zeka var işte. Fonksiyonları örtense A'dan C'ye, gof. Şimdi örtenlikte ne olması gerekiyo. Örten, şimdi 1, 2, 3, 6 diyelim. Şu da 4, 5 (yazıyor). Örten fonksiyonda değer kümesinde açıkta eleman kalmayacak. Yani 1'i 4'e götürdüm, 2'yi 5'e, 3'ü 7'ye. Bu bi örten fonksiyon, değer kümesinde boşta eleman kalmadı (f fonksiyonu).
T : Tanım kümesinde boşta eleman kalabiliyor mu?
ÖA3B: Evet. 1 4'de, 4 8'e, 1 8'e. 2 5, 5 9, 2 9. İşte burada C kümesinde yani değer kümesinde boşta eleman kalmadığı için gof'da örtendir.
T : Bu durumda örten olma şartlarını nasıl açıklaya biliriz?
ÖA3B: Değer kümesinde boşta eleman kalmıycak.
T : Tanım kümesinde?
ÖA3B: Tanım kümesinde boşta eleman kalabilir. Tanımı inşallah yanlış hatırlamıyorumdur.
T : Tanımı nereden hatırlıyorsun?
ÖA3B: Biz üniversitede hiç fonksiyon görmedik hocam. Liseden ne hatırlıyosam o yani hocam.

Biçiminde yapmıştır. ÖA3B çizdiği bir venn şeması ile g bileşke f fonksiyonunun örtenliğini açıklamıştır. Ama örtenliğin tanımını verirken tanım kümesinde açıkta eleman kalabilir diyerek aslında fonksiyon olma kurallarını ihlal etmiştir. Fakat çizdiği venn şeması ile g bileşke f'in örtenliğini göstererek deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmıştır.



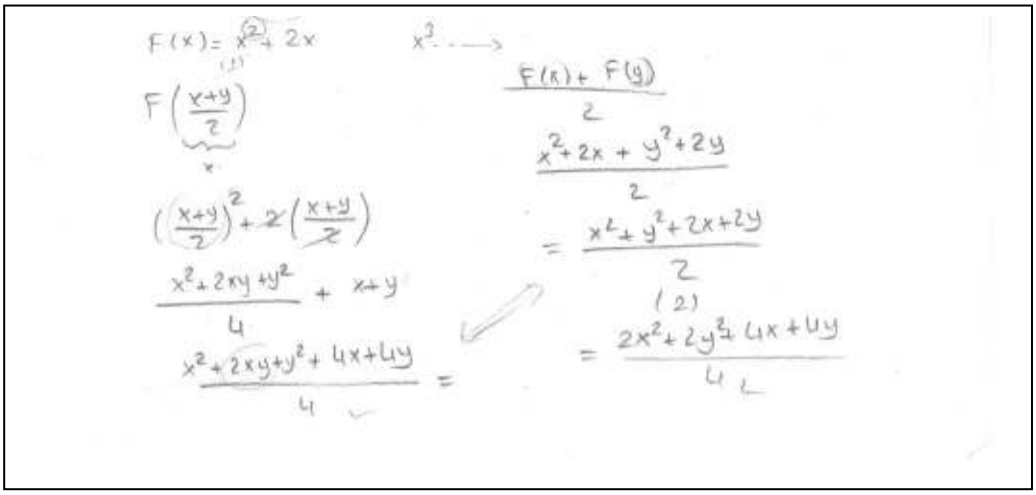

Şekil 41. ÖA3B'nin klinik görüşmede beşinci probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA3B beşinci problemi Şekil 41'deki gibi çözmüştür. Çözümden de anlaşıldığı üzere katılımcı problemi çözerken venn şeması ile üç tane küme yardımıyla f ve g fonksiyonlarını tanımlamıştır. Bunun ardından g bileşke f fonksiyonunun örten olduğunu açıklamıştır.

Katılımcılardan ÖA4B 4. sınıfa devam etmekte olan bir öğretmen adayıdır. Katılımcı yazılı sınavda ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanmıştır. Görüşmeye başlandığında katılımcının biraz tedirgin olduğu gözlenmiştir. ÖA4B ise bu tedirginliğinin nedenini yardımcı olamamaktan çekinmesi olarak açıklamıştır. ÖA4B üçüncü problemi çözerken;

> "Burada, hocam ikinci dereceden herhangi bir fonksiyon dediği bana şu, şöyle herhangi bir fonksiyon olarak ikinci dereceden dediği karesi anlamına geliyor. Mesela bu da $x^2+2x$ olabilir, bu ikinci dereceden bir fonksiyon diyebilirim ben. Mesela $x^3$ olmaz çünkü en büyük üs bize dereceyi verir. O yüzden $x^2+2x$'i kafadan alabilirim ben. Ne diyordum ben $F\left(\frac{x+y}{2}\right)$ yani şunu x olarak düşünüyorum, o zaman bunu x yerine yazarsam ben $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+2.\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Buradan bunları açınca $\frac{x^2+2xy+y^2}{4}+2\left(\frac{x+y}{2}\right)$. 2'ler birbirini götürür. x artı y, buradan paydaları eşitliyorum, $\frac{4x+4y}{4}$. Buradan en sade halini yazmaya çalışıyorum ki en sade hali bu oluyo galiba. Hemen diğerine bakıyorum. Eşitliğin diğer tarafına bakıyorum. Burada da $\frac{F(x)+F(y)}{2}$. Burada F(x) yerine direk yazıyorum kafadan verdiğim fonksiyonu 2x artı, burada da y oluyor x yerine, $\frac{y^2+2y}{2}$. Ondan sonra eşitliyorum. $\frac{x^2+y^2+2x+2y}{2}$ çıktı. Bunlar birbirine eşit olup olmadığına bakacağım, kıyaslayacağım. Şimdi birbirine eşit, bunu 2'yle çarpıyım önce. Paydalarını eşitlemek için. İkisi de, paydaları eşit olsun, bunu 2'yle çarpalım. $\frac{2x^2+2y^2+4x+4y}{4}$, şimdi paydalar aynı. $x^2$'ler ile $y^2$'ler farklı, çünkü burada fazladan $x^2+y^2$ var. Bir de farklı olarak 2xy var. Bunlar birbirine eşit değildir. Yanlıştır diyorum."

İfadesini kullanmış ve bu süreçte de F(x) olarak $x^2$ artı 2x ($x^2+2x$) fonksiyonunu kullanmıştır. Tanımladığı F(x) fonksiyonu yardımıyla sorulan ifadenin doğru ya da yanlış olduğunu göstermeye çalışarak hem yazılı sınavda ve hem de görüşmede deneysel kanıt şemalarından temel örnekleri kullanmıştır. Klinik görüşmedeki çözümünü ise aşağıdaki gibi yapmıştır.




Şekil 42. ÖA4B'nin klinik görüşmede üçüncü probleme ait çözümü

Şekil 42'de ÖA4B kodlu öğretmen adayının üçüncü problemi nasıl çözdüğü görülmektedir. Katılımcı ÖA4B seçmiş olduğu F(x) fonksiyonu yardımıyla önce $F\left(\frac{x+y}{2}\right)$'yi ve ardından da $\frac{F(x)+F(y)}{2}$'yi bulmuştur. Bunun sonucunda da iki ifadenin birbirine eşit olmadığını göstermiştir.

ÖA4B ile benzer biçimde ÖA2D'de F(x) fonksiyonunu $2x^2+5$ olarak ikinci dereceden bir fonksiyon tanımlayarak ifadenin doğruluğunu göstermiştir. ÖA2D yazılı sınavda kanıt şemalarını eşit oranda kullanan öğretmen adaylarından birisidir. ÖA2D yazılı sınavda ve klinik görüşmede üçüncü problemi çözme sürecinde deneysel kanıt şemalarını kullanmıştır.

Farklı sınıf seviyelerinden 16 öğretmen adayından ÖA1D ve ÖA4D yazılı sınavda ve görüşmede üçüncü problemi deneysel şemaları kullanarak çözmüşlerdir. Üçüncü problemi görüşmede sürecinde çözerken her iki katılımcı da F(x) fonksiyonunu $ax^2+bx+c$ olarak tanımlamışlardır. Fakat katılımcılardan ÖA1D F(y) fonksiyonunu dy+e olarak tanımlarken ÖA4D'de $dy^2+ey+f$ olarak tanımlamış ve problemi bu şekilde çözmüşlerdir. Katılımcılardan ÖA1D görüşmedeki çözümünü ise;

ÖA1D: F(y) ilk yazdığım gibi olmamalı.
T : Nasıl olmalı?
ÖA1D: 1. dereceden dy+e gibi birinci dereceden bir fonksiyon olmalı.
T : Burada söylemek istediğin F(x) ve F(y) fonksiyonları birbirine eşit olamaz.
ÖA1D: Olur, olur. Olur ama $ay^2+by+c$ gibi katsayıları eşit olamaz. Ne kadar x ve y'ler farklı olsa da, o yüzden biz 1. dereceden varsayalım, dy+e olsun, 1. dereceden bir fonksiyon. 2. dereceden de olabilirdi, sonuç aynı olurdu ama. Sonuç aynı olur. F(y)'yi yazalım o zaman,

dy+e. Buradan $\frac{F(x)+F(y)}{2}=\frac{ax^2+bx+c+dy+e}{2}$. Burada $ax^2$ var, burada da var. 2bx var burada da var. Burada 4c var burada 2c. Şimdi bunu paydaları eşit olması için 2'yle genişletelim. Buradan $\frac{F(x)+F(y)}{2}=\frac{2ax^2+2bx+2c+2dy+2e}{4}$ olur. Yine kontrol edicem. Burada $ax^2$ var burada $2ax^2$ ve birçok bilinmeyen var burada. Nedir? Burada 2bx var burada da. Burada başka bilinmeyen var. Mesela burada 2dy var, 2e var, işte 2bx var. Tamam 2bx olabilir ama $ay^2$ var buradan farklı olarak. Eee zaten daha sonra 2axy var, 2by var. Bak burada 2by var, burada 2c var. Bunların hepsi birbirinden farklı oldukları için kesinlikle F($\frac{x+y}{2}$), $\frac{F(x)+F(y)}{2}$'ye eşit olamaz. Yani bu sayısal verilere göre eşit olamaz.

Şeklinde açıklarken ÖA4D'de benzer açıklamayı F(y) yerine $dy^2$+ey+f yazarak yapmıştır. Bu nedenle de her iki katılımcı deneysel kanıt şemalarından temel örnekleri kullanmışlardır. Burada aynı zamanda her iki öğretmen adayının da F(x) fonksiyonunu F(y) fonksiyonuna transfer edemedikleri görülmektedir.

Katılmcılardan ÖA3C'de görüşmede ÖA4D gibi önce F(x)'i $ax^2$+bx+c ve F(y)'yi de $dy^2$+ey+f olarak tanımlamıştır. Buradan bir sonuca ulaşamayınca F(x)'i aynı ve F(y)'yi de $ay^2$+by+c olarak tanımlamıştır. Fakat bu değerlerle de sonuca ulaşamayınca F(x) fonksiyonunu $2x^2$+5x+3 ve F(y) fonksiyonunu da $x^2$+2x+1 olarak tanımlamış ve işlemlerini;

ÖA3C: F(x)'i (F(x)=$2x^2$+5x+3) tanımladım, F(y)'yi (F(y)=$x^2$+2x+1) tanımladım. x için y için şeyini yazdım. (işlem yapıyor) 5 bölü 2, 6, 8, 13, 9 artı 6 artı 1 bölü 2 var. $F\left(\frac{5}{2}\right)$'yi nerde yazıcam peki? Bunu nerde yazıcam? $\frac{x+y}{2}$ için de mi bir fonksiyon tanımlayım?

T : Bilmiyorum. Ona sen karar vereceksin.

ÖA3C: (mırıldanıyor) F($\frac{x+y}{2}$) eşittir $x^2$ eksi 2x artı 1 olsun. Buradan $F\left(\frac{5}{2}\right)$'yi bulalım. 25 bölü 4 eksi 5 artı 1. 25 bölü 4, 5 bölü 4 artı 1 eşittir 9 bölü 4. 9 bölü 4 eşit midir ki? 10, 16, 29, 32, 37 ya. 37 bölü 2 eşittir 18,5. Değil işte gördük, değil yani. Olamazdı da zaten.

T : Eşit olduğu bir durumda yok mudur?

ÖA3C: Hayır yoktur işte. Diyorum ya yoktur işte, şey yapılmamış. Örnek verdim, yok işte yok, eşit değil. Verdiğim örneklerde de eşit çıkmadı zaten. Başka bi örnekte versek eşit çıkmaz.

T : Bir tane aksi örnek yeterli mi o zaman?

ÖA3C: Evet yeterli.

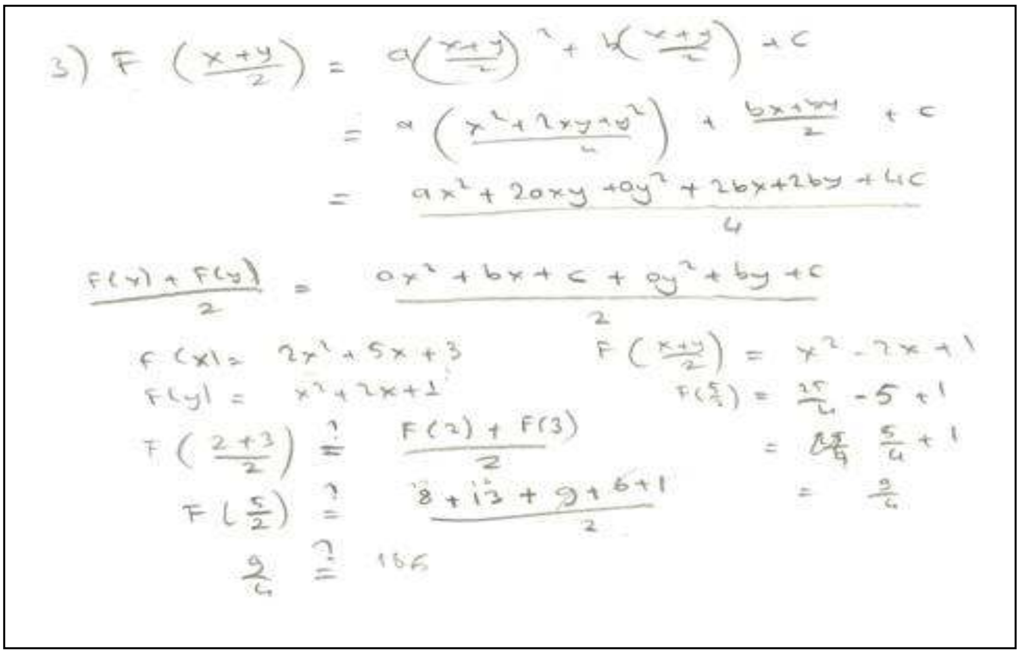
T : Bir tane aksi örnek ile gösterdiğin için bu eşitlik yanlış mıdır?

ÖA3C: Evet yanlıştır. Zaten doğru olduğuna hiç bi zaman inanmadım da.

T : Neden?

ÖA3C: Ne bileyim, o farklı gelmişti ya.

Şeklinde yapmıştır. Katılımcı burada F(x) ve F(y) fonksiyonlarını tanımladıktan sonra x yerine 2 ve y yerine 3 yazarak eşitlikte yerine koymuş ve daha sonra da eşitliğin doğru olmadığını ve hiçbir durumda da doğru olamayacağını dile getirmiştir. Katılımcı çözümünü ise aşağıdaki gibi yapmıştır.



Şekil 43. ÖA3C'nin klinik görüşmede üçüncü probleme ait çözümü

Şekil 43'de ÖA3C'nin üçüncü probleme ait çözümü görülmektedir. Katılımcı problemi çözerken önce farklı farklı fonksiyonlar tanımlamış fakat bunlar ile sonuçlandıramayınca son olarak sayısal değereler vererek sonuçlandırmaya çalışmıştır. Bunu yaparken de x yerine 2 ve y yerine de 3 vermiştir. Bunun sonucunda da ifadenin eşit olmadığını dile getirmiştir.

ÖA1D birinci sınıfa devam etmekte olan ve yazılı sınavda bütün şemaları eşit oranda kullanan katılımcılardan birisidir. Katılımcı altıncı problemi çözerken yazılı sınavda ve görüşmede deneysel şemaları kullanmıştır. ÖA1D görüşmede problemi çözerken bir fonksiyon tanımlamayı tercih eden katılımcılardan birisidir. ÖA1D problemde sorulan eşitliği;

> "Birim fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu için işte burada f(x) eşittir x, pardon burada I(x) eşittir x. Evet bir f(x) fonksiyonum ax artı b olsun, herhangi bi fonksiyon olsun. Sonra bu eşitlikte yerine koyup bulcaz I bileşke f, f(x) ax artı b dir. f bileşke I'da I(x), I(x) x'dir. Bu da f(x)'dir. f(x) eşitir ax artı b. Şimdi f fonksiyonu da, f fonksiyonu da ax artı b'dir. I(x) birim fonksiyon olduğu için o da ax artı b'dir. İkisi birbirlerine eşittir. Evet."

Şeklinde doğrularken f fonksiyonu yerine ax+b yazmayı tercih etmiştir. Bunun ardından katılımcı ile aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir.

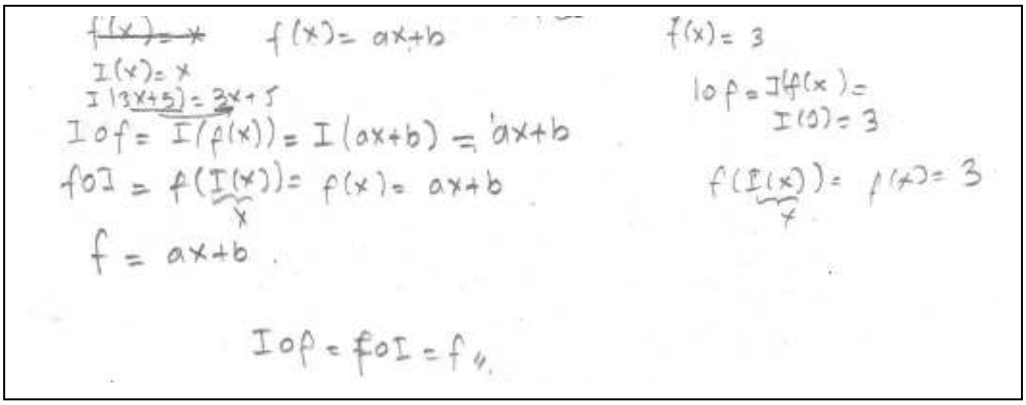
T : I(x) eşittir x, birim fonksiyon sana ne ifade ediyor Hande?

ÖA1D: Yani içerdeki değerin dışarıda aynı olması. Şey değer kümesinin işte görüntü kümesine eşit olması. Yani bütün a'nın tüm değerleri fonksiyonun kendisine eşit. Yani mesela işte f(x), 3x artı 5'di. Bunu 3x artı 5 bileşke yani içerdeki değer sonucu veriyo, birim fonksiyon bu. Sonra bu eşitliği açtım yerine koydum, x'i, f(x)'de burada ax artı b gibi bi fonksiyon olsun.

T : Neden f(x) ax artı b gibi bi fonksiyon olsun diye düşündün?

ÖA1D: Çünkü birbirinden farklı yani, birim olmaması lazım. Yani eğer x böyle gitmezse birim olur. O yüzden ax artı b dedim normal bi fonksiyon olması için.

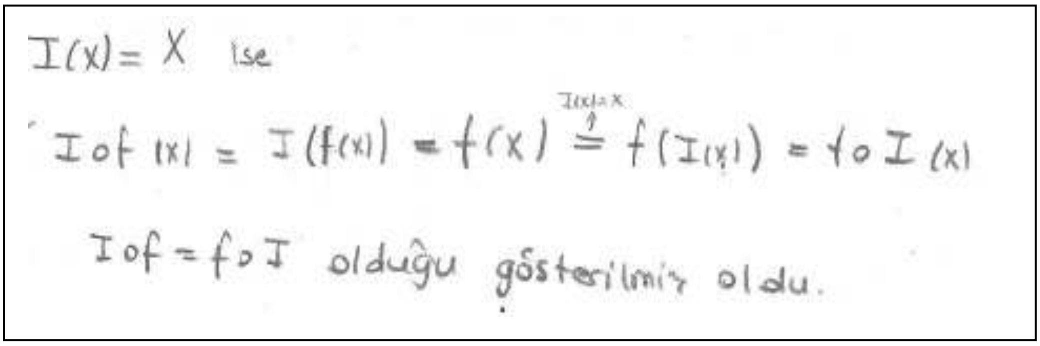
Katılımcıya f fonksiyonunu neden ax+b olarak seçtiği sorulduğunda ise bunun normal bir fonksiyon olduğunu söylemiştir. Katılımcı için normal bir fonksiyon olan ax+b'nin problemde verilen eşitliği sağlaması, eşitliği doğrulamak için yeterli olmuştur. Katılımcı bu süreçte genel formu ax+b olan 3x+5 fonksiyonunu da birim fonksiyonu tanımlamak için kullanmıştır.




Şekil 44. ÖA1D'nin klinik görüşmede altıncı probleme ait çözümü

Şekil 44'de ÖA1D'nin görüşmede altıncı problemde yaptığı çözüm görülmektedir. Katılımcı problemi çözerken f(x) fonksiyonu olarak birinci dereceden ax+b'yi tanımlamış ve bunun ardından da önce I bileşke f'i, daha sonra da f bileşke I'yı bularak her ikisinin sonuçlarının da f'e eşit olduğunu göstermiştir. Katılımcı için seçtiği bu örneğin eşitliği sağlaması yeterli olmuştur.

Görüşmede ÖA1D ile benzer biçimde ÖA3A ve ÖA2D'de ax+b şeklinde bir örnek ile eşitliğin doğruluğunu savunmuşlardır. ÖA3A altıncı problemi çözerken yazılı sınavda analitik şemaları kullanırken görüşmede deneysel şemaları kullanmıştır. Aşağıda ÖA3A'nın yazılı sınavda altıncı probleme ait çözümü görülmektedir.




Şekil 45. ÖA3A’nın yazılı sınavda altıncı probleme ait çözümü

Şekil 45’de katılımcılardan ÖA3A’nın yazılı sınavda analitik şemaları kullandığı altıncı problemin çözümü yer almaktadır. Katılımcı problemi çözerken önce birim fonksiyonu tanımlamış ve ardından da bunu bileşke fonksiyonda kullanarak problemde verilen eşitliğin doğruluğunu göstermiştir. Fakat katılımcı görüşmeler sırasında kendisinin tanımladığı bir f fonksiyonunu kullanarak deneysel şemalardan temel örnekler ile ifadenin doğruluğunu göstermiştir.

ÖA2D ise yazılı sınavda boş bıraktığı altıncı problemi görüşmede deneysel şemalar ile çözmüştür. ÖA2D kodlu katılımcı birim fonksiyonun x’e eşit olduğunu anımsadıktan sonra doğrulamayı aşağıdaki gibi yapmıştır.

ÖA2D: Deniyorum. İlk önce birim fonksiyonu bulursam ondan sonrasını hatırlayacağım. I(x) bu durumda eşit olur. Olduğunda bu sefer şey yapacağız. İspat şeklinde yapalım. Bu tarafta deneyeceğim. x’ler sadeleşir. f(x) eşittir ax artı b. I(x) eşittir x diyelim. x’imiz ax artı b olduğunda ne almış oldu. ax artı b eşittir f(x) oldu yine. Bu x zaten.

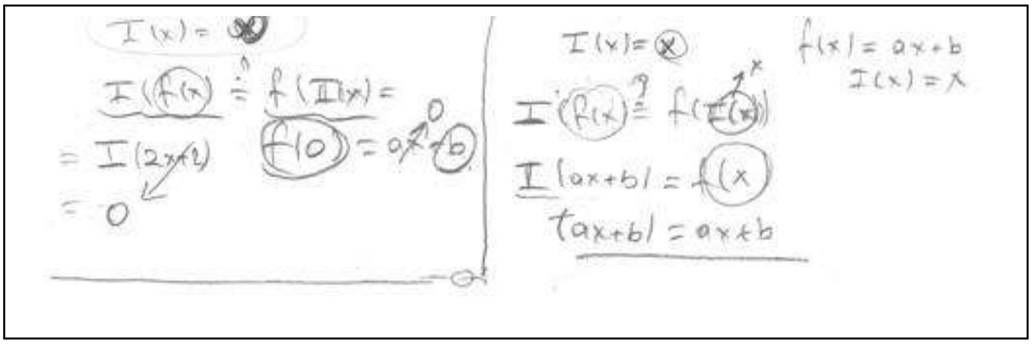
T : I(x) nasıl oradan f(x) oldu?

ÖA2D: I(x)’imiz eşit x’e.

T : Tamam.

ÖA2D: O zaman f(x) oldu. I, ax artı b oldu. x yerine ax artı b yazacağız. ax artı b’nin yerine olacak ax artı b. Eşitlemiş olduk zaten böylece.

Altıncı problemdeki eşitliği doğrulama sürecinde hem ÖA3A ve hem de ÖA2D seçtikleri ax+b şeklindeki bir fonksiyon örneği ile eşitliğin doğruluğunu sağlayarak deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmışlar ve çözümlerini de aşağıdaki gibi yapmışlardır.



Şekil 46. ÖA2D'nin klinik görüşmede altıncı probleme ait çözümü

ÖA3A ve ÖA2D'de altıncı problemi doğrulama sürecinde ÖA1D gibi f(x) fonksiyonu olarak ax+b'yi tanımlamış ve işlemleri yapmışlardır (bkz. Şekil 46.). Bu da katılımcılar için problemde verilen eşitliğin doğruluğunu sağlamak için yeterli olmuştur.

ÖA2D'de yedinci problemi de yazılı sınavda boş bırakırken görüşmelerde deneysel şemaları kullanarak çözümünü yapmıştır. Katılımcı görüşmede yedinci problemi çözerken açıklamasını;

ÖA2D: Dediğim gibi. y'ye diyelim. g(x)= 2x ya da ax artı b, f(x) eşittir ax eksi b. Tersini alırım. Burada f(x) eşittir ax eksi b demiştik. g(x) eşittir ax artı b. Bu da eşitmiş x artı b bölü a olur (mırıldanarak işlem yapıyor). Eksi b bölü a, bunları tek tek yerine yazacağız şimdi. f(g(x)) nedir? f(ax+b), ax artı b neye eşit? ax eksi b'de x yerine ax artı b koyarsak, a çarpı ax artı b eksi b (a(ax+b)-b). Buna eşit olacak. a kare x artı ab eksi b. Bakalım bi, bunu tersini bulacağız birde. Ne oldu? Bunun tersini nasıl buluruz? y eksi ab artı b eşittir a kare x. x'i yalnız bırakcaz. (sessizce işlem yapıyor) tersini aldığımızda, f(g(x)) tersi eşittir x eksi ab artı b bölü a kare oldu. f eksi 1'imiz neydi? x artı b bölü 2. Şu x yazalım.

T : b bölü a.

ÖA2D: x artı b bölü a. Şimdi x imiz neydi? x artı b bölü a yazıyoruz x yerine. x artı b bölü a eksi b bölü a, ne oldu? x artı b eksi ab aradığımız şey buradan çıkıyor. f yerine x yazarsak… Eşit değil.

T : Eşit değil mi?

ÖA2D: Yok eşit değil bu.

T : Neden eşit değil?

ÖA2D: Aaa pardon pardon. Şunları götürdüğümde eşit. Bunlar eşit.

Şeklinde yapmıştır. Katılımcı görüşmede fonksiyonları f(x)=ax-b ve g(x)=ax+b olarak tanımlayarak çözümünü yukarıdaki diyalogdaki gibi yapmıştır. ÖA2A'da yedinci problemi yazılı sınavda boş bırakmış ama klinik görüşmede deneysel şemaları kullandığı çözümünü aşağıdaki gibi yaparak açıklamasını;

ÖA2A: Belki bugün öğrenirim. (sessizlik) Tamam hocam f(x) eşittir ax artı b, g(x) eşittir x artı b olsun. (mırıldanarak işlem yapıyor) Burada f bileşke g eşittir ax artı ab artı b oluyo. (mırıldanıyor) Bunun tersi, f bileşke g'nin terside x eksi ab eksi b bölü a'ya eşittir. Bu f eksim bu da g eksim. O zaman g'nin tersi işlem f'in tersi de x eksi b eksi ab bölü a. Tamam.

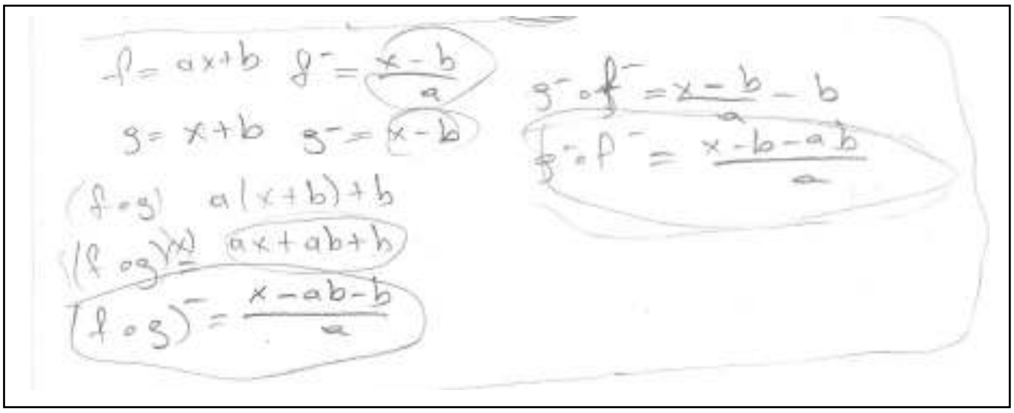
T : Tamam olan ne?

ÖA2A: Tamam buradan çıkıyor. Önce f bileşke g'yi bulup tersini aldım. Sonra da f'in tersi ne, x eksi b bölü a. g'nin tersi ne x eksi b. Burada bileşkeyi alırken x yerine şunu alıcam, x eksi b bölü a eksi b. g'nin tersi bileşke f'nin tersi de buradan eşittir diyeceğim ama sizde diyeceksiniz ki bunlar nereden çıktı. Yani bunu burada gördüğüm için eşit midir değil midiri araştırdığımda yoksa bunlar eşit midir?

T : $(fog)^{-1} = g^{-1}$ o $f^{-1}$ olduğunu göstereceksin.

ÖA2A: Ha. Eşit işte.

Şeklinde yapmıştır. Bu süreçte çözümünü f(x) yerine ax+b ve g(x) yerine de x+b'yi kullanarak yapmıştır. ÖA2A ve ÖA2D yedinci problemde verilen ifadeyi doğrulama sürecinde seçtikleri benzer fonksiyonları kullanmışlardır. Her iki katılımcı içinde seçtikleri örnek fonksiyonlar yardımı ile ifadenin doğruluğunu göstermek yeterli olmuştur. Bu da gösteriyor ki her iki katılımcı da deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmışlardır. Bu katılımcılardan ÖA2A'nın çözümü aşağıda yer almaktadır.




Şekil 47. ÖA2A'nın klinik görüşmede yedinci probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA2A yedinci problemi çözerken seçtiği birinci dereceden fonksiyonlar yardımıyla problemdeki ifadeyi doğrulamıştır (bkz. Şekil 47). Bu süreçte önce birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin genel gösterimini f ve g fonksiyonları olarak belirlemiş, bunun ardından da problemde istenen $(fog)^{-1}$ ile $g^{-1}of^{-1}$'in eşitliğini göstermiştir.

ÖA2A ikinci sınıfa devam etmekte olan bir katılımcıdır. Bunun yanı sıra katılımcı yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanan katılımcılardandır. Fakat klinik görüşmede sekizinci problemi çözerken deneysel kanıt şemaları kullanırken yazılı sınavda boş bırakmıştır. Klinik görüşmede açıklamasını aşağıdaki gibi yapmıştır.

ÖA2A: Logaritma çok sevdiğim bir konudur. Bunu biliyorum.

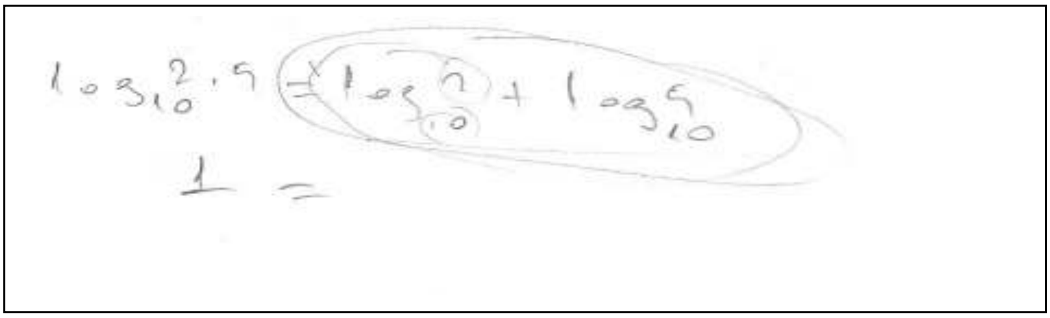
T : Bunu nereden biliyorsun?

ÖA2A: Bunu lisede çok çalışmıştım. Görmüştük de çalışmadığım için bakmıyordum. Her zaman logaritma sorusu çıkardı. Çalışmaya başlamıştım oradan işte.

T : Bunun nasıl olduğunu gösterebilir misin?

ÖA2A: Bunu gösterebilir miyim? (sessizlik) Olduğunu gösterebilir miyim? Sayı verirsin, değer verirsin.
T : Nasıl sayı verirsin Ömer?
ÖA2A: a'ya ,b'ye değer verirsin.
T : Gösterebilir misin? Onu yapabilir misin?
ÖA2A: (mırıldanarak işlem yapıyor)
T : Yani burada x'e 10 dedin, a'ya 2, b'ye de 5 verdin.
ÖA2A: (işleme devam ediyor) Hocam burada bire eşit olmaz.
T : Neye eşit olmaz?
ÖA2A: Bire.
T : Neden eşit olmaz? Ne düşündün?
ÖA2A: Yani kafamdaki değerleri direk koyduğum için bu her zaman 1'e eşit olmaz. Başka da bişey söyliyemiycem

ÖA2A görüşme sırasında problemi okuduktan sonra logaritma konusunun çok sevdiği bir konu olduğunu dile getirmiş fakat sekizinci problemi yanlış çözmüştür. Bu çalışmada önemli olan problemin doğru veya yanlış çözülmesi olmadığı için katılımcının düşünceleri göz önünde bulundurularak ve çözümü incelenerek bir şemaya dahil edilmiştir. Katılımcı sekizinci problemi çözerken ifadedeki bilinmeyenlerin yerine sayılar yazarak çözmeyi tercih etmiştir. Bunun içinde x yeine 10, a yerine 2 ve b yerine de 5 vererek problemi çözmüş ve logaritma 10 tabanında 2 çarpı 5'i 1'e eşitlerken diğer taraf 1'e eşit olmadığı için ifadenin her zaman eşit olmayacağını söylemiştir. Belki katılımcı logaritmik olarak değerini bildiği veya bulabileceği değerler seçseydi eşitliğin doğru olduğunu dile getirebilirdi. Katılımcı örneklerden yola çıkarak deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmıştır. Bu süreçte yapmaya çalıştığı çözüm aşağıda yer almaktadır.




Şekil 48. ÖA2A'nın klinik görüşmedeki sekizinci probleme ait çözümü

ÖA2A sekizinci problemi çözmeye başlamış fakat sonuçlandıramamıştır (bkz. Şekil 48.). Katılımcı çözüme başladığında problemdeki ifadede yer alan değişkenler yerine (x, a, b) sayısal değerler vermiştir. Seçtiği bu değerler ise eşitliğin sol tarafında 1'e eşit iken sağ taraftaki değerlerin neye eşit olduğunu bilmediği için sonuçlandıramamıştır. Fakat bu süreçte problemdeki eşitliği seçtiği değerler ile sonuçlandırmaya çalışarak deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmıştır.

ÖA3B üçüncü sınıfa devam etmekte olan bir katılımcıdır. Katılımcı yazılı sınavda ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanmıştır. ÖA3B sekizinci problemi yazılı sınavda çözememiş fakat görüşmede önce matematiksel ifade ve terimleri kullanarak aşağıdaki gibi çözmeyi denemiştir.

ÖA3B: Tamam logaritma x tabanında a çarpı b, logaritma x tabanında a artı logaritma x tabanında b olduğunu gösteriniz? Logaritma x, a eşittir c ise c üzeri x a'dır... (işlem yapıyor) Logaritmanın tanımı bu. Mesela logaritma x, a eşit değilse b üzeri x eşit a'dır. Şimdi buradan böyle gideceğim herhalde. Şimdi ben logaritma x, a'ya c diyeyim. x, b'ye d diyeyim. O zaman c üzeri x eşittir a, d üzeri x b. Şurada ne var logaritma x, a çarpı b. Şuna ne demiştim c, buna ne demiştim d. c artı d yani c artı d üzeri x, a çarpı b'ye eşit olmalı. (işlem yapıyor ) Hocam ben bunu yapamamıştım değil mi orada (yazılı sınav)?.

T : Evet. Ama şimdi bir şeyler yazdın. Önce ne yazdın?

ÖA3B: Logaritmanın tanımını yazdım önce. c artı b üzeri x eşit a çarpı b olacak. Yani c artı d üzeri x, c üzeri x çarpı d üzeri x olmalı. Niye olmalı ki? (sessizlik, düşünüyor) Logaritma x, a çarpı d, c artı b. (işlem yapıyor) tamam burası da c artı b (sessizlik ) Şurada yanlışlık var ..... Evet, doğru. b üzeri x a'ya eşit, burası doğru. c üzeri x a, d üzeri x b. Şimdi logaritma x, a yerine c üzeri x, b yerine d üzeri x diyim. (mırıldanarak işlemler yapıyor,sessizlik). Hayır.

T : Sonuçlandıramadın mı?

ÖA3B: Hayır. (sessizlik)

T : Logaritmik fonksiyonları gördünüz mü üniversitede?

ÖA3B: Logaritmik fonksiyonları, genel matematikte gördük galiba. Ama ispatı görmedik direkt tanım. Ama yapılması lazım buradan hocam (uzun bir sessizlik, mırıldanarak işlem yapıyor, sessizlik). Çıkmadı, şurdan sonrasını götüremiyorum. Şuraya kadar tamam. (sessizlik) Logaritma x tabanında a çarpı b logaritma x tabanında a artı logaritma x tabanında b'ye eşit... (mırıldanarak işlemlerini kontrol ediyor) Ordan da bişey gelmiyo ki. Hocam kaldım burada.

T : Geçelim mi?

ÖA3B matematiksel terim ve ifadeler ile problemi sonuçlandıramayınca görüşmeci isterse diğer probleme geçebileceğini ifade etmesine rağmen çözmek istemiştir. Bu süreçte logaritmik fonksiyonları üniversitede sadece genel matematik dersinde gördüklerini dile getirmiştir.

ÖA3B: Bilmiyorum geçelim mi? (sessizlik) Logaritma 2 tabanında, şöyle diyim logaritma 2 tabanında 2 artı logaritma 2 tabanında 2, logaritma 2 tabanında 2 çarpı 2'ye eşit olacaktır. Şurası 1 burası 1, şurası 2 tabanında 4. burası logaritma 2 tabanında 2 üzeri 2, burası 2 yani sonuç 2 çıktı. 2 eşit 2 çıktı, değer verdiğim zaman sağladı yani.

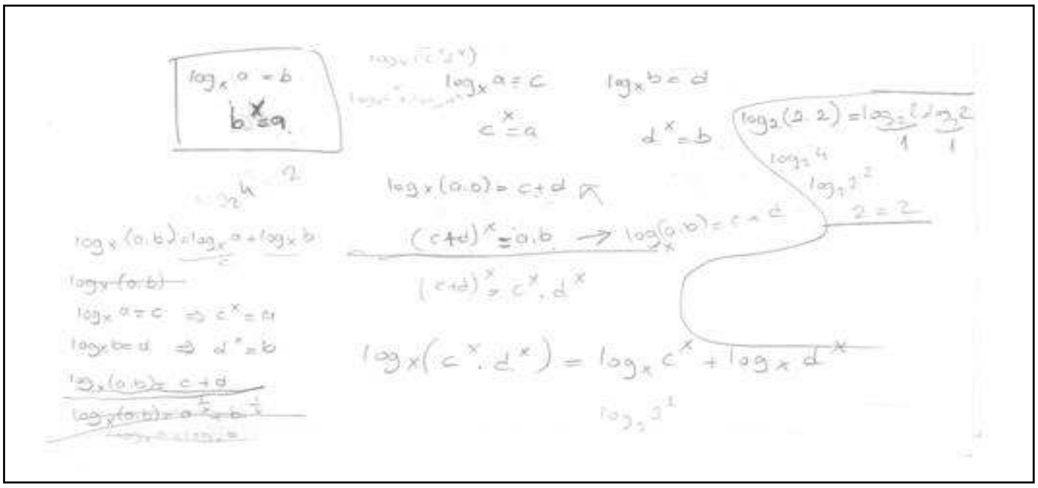
T : Hıhı.

ÖA3B: Değer verdiğim zaman sağlanıyor. Başka da değer veriyim mi?

T : Nasıl istersen?

ÖA3B: Böyle değer verdiğim zaman eşitlik doğru ama ispatlama aşamasında belirli bir yerden sonra kalıyor.

Daha sonra katılımcı ÖA2A gibi problem ifadesinde verilen x yerine 4, a yerine 2 ve b yerine de 2 yazarak problemi çözmüştür. Eşitliğin her iki tarafı da 2'ye eşit çıkınca problemde verilen ifadenin eşit olduğunu dile getirmiştir. Bu da deneysel kanıt şemalarından temel örnekleri kullandığını göstermektedir. Katılımcının görüşmeler sırasında sekizinci problemi nasıl çözdüğü ise aşağıda görülmektedir.



Şekil 49. ÖA3B'nin klinik görüşmede sekizinci probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA3B klinik görüşmede önce problemi matematiksel olarak logaritmanın tanımını kullanarak çözmeyi denemiştir (bkz. Şekil 49.). Fakat bu yolla bir sonuca ulaşamayınca problemde yer alan x, a ve b değişkenlerine yerine sayısal değerler vermiştir. Katılımcı bütün değişkenlerin yerine 2 verdiğinde 2=2 sonucunu elde ederek ifadenin eşit olduğunu yani doğru olduğunu belirtmiştir.

Görüşmede dokuzuncu problemde deneysel kanıt şemaları kullanan katılımcılardan birisi de üçüncü sınıfa devam etmekte olan ÖA3B'dir. Katılımcı dokuzuncu problemde verilen eşitliğin doğruluğunu göstermek için venn şeması ile ifade ettiği kümelerle fonksiyon tanımlamıştır. Bunu yaparken de aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir.

ÖA3B: Bire bir örten bir fonksiyon olduğuna göre f üzeri eksi 1, eksi 1, eşit olduğunu gösteriniz? Gösterelim A'dan B'ye hemen yapayım. Bire bir 2, 3 örten 4, 5, 6 örten f fonksiyonu. f'in tersi. zaten bir şeyin tersinin tersi kendisidir diye bildiğimiz için.

T : Nereden biliyoruz bir şeyin tersinin tersinin kendisi olduğunu?

ÖA3B: Her zaman öyleymiş hocam. Bir şeyin tersinin tersi kendisiymiş.

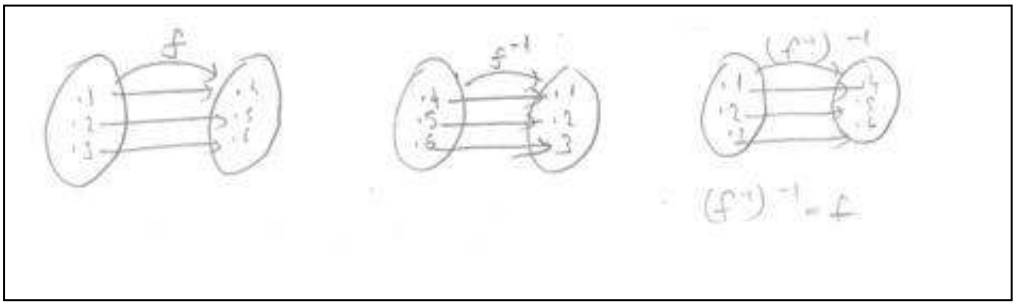
T : Neden her zaman öyleymiş?

ÖA3B: Bilmiyorum hocalarımız öyle diyorlar. Şimdi f fonksiyonun tersi görüntü kümesi değer kümesi, değer kümesi görüntü kümesi. 1 4'e gitmiştir, karşısında 4 1'e gidecek, 5 2'ye gidecek karşısında, karşısında 6 3'e gidecek. Şimdi bunun tekrar tersini alırsak tekrar görüntü kümelerinin yerlerini değiştirmiş olacağım yani 1, 2, 3, 4, 5, 6. 1'i 4'e 2'yi 5'e, 3'ü 6'ya, sonuçta f fonksiyonunu elde ediyoruz.

T : Hıhı, örnekler ile göstermek senin için yeterli mi?

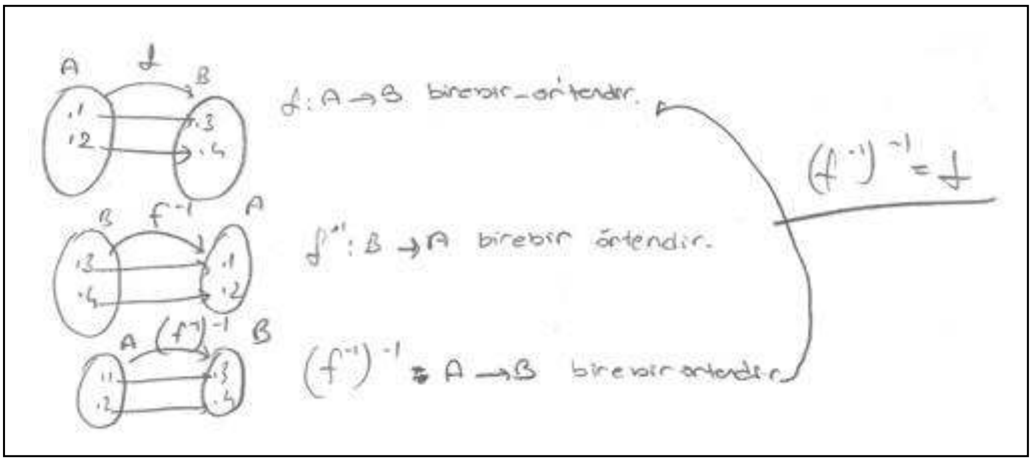
ÖA3B: Evet yeterli.

ÖA3B görüşmede dokuzuncu problemi doğrularken venn şeması ile gösterdiği kümeler ile bir f fonksiyonu tanımlamıştır. Fakat katılımcı ilk başta “Bir fonksiyonun tersinin tersi kendisine eşittir, hocalarımız öyle diyor.” şeklinde bir ifade kullanarak dışsal şemalardan otoriteyi kullanmış gibi görünsede sonradan örnekle göstermenin yeterli olduğunu dile getirerek deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmış ve aşağıdaki gibi çözmüştür.




Şekil 50. ÖA3B’nin klinik görüşmede dokuzuncu probleme ait çözümü

ÖA3B dokuzuncu problemde seçmiş olduğu bir fonksiyonu venn şeması ile göstererek eşitliği doğrulamıştır (bkz. Şekil 50.). Burada katılımcı için bir örneğin eşitliği sağlaması yeterli olmuştur. Katılımcı dokuzuncu problemi yazılı sınavda da deneysel şemaları kullanarak çözmüştür. Katılımcının çözümü ise aşağıda yer almaktadır.




Şekil 51. ÖA3B’nin yazılı sınavda dokuzuncu probleme ait çözümü

ÖA3B yazılı sınavda dokuzuncu problemi çözerken deneysel şemaları kullanmıştır (bkz. Şekil 51.). Katılımcı bu süreçte görüşmede olduğu gibi venn şeması olarak seçtiği kümeler yardımıyla problemde verilen eşitliğin doğruluğunu savunmuştur.

ÖA2B ikinci sınıfa devam etmekte olan bir öğretmen adayıdır. Katılımcı yazılı sınavda ağırlıklı olarak deneysel kanıt şemalarını kullanmıştır. ÖA2B'nin görüşmeye ilk geldiğinde son derece heyecanlı olduğu gözlenmiştir. Fakat görüşme ilerledikçe bu heyecanını yenmeyi başarmıştır. Katılımcı görüşmede dokuzuncu problemi okuduktan sonra çözmeye başlamış fakat önce seçtiği yolla sonuçlandıramayınca farklı bir yoldan çözmeye başlamıştır. Bu ikinci çözümde ise açıklamasını;

ÖA2B: Şimdi bunun mesela tersine alacağım, şu B tarafının, yani onu nasıl yazacağımı ifade edemiyorum şimdi. Bunun B'nin eksi 1. Birebir ve örtenliği kullanmıyoruz orda kullanmamız lazım aslında.

T : Onu nasıl kullanacaksın? Problemde, burada sence niye birebir ve örten olduğu verilmiş?

ÖA2B: Birebir işte…Görüntü kümesi…

T : Görüntü kümesi

ÖA2B: Hıhı görüntü kümesi onlar birebir eşleniyor ve açıkta eleman kalmıyor ikisinde de. Birebir ve örten… (sessizlik) Şöyle bir şey vardı. $f(a_1)=f(a_2)$ gibi bişey, bu birebir şeyi idi. (işlem yapıyor) Buradan $a_1=a_2$ oluyodu. f(x) eşittir x'e. f eksi 1 x eşittir x. f eksi 1 x'in eksi 1'i eşittir x. Böyle bir şey oluyor ama ne kadar mantıklı. Böyle bir şey yaptım

T : Neden şimdi başka bir çözüm yaptın?

ÖA2B: Dedim şimdi bu f'i şurada yazdım ya f(A)=B'yi

T : Hıhı

ÖA2B: Buradan işte bunu bu kümeyi gösterir gibi girdim. Hani kümeyle elemanları böyle olmadığını düşündüm ama.

T : Bu çözümün oldu mu?

ÖA2B: O oluyor yani

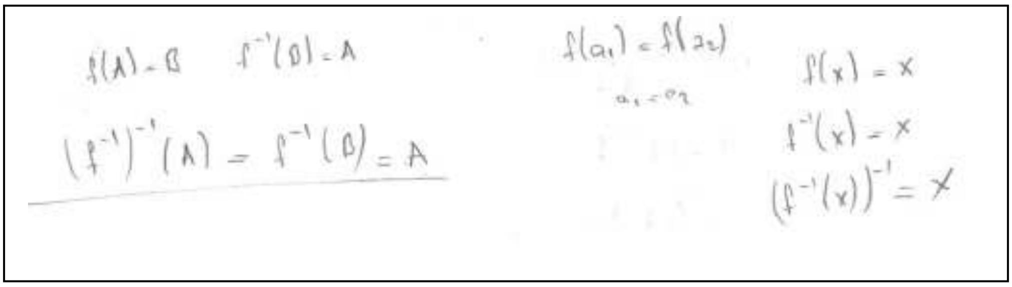
T : Bu neden oluyor?

ÖA2B: Oda işte ilk tanım kümesindekilerin bir görüntüsü var. Burada işte f fonksiyonu bunun tersi, yani görüntü kümesindekiler tanım kümesine taşıyor.

T : Hıhı

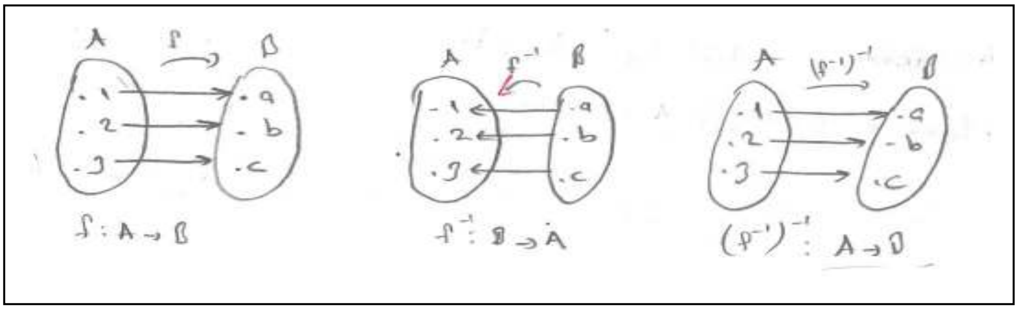
ÖA2B: Böyle onun bir daha tersi yani tekrar tanımdakiler görüntüye taşıyor. O zaman hani birebir olduğu için de sorun olmuyor yani. Olmasa birebir fonksiyon o zaman mesele birebir örten, yok birebir olmasa mesela o zaman açıkta eleman kalır, o zaman y tarafına buradan oraya fonksiyon bağlanmaz. Fonksiyon tanımından dolayı olmaz. Bunun için böyle.

Şeklinde yapmıştır. Katılımcı çözümü yaparken f(x) fonksiyonunu x olarak almış ve daha sonra tanımladığı bu fonksiyonun tersini ve sonra da tekrar tersini almıştır. Katılımcı bu yolla dokuzuncu problemde verilen ifadenin eşitliğini doğrulamıştır. Bunu yaparken ÖA2B seçtiği bir örneği kullanarak deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmıştır. ÖA2B'nin çözümü aşağıda görülmektedir.



Şekil 52. ÖA2B'nin klinik görüşmede dokuzuncu probleme ait çözümü

ÖA2B Şekil 52'de de görüldüğü üzere dokuzuncu problemi çözerken birim fonksiyonu kullanmıştır. Seçtiği birim fonksiyon ile de eşitliğin doğruluğunu göstermiştir. Katılımcı yazılı sınavda da dokuzuncu problemi çözerken deneysel şemaları kullanmıştır. Katılımcının çözümü ise aşağıda yer almaktadır.



Şekil 53. ÖA2B'nin yazılı sınavda dokuzuncu probleme ait çözümü

ÖA2B görüşmeler sırasında dokuzuncu problemi seçtiği bir f fonksiyonu ile doğrularken yazılı sınavda venn şemaları yardımıyla tanımladığı fonksiyonlar ile göstermiştir (bkz. Şekil 53.). Katılımcı hem yazılı sınavda ve hem de görüşmelerde deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmıştır.

ÖA1B birinci sınıfa devam etmekte olan bir katılımcıdır. Görüşmede ÖA1B'de ÖA2B gibi dokuzuncu problemi doğrulama sürecinde seçtiği bir fonksiyonu kullanmış ve açıklamasını;

> "f A'dan B'ye birebir örten fonksiyon olduğuna göre f(x) üzeri tersi eşittir f olduğunu gösteriniz diyor. Yine ben burada örnek vermiş olsam olur mu acaba? (düşünüyor). Birebir ve örten. Şu A olsa f fonksiyonuna, bu 1, 2, 3 olsa, şu da B olsa a, b, c. Şu şekilde bir ifade hem birebirdir hem de örtendir. Yani bu f fonksiyonudur ayrıca. (işlem yapıyor) Şuna f(x) diyelim. f(x) olsun şu, x kare artı 1 olsun. (f(x)=$x^2$+1). 1 verdiğim zaman 2 olacak. Şura 2 olsun. 2 verdiğim zaman 5 olacak. Şurası 5 olsun. 3 verdiğim zaman 10 olacak. Şurası da 10 olsun. Şimdi ben bu fonksiyonun tersini alacağım. Bu fonksiyonun tersini alıcam. Şöyle desem (mırıldanarak işlem yapıyor) şöyle yapalım (x-1)'in karekökü bunun tersi olacak. Yani o

zaman şöyle mi olacak? Burada verdiğim 2 değeri için burası 1, burada verdiğim 10 değeri için burası 3,burada verdiğim 5 değeri için burası 2 yani sağlamış olacak. Sonra da f eksi 1'inde tersini alırsak buda x kare artı 1 çıkacak. Yani tekrardan A'dan B'ye f fonksiyonu gerçekleşmiş olacak. O yüzden de bu ifade buna eşittir."

Şeklinde yapmıştır. Katılımcı görüşmede f(x) fonksiyonunu $x^2+1$ olarak seçmiştir. Bunun ardından da önce f(x)'in tersini almıştır. Daha sonra ise çıkan sonucun tekrar tersini almıştır. Bulduğu ifade f(x) ile aynı olunca da ifadenin birbirine eşit olduğunu dile getirmiştir. Bu da ÖA1B'nin deneysel şemalardan temel örnekleri kullandığına dair bir delil oluşturmaktadır. Görüşmenin devamında katılımcıya neden örnekle göstermeyi tercih ettiği sorulduğunda ise açıklamasını;

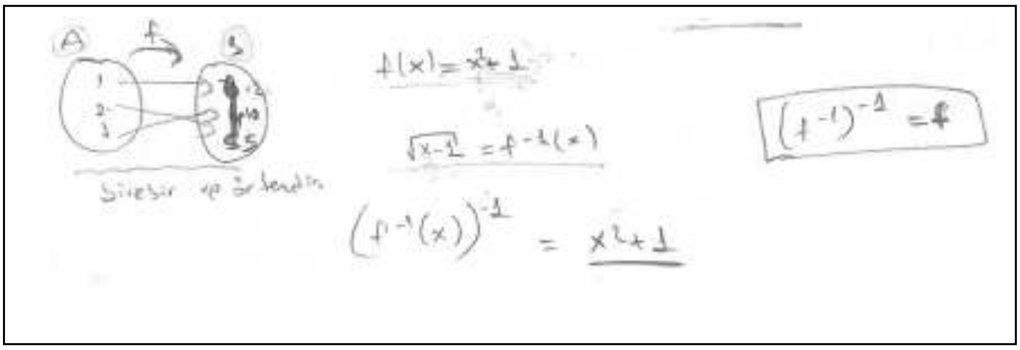
T : Neden örnekle göstermeyi tercih ediyorsun?

ÖA1B: Genelleme yapınca aklım karışıyor, o yüzden örnek verince daha somut oluyor. Daha somut bir şeyle göstermiş oluyorum gibi geliyor o yüzden örnek vermeyi tercih ediyorum.

T : Bu da senin için yeterli oluyor mu?

ÖA1B: Yani, aslında yeterli olmaz, çünkü bir örnek için sağlıyorsa diğer örnek içinde…(düşünüyor) Sağlar, neden? Çünkü ben f(x) fonksiyonunu A'dan B'ye $f(x)=x^2+1$ fonksiyonu için aldım, başka bir fonksiyon almış olsam A kümem olsa bu sefer B kümesi değişik bir küme olacaktır. O fonksiyonun da tersinin tersini aldığım zaman yine f fonksiyonu çıkacaktır. Yani burada değişen değer kümem, A ile B kümem olur farklı bir fonksiyonda. Yine aynı şey çıkar. Farklı örnekleri alsam da.

Biçminde dile getirmiştir. Katılımcı örnek kullanmanın daha somut olduğunu ifade etmiştir. Bunun yeterli olup olmadığı sorulduğunda ise önce yeterli olmayacağını dile getirmiştir. Fakat biraz düşününce farklı bir fonksiyonda da aynı olacağını ve sadece tanım ve değer kümelerinin değişeceğini ifade etmiştir. Katılımcının çözümüne aşağıda yer verilmiştir.



Şekil 54. ÖA1B'nin klinik görüşmede dokuzuncu probleme ait çözümü

Şekil 54'de de görüldüğü üzere ÖA1B görüşmede dokuzuncu problemi çözerken ikinci dereceden bir fonksiyon tanımlamış ve daha sonra bunun tersini almıştır. Bunun ardından da bulduğu ifadenin tekrar tersini alarak yine f fonksiyonunu elde edince sorulan ifadenin eşit olduğunu ortaya koymuştur. Katılımcı yazılı sınavda da dokuzuncu problemi doğrularken f(x) fonksiyonunu x+1 olarak tanımlayarak sonuçlandırarak deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmıştır.

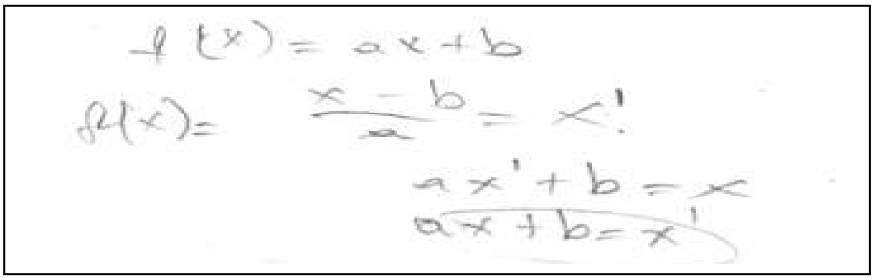
Katılımcılardan ikinci sınıfa devam etmekte olan ÖA2A ve birinci sınıfa devam etmekte olan ÖA1D görüşmelerde dokuzuncu problemi çözerken aynı fonksiyonları tanımlayarak eşitliğin doğruluğunu göstermişlerdir. Bunlardan ÖA2A açıklamasını;

> "Birebir ve örten bir fonksiyon olduğuna göre olduğunu gösteriniz? Hocam daha iyi yapanlar yok mu? Niye onları çağırmıyorsunuz? Birebir ve örten bir fonksiyon olduğuna göre $(f^{-1})^{-1}$=f olduğunu gösteriniz? f=ax+b olsun. Bunun tersi (x-b)/a dır. Tersinin tersi eşittir x derim. x üssü herhangi bir şey olsun. ax'+b=x derim. Buradan da ax+b=x' olur. Bu da f fonksiyonu zaten. "

Şeklinde yaparken ÖA1D'de;

> "f, A'dan B'ye birebir ve örten olduğuna göre olduğunu gösteriniz. Şimdi yine f(x) de herhangi bir fonksiyon olduğunu gösterelim. ax artı b olsun yine. ax artı b olsun. Bunun tersini alalım x eksi b bölü a evet. Şimdi bu f'in tersi x, bunun tersini aldık. Bunun tersi nası alınıyo? Bunun tersi de hemen gösteriyim. Aslında aynısı da hemen yazmamak için. x eksi b bölü a, x eşittir y eksi b bölü a, x çarpı a eşittir y eksi b, x çarpı a artı b eşittir y. O zaman x çarpı a artı b'ye eşittir. Şu ifade ile bu ifade birbirlerine eşittir, f'in tersinin tersi eşittir f."

Biçiminde yapmıştır. Dokuzuncu problemi çözerken hem ÖA2A ve hem de ÖA1D f(x) fonksiyonunu ax+b olarak tanımlamışlardır. Bunun ardından da önce f(x)'in tersini almışlar ve sonra çıkan değerin tekrar tersini almışlardır. Bu işlemlerin sonucunda da yine ax+b değerine ulaşınca verilen ifadenin doğru olduğunu söyleyerek deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmışlardır. Aşağıda ise ÖA2A'nın çözümü yer almaktadır.




Şekil 55. ÖA2A'nın klinik görüşmede dokuzuncu probleme ait çözümü

Şekil 55'de de görüldüğü üzere ÖA2A dokuzuncu problemi doğrularken seçtiği bir f fonksiyonunun önce tersini ve daha sonra da elde ettiği ifadenin tekrar tersini alarak problemdeki ifadeyi doğrulamıştır. ÖA1D ile ÖA2A yazılı sınavda da f(x) fonksiyonunu ax+b olarak tanımlayarak problemi çözmüş ve böylece de deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmışlardır.

Katılımcılardan ÖA2C ikinci sınıfa devam etmekte olan bir diğer katılımcıdır. Katılımcı yazılı sınavda dışsal şemaları kullandığı dokuzuncu problemi görüşmede deneysel şemalar ile çözmüştür. Katılımcının yazılı sınavdaki çözümü aşağıda yer almaktadır.

$$y=f(x) \rightarrow f^{-1}(y)=x=f^{-1} \rightarrow \left(f^{-1}(y)\right)^{-1}=f(x)$$
$$\left(f^{-1}\right)^{-1}=\left(f^{-1}(y)\right)^{-1}=f(x)$$

Şekil 56. ÖA2C'nin yazılı sınavda dokuzuncu probleme ait çözümü

ÖA2C yazılı sınavda dokuzuncu problemi çözerken bir fonksiyonun tersini alma kuralı ile çözmeye çalışmıştır (bkz. Şekil 56.). Bunu yaparken fonksiyonun tersini ilk alışında doğru yapmış fakat tekrar tersini almakta güçlük çekmiştir. ÖA2C görüşmeler sırasında dokuzuncu problemdeki eşitliği savunurken ise önce bir yoldan aşağıdaki biçimde açıklamayı denemiştir.

ÖA2C: f'in tersinin tersi f olduğunu gösteriniz? (sessizlik) Ne yaptığımı hatırlamıyorum. Ama şu an benim aklıma yine bileşke f'den dolayı sanırım bir daha yine bileşke f'in tersinikoyarsak, şu tarafa f'in tersini koyarsak burası birim fonksiyon oldu. Bu tersinin tersi olduğu için, ama olduğunu gösterin diyo burada. Haaa birim fonksiyon olduğuna göre bu tersi, bu da demek f'e eşittir (sessizlik).
T : f'in tersinin tersiyle f'in tersi birim fonksiyon yapar dedin. O zaman f'in tersiyle f'de bileşkeye girdiğinde birim fonksiyon olmalı.
ÖA2C: f'in tersinin tersi f'e eşit olmalı.

Katılımcı ilk çözüm yolunda bir fonksiyon ile tersinin bileşkesinin birim fonksiyon olduğundan yola çıkarak çözmeye çalışmıştır. Fakat bu açıklamadan kendisi de çok fazla ikna olmamıştır. Bunun üstüne başka nasıl çözebileceği sorulduğunda;

T : Başka nasıl çözersin?
ÖA2C: Başka deneyebilirim ama hepsinin doğruluğunu gösteremem.
T : Deneyerek derken?
ÖA2C: Fonksiyon yazarım.
T : f'in yerine mi fonksiyon koyarsın?
ÖA2C: Evet fonksiyon yazarım. x artı 1, ya da x artı 5 gibi. Tersini alırım sonra tekrar tersini alırım. Yine f'e eşit çıkar ama her şeyde doğru olmaz. Başka da bir şey gelmiyor aklıma.

Açıklamasını yapmıştır. Katılımcı burada farklı farklı fonksiyonlar seçerek verilen ifadenin doğruluğunu göstermeye çalışmıştır. Bunu da "deneyerek yapma" olarak nitelendirmiştir. Bu deneme yolunu kullanarak katılımcı deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmıştır.

Farklı sınıf seviyelerinden klinik görüşmeye katılan öğretmen adaylarından ÖA3D 3. sınıfa devam etmektedir. Katılımcı yazılı sınavda bütün şemaları eşit olarak kullanan öğretmen adaylarındandır. ÖA3D dördüncü problemi kanıtlarken hem yazılı sınavda ve hem de klinik görüşmede deneysel şemaları kullanmıştır ve görüşmede aşağıdaki diyalog geçmiştir.

ÖA3D: Nasıl yapmıştım? Değerleri yerine koymuştum. $x_1$ ve $x_2$ değerleri için sağlama yöntemiydi. Hani denklemin kökü sağlaması gerekiyo mantığından yapmıştım.

T : Nasıl yapmıştın?

ÖA3D: Değerleri yerine koymuştum, köklerin denklemi sağlaması gerekiyo ya. Yine yapayım. (verilmiş olan denklemim kök formülünü yazdı, işlemi yapmaya başladı, sessizlik) Sanki daha kolay çözmüştüm, böyle yapmamış mıydım acaba? (Sesli olarak işlemleri yapıyor) Daha basit bir şeyler çıktı gibi hatırlamıştım ben. Böyle yapmamıştım. Böyle şeyler yaptığımı hiç hatırlamıyorum ben, böyle yaparken.

T : Başka bir kağıt vermemi ister misin?

ÖA3D: Olabilir de işlemler böyle çıkıcak mı acaba. $4b^2$ $4b^2$ çıkıyor. (İşleme devam ediyor) Yoo birinde sadece 4b birinde sadece 4ab ama bunu nasıl yapmış olabilirim. Sonuca ulaşamadım böyle.

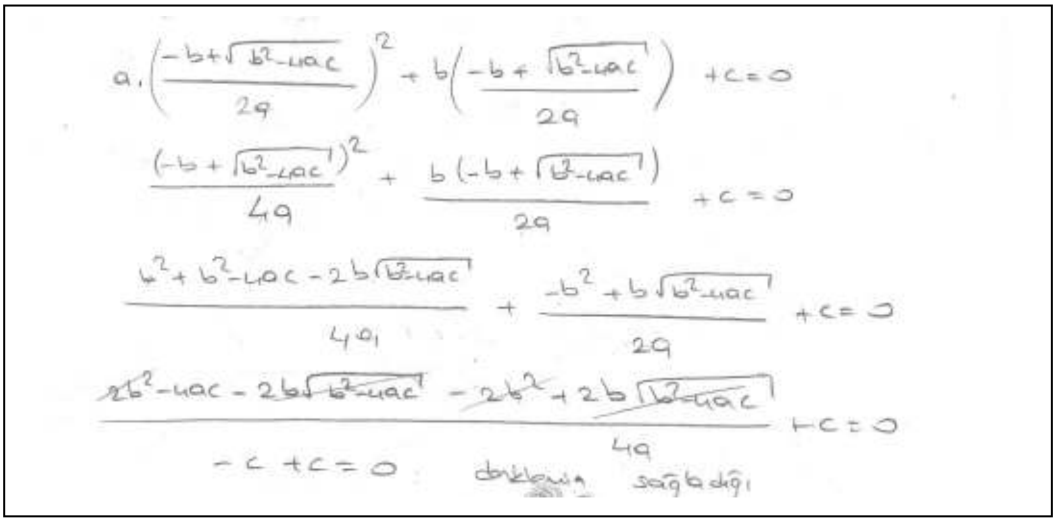
T : Yani hata mı yaptın önceden?

ÖA3D: Payda eşitlerken bir hata yapmış olabilirim. diskriminant da falan mı yaptım acaba. Delta eşittir $b^2$-4ac. Delta. Şurda a çarpı var burada 2a var. 2a yı yanlış mı koymuşum. Tamamen sadeleşmez doğru değil mi? Şimdi işlem hatası yapıyorum. O zaman 4b, 4a mı olacak. Eskiden yaptığı bi işlemi insan şimdi niye yapamıyo. Yani işlem hatası durumu değiştirir, bilmenin bi önemi yok.

T : Burada şu anda yazılı sınavda yaptığın şekilde yapman gerekmiyor.

ÖA3D: (İşlem hatasını düzeltip mırıldanarak işlemlerini yapıyor) O zaman daha basit çıkıyor. $-2b^2$, buradan eksi c geliyor eksi c artı c eşittir 0 yerine konunca denklemin kökü denklemi sağladığı için yine. Diğer kökü içinde aynı şeyi yapabiliriz. O zaman 0'ı vermesi gerekiyor. Denklemi sağladığı için denklemin köküdür.

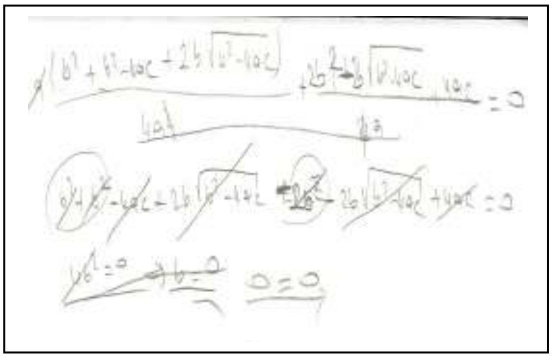
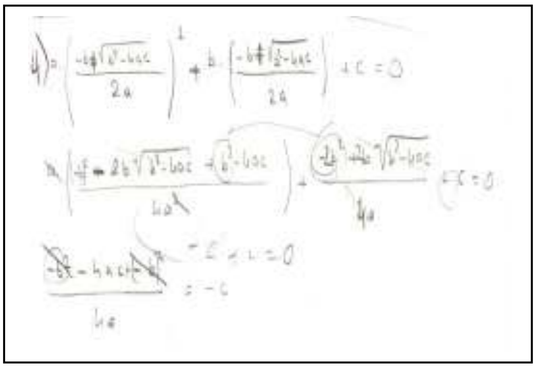
Katılımcılardan ÖA3D dördüncü problemde yer alan denklemde verilen kökleri yerine yazarak ifadenin doğruluğunu gösterme yolunu seçmiştir. Çünkü katılımcıya göre eğer kökler denklemi sağlıyorsa denklemin köküdür. Katılımcının klinik görüşmede yaptığı çözüm aşağıda yer almaktadır.




Şekil 57. ÖA3D'nin klinik görüşmede dördüncü probleme ait çözümü

ÖA3D dördüncü problemi çözerken denklemde kökleri yerine yazmıştır (bkz. Şekil 57.). Bunun sonucunda da sıfır bulunca "denklemin sağladığı" şeklinde bir açıklama ile denklemin köklerinin problemde verilen ifadeler olduğunu ortaya koymuştur.

ÖA3A ve ÖA4A'da klinik görüşmede ÖA3D ile benzer biçimde verilen köklerin denklemin kökleri olduğunu göstererek deneysel şemaları kullanmışlardır. Bu katılımcılardan ÖA3A yazılı sınavda da deneysel şemaları kullanmış fakat ÖA4A problemi çözememiştir. Klinik görüşmede problemi çözerken ÖA3A; "Şu değeri denklemde yerine koyarsam eğer yine sıfıra eşit oluyorsa bunu sağlıyordur demek. Kökün zaten denklemi sağlaması lazım. O zaman x yerine bunu yazarsam denklemi elde etmiş olurum ama." diyerek denklemde kökleri yerine yazmış ve ifadenin sıfıra eşit olduğunu görünce de köklerin denklemi sağladığını ifade etmiştir. Bunu ÖA4A ise "Burada bu kökleri denklemde yerine koyduğum zaman, bu ikisi de sağlıyosa göstermiş olurum dedim." diyerek ÖA3A ve ÖA3D ile benzer yolu izlemiş ve ifadeyi kanıtlamıştır. Bu süreçte ÖA3A, ÖA3D ve ÖA4A verilen köklerin denklemin kökleri olduğunu gösterme sürecinde kökleri denklemde yerine yazmayı tercih etmişlerdir. Kökler denklemi sağladığı için de köklerin denklemin kökleri olduğunu ifade etmişlerdir. Burada katılımcılar sağlama yapmayı kullanarak deneysel kanıt şemalarından temel örnekleri kullanmışlardır. Bu katılımcıların çözümlerine aşağıda yer verilmiştir.

| | |
|---|---|
|  |  |
| ÖA4A’nın dördüncü probleme ait çözümü | ÖA3A’nın dördüncü probleme ait çözümü |

Şekil 58. ÖA4A ve ÖA3A’nın klinik görüşmede dördüncü probleme ait çözümleri

Şekil 58’de ÖA3A ve ÖA4A’nın dördüncü problemi nasıl çözdükleri görülmektedir. Her iki katılımcı da problemi çözerken, problemde verilen denklemde x değeri yerine köklerden birini yazarak kökün denklemi sağlayıp sağlamadığına bakmışlar ve çözümlerini yapmışlardır. Bunun sonucunda katılımcılar “0=0”ı bulunca köklerin denklemi sağladığını ifade etmişlerdir. Bu süreçte katılımcılar için köklerin denklemi sağlaması yeterli olmuştur. Bu da deneysel şemalardan temel örnekler için bir delil oluşturmaktadır.

Katılımcılardan ÖA1B görüşmede dördüncü problemi kanıtlama sürecinde kendi deyimiyle işlemleri tersten yapmayı tercih etmiştir. Bu süreçte katılımcı köklerden yola çıkarak denkleme ulaşmıştır. Bunu da;

ÖA1B: $ax^2+bx+c=0$ olmak üzere $x_{1,2}$ olduğunu gösteriniz. Burada bu ifadeden yola çıkarak ben bunu buldum.

T : Nasıl yaptın onu?

ÖA1B: Şöyle yaptım. Ya şu x olsun. 2ax eşittir eksi b artı eksi kök içinde $b^2$-4ac. Eksi içinde yaparsam aynı şeyi sağlıycak zaten. Artı alalım. 2ax+b eşittir kök $b^2$-4ac. Buda karesini alırsam her iki tarafın. $4a^2x^2+4axb+b^2$ eşittir $b^2$-4ac. $b^2$’ler birbirini götürür. 4’ler birbirini götürür, a kare, hatta a’lar da birbirini götürür, $ax^2+bx$ eşittir c kalır burda. Bu c’yi bu tarafa atarsam eksi c olur. $ax^2+bx-c$, artı c. Şöyle eksi dersem burada tamam. Böyle bu ifadeyi buldum. O halde bu bunun bişeyidir, köküdür dedim. Ya da burada x’i yalnız bırakarak da bulabilirim.

T : Onu nasıl yaparsın?

ÖA1B: Onu yapmaya başladım ama tam böyle tamamlayamadım. Tam değerdi sanırım, bi dakka. x parantezine alırsam bunu, ax artı b artı c bölü x gelir. Sıfır olur, ax artı b artı c bölü x eşittir sıfırdır. Burada bişey yaptığımı hatırlıyorum ama. Artı eksi bişey ekliycem. O da işte a eksi b’nin karesi gibi bi değer çıkıcak. Sonra bi ifade tersi yapıcam. Kökünü alıcam karşı tarafın o kareyi kurtarmak için. Orda işte x kalıcak. x’i yalnız bırakmış olucam. Kök olarak da şu çıkıcak. İfade güzel ama ne yapacağımı şu anda hatırlamıyorum. Buradan da çıkartamıyorum.

T : İfadeyi nereden hatırlıyorsun?

ÖA1B: Ezber tamamen.

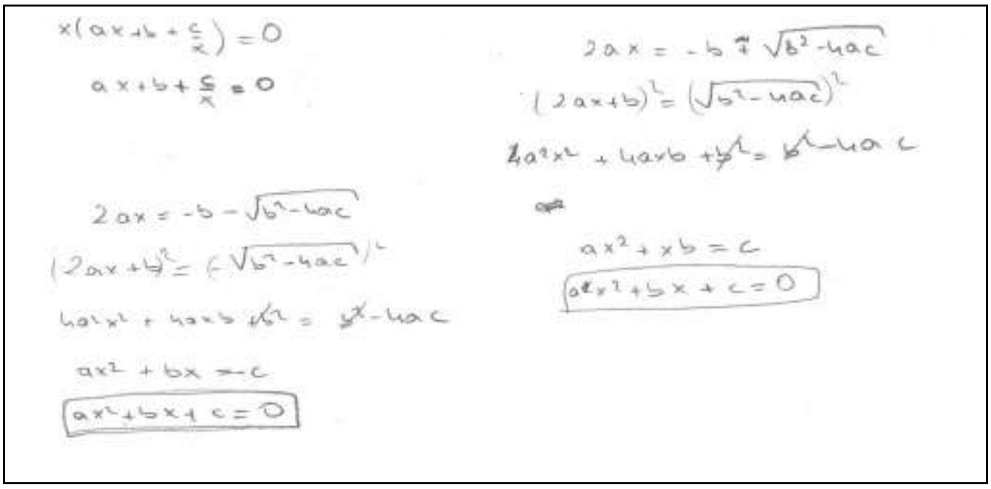
T : Ezber derken?

ÖA1B: ÖSS'ye hazırlanırkenden hatırlıyorum, ezberlemiştik.
T : Neyi ezberlemiştin?
ÖA1B: Yani şu genellemeyi, bu köklerin bulunması. Burada x'i yalnız bırakmamız gerek. Onu yapmam için de ezberimden yararlanmam gerekiyo. Ama bu da doğru gibi ya. Kökten çıktım ben yola. Yani sonuçtan çıktım bana verilen denklemi buldum gibi bişey oldu yani. Burada artı aldım. Eksi aldığım zaman da aynı ifadeye ulaşırım. (sessizlik)
T : Peki bu iki kökünde bu denklemi sağlaması bu denklemin kökleri olduklarını göstermek için yeterli mi sence?
ÖA1B: Bir de tersten mi yapmam gerekiyor acaba?
T : Nasıl tersten?
ÖA1B: Yani bi de x'leri mi bulmam gerekiyodu? $x_1$ ile $x_2$'yi mi bulmalıyım?
T : Ona sen karar vermelisin. Ama benim şu anda sorduğum bu yaptıkların bunu göstermek için yeterli mi?
ÖA1B: Evet yeterli.

Şeklinde ifade etmiştir. Katılımcı için köklerden yola çıkarak denkleme ulaşmak yeterli olmaktadır. Katılımcı denklemde x'i yalnız bırakıp köklere ulaşabileceğini de ifade etmektedir ama bunu ezberlediği için nasıl yapılacağını hatırlamamaktadır. Katılımcıya neden böyle bir yol izlediği sorulduğunda ise;

T : Peki neden böyle bir yol izliyorsun?
ÖA1B: Tersten gidince buldum işte. Yani bana verilen sonuçtan denkleme ulaşıyorum gibi bişey bu. (sessizlik) Bu ama uzun bi yol gibi oldu. Şurdaki yöntem daha kolay ve daha kesin. Şu anda hatırlayamıycam ama. (sessizlik) Dur ya. Sonuçta ikisinde de aynı denklemi çıkarttım köklerden yararlanarak. Eeee o halde yani bu kök bu denklemin içinde yani bunu sağlar diyebilirim ben de. Başka bi ifade verilseydi yine aynı şekilde yapardım.
T : Başka bir ifade derken…
ÖA1B: Yani bunu sağlayan başka bi ifade. Mesela bi hipotez verilip de bunun sonucunun bu olduğu söylense. Genelde tersten gitme yolunu kullanıyorum. O daha kolay geliyo.
T : Tersten gitme…
ÖA1B: İşte sondan başa doğru, sonucu kullandım burada.
T : Neden daha kolay geliyor sana?
ÖA1B: Yani işte belki kesinlik arıyorum. Çıkmazsa baştan sona gidicem çünkü.
T : Sondan başa doğru gelmek o zaman sana göre daha kesin bir sonuç veriyor gibi.
ÖA1B: Evet, yani.
T : O yüzden öyle bir yöntem izlemeyi tercih ediyorsun.
ÖA1B: Zaten verilen bir sonuç bu. Ya kesin çıkıcaktır zaten. Ya da çıkmasa onun olmadığını kanıtlamış olucam. Ordan daha kolay geliyo. Bilmiyorum belki mantık hatası yapıyorumdur ama. Böyle işte.

Açıklamasını yapmıştır. Katılımcıya sondan başa doğru gitmek daha kolay ve kesin gelmektedir. Dördüncü problemde ÖA1B köklerden denkleme ulaşarak deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmıştır. ÖA1B dördüncü problemi yazılı sınavda da deneysel şemaları kullanarak çözmüştür. Katılımcının çözümüne aşağıda yer verilmiştir.



Şekil 59. ÖA1B'nin klinik görüşmede dördüncü probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA1B dördüncü problemi yazılı sınavda da çözerken önce denklemde verilen x değerini yalnız bırakmayı denemiş fakat buradan bir sonuca ulaşamayınca kökten yola çıkarak denkleme ulaşmıştır (bkz. Şekil 59.). Katılımcı bunu yaparken, kökte içler dışlar çarpımı yaparak işlemleri devam ettirmiş ve sonunda da $ax^2+bx+c$'ye ulaşmıştır. Bu süreçte de önce köklerden birini sonra da bir diğerini ele alarak teker teker işlemlerini yapmıştır. Katılımcı için bu işlemlerin sonucunda da problemde verilen denkleme ulaşmak köklerin, denklemin kökleri olduğunu göstermekte yeterli olmuştur.

Katılımcılardan ikinci sınıf öğretmen adayı olan ÖA2B ve ÖA2D ise görüşmede verilen köklerin denklemin kökleri olduğunu gösterme sürecinde öncelikle önceden bildikleri kökler toplamının ve kökler çarpımının formülünü yazmışlardır. Bunun ardından problemde verilen kökleri de bu formüllerde yerine yazarak kökler toplam ve çarpımının formülünü elde edince köklerin denklemin kökleri olduğunu dile getirmişlerdir. Bunu da ÖA2B aşağıdaki biçimde ifade etmişdir.

ÖA2B: (sessizce işlem yapıyor) Bu dördüncü soruda da normal denklemden kökleri bulma yöntemi vardı. Oradan yapmıştım.

T : Normal bir denklemin köklerini bulma derken?

ÖA2B: Eksi b bölü a, $x_1$ artı $x_2$ eksi b bölü a idi, $x_1$ çarpı $x_2$ de eşit c bölü a. Buradan mesela şu ifadeyi, mesela toplamını alalım. Buradaki köklerde mesela $x_1$'im eksi b artı kök içinde b kare eksi 4ac bölü 2a. Bunun $x_2$'si de eksi b eksi kök içinde b kare eksi 4ac bölü 2a. Bunları da toplayınca bu ifadenin çıktığı görülüyor. Ama daha matematiksel bi ifade artık olur mu? $x_1$ artı $x_2$ eşittir eksi 2b bölü 2a'da bu da eşittir eksi b bölü a. Böyle çıkıyor.

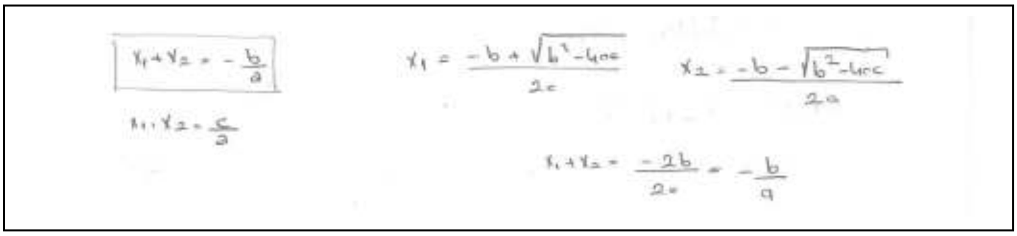
T : O zaman gösterilmiş midir?

ÖA2B: Gösterildi ama başka bir şekilde de gösterilir herhalde.

T : Peki sen niye bu yolu tercih ediyorsun?

ÖA2B: Yine bu daha kolay, daha mantıklı gibi gözüküyor hani. Daha hani benim kafam alıyo, daha hani anlaşılır olduğu için bu yöntemi yapıyorum. Böyle hani olur mu buradaki toplamı buna eşittir, bu nerden çıktı hani falan gibi böyle bir şey sorulur mu bilmiyorum ama böyle eşit olduğu gözüküyor.
T : Bunun nereden çıktığını biliyor musun?
ÖA2B: Yok hani tam net olarak bilmiyorum da yani baktığımda kök toplamları ona eşit oluyor. Daha önce öğrenmiş olduğumuz bu ifadeye eşit oluyor.

Katılımcının bu yolu tercih etmesindeki neden ise kendisi için daha anlaşılır, daha kolay ve daha mantıklı olmasıdır. Katılımcılardan ÖA2D'de benzer bir yol izleyerek köklerin, denklemin kökleri olduğunu göstermiştir. Burada her iki katılımcı da yazılı sınavda olduğu gibi görüşmede de deneysel şemalardan temel örnekleri kullanmışlardır. Aşağıda ise ÖA2B'nin görüşmedeki çözümüne yer verilmiştir.



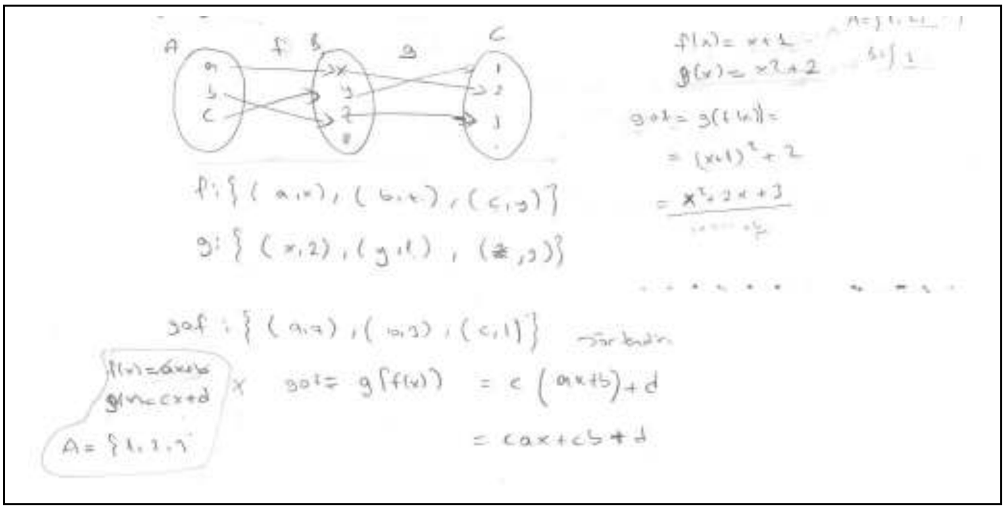

Şekil 60. ÖA2B'nin klinik görüşmeye dördüncü probleme ait çözümü

ÖA2B dördüncü problemi çözerken daha önceden bildiği kökler toplamı ve farkı formüllerini kullanmıştır (bkz. Şekil 60.). Bunu yaparken de kökler toplamını bulmak için problemde verilen kök değerlerini toplamış ve bunun sonucunda da bulduğu değer önceden bildiği formül ile aynı çıkınca köklerin denkleme ait olduğunu ifade etmiştir.

ÖA2A ve ÖA3B gibi katılımcılardan ÖA1B'de görüşmede venn şeması çizerek beşinci problemi doğrulama yolunu seçmiştir. Fakat ÖA1B venn şemasına ek olarak bu kümeleri bir de liste biçiminde göstermiştir. Bunu da;

"Tamam, A, B, C kümeleri. 1, 2, 3 olsun C kümesi. a x'e gitsin x 2'ye gitsin, b z'ye gitsin z 3'e, c y'ye gitsin y 1'e. Burada da kendi kafama göre gönderiyorum. Bu f olsun bu da g olsun. Burada f'i yazarsam a, x, b, z, c, y (f={(a, x), (b, z), (c, y)}), g'yi yazarsam x, 2, y, 1, z'de 3'e gitmiş olur (g={(x, 2), (y, 1), (z, 3)}). Burada g bileşke f'i yazarsam da f'in altında g'nin görüntüsünü bulucam f'de a x'e gitmiş, x'de 2'ye gitcek, a'da 2'ye gitcek. Burada b z'ye, z 3'e, b'de 3'e. c y'ye, y 1'e c'de 1'e gider (g0f={(a, 2), (b, 3), (c, 1)}). Yani burada bütün elemanlar eşleştiği için örtendir dedim ben kendimce."

Biçiminde işlemlerini yaparak açıklamıştır. Bu da ÖA1B'nin yazılı sınavda olduğu gibi klinik görüşmede de deneysel şemalardan temel örnekleri kullandığını göstermektedir. Görüşmede çözümünü ise aşağıdaki gibi yapmıştır.



Şekil 61. ÖA1B'nin klinik görüşmede beşinci probleme ait çözümü

ÖA1B beşinci problemi çözerken venn şeması ile örnek fonksiyonlar tanımlayan diğer bir katılımcıdır (bkz. Şekil 61.). Fakat ÖA1B venn şeması kullanan diğer katılımcılardan farklı olarak fonksiyonları bir de sıralı ikililer şeklinde liste biçiminde tanımlamıştır.

Katılımcılardan ÖA3B üçüncü sınıfa devam etmektedir. Bunun yanı sıra 6. problemde hem yazılı sınavda ve hem de görüşmede deneysel şemaları kullanan katılımcı yazılı sınavda da ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanmıştır. Katılımcı görüşmede 6. problemi çözme sürecinde açıklamasını;

ÖA3B: I bir fonksiyon olmak üzere I bileşke f eşittir f bileşke I eşittir f fonksiyonu olduğunu gösterin. Şimdi birim fonksiyon her elemanı kendisine götüren fonksiyon. O zaman şurasında demek ki f fonksiyonu yani ikisinde de 1, 2, 3 elemanı varsa bu birim fonksiyon. Her elemanı kendisine götürecek demektir bu. Yani 1'i 1'e, 2'yi 2'ye, 3'ü 3'e götürdü. Sonuçta 1, 2, 3…Ne? I, f, f, I, f olduğunu gösteriniz? Evet Hıımmm. Şimdi buradaki f fonksiyonu f bileşke I fonksiyonu da birim fonksiyon olsun. Buradan 1, 2, 3'ü elde ettim. Yani f fonksiyonunu tekrar elde ettim. Birim fonksiyon her elemanı kendisine götüren fonksiyon.

T : Tamam, bu durumda…

ÖA3B: Doğru bir şey.

T : I ile f'in bileşkesinin f olduğuna nasıl karar vereceğiz buradan?

ÖA3B: Burada değer, 1'i 1'e 2'yi 2'ye götürerek f fonksiyonunu tekrar buldum.

T : Başka nasıl açıklayabilirsin bunu?

ÖA3B: Başka...

T : Ya da bu yaptıkların isteneni göstermek için yeterli mi, yeterli olur mu?

ÖA3B: Bence yeterli. Değil mi?

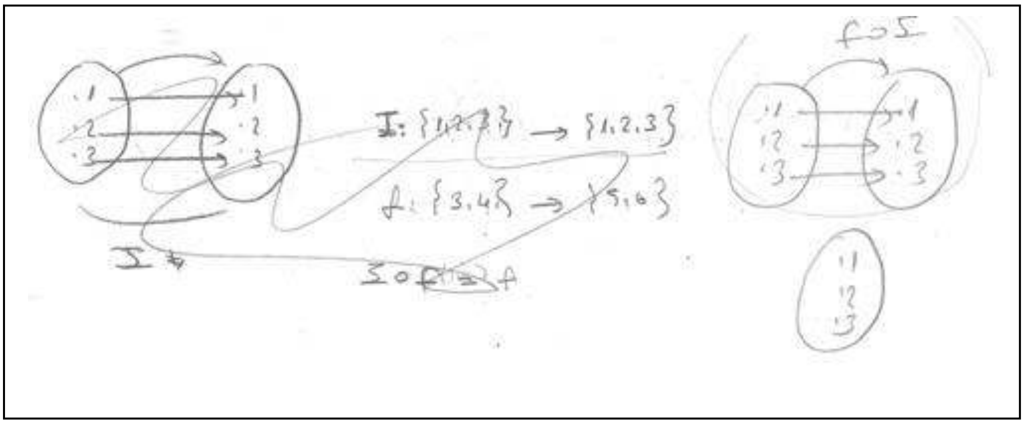
T : Önemli olan senin için yeterli olup olmadığı.

ÖA3B: Benim için yeterli.

T : Bu durumda ikna oldun.

ÖA3B: Evet.

Şeklinde yapmıştır. Katılımcı problemi çözerken venn şeması ile bir fonksiyon tanımlayarak f bileşke I ve I bileşke f fonksiyonlarını bulmuş ve bunların f fonksiyonuna eşit olduğunu dile getirerek savunmasını yapmıştır. Seçtiği bir örnekle eşitliğin doğruluğunu göstermek katılımcı için yeterli olmuştur ve bir örnekle ikna olmuştur. Bu da öğretmen adayının deneysel şemalardan temel örnekleri kullandığının bir göstergesidir. Katılımcı problemi bir örnek ile çözerken aşağıdaki işlemleri yapmıştır.



Şekil 62. ÖA3B'nin klinik görüşmede altıncı probleme ait çözümü

ÖA3B altıncı problemde verilen eşitliğin doğruluğunu gösterirken önce venn şeması ile seçtiği bir örneği liste yönteminde de göstermeyi denemiştir (bkz. Şekil 62.). Fakat daha sonra bunların üstünü karalayarak sadece venn şeması ile çözümünü tamamlamış ve problemdeki ifadenin doğruluğunu deneysel şemalar ile ortaya koymuştur.

Katılımcılardan ÖA1B birinci sınıfa devam etmekte olan ve yazılı sınavda ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanan bir katılımcı olmasının yanı sıra yazılı sınavda ve klinik görüşmeler sırasında altıncı problemin çözümünde de deneysel şemaları kullanmıştır. Katılımcının deneysel şemaları kullanma sürecinde aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir.

ÖA1B: I birim fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonu için Iof=foI=f olduğunu gösterelim. Ben şimdi birim fonksiyonun diyelim ki tanım kümesindeki x leri görüntü kümesindeki x'lere götüren eleman. Yani f fonksiyonu A'dan A'ya tanımlı bir fonksiyon. $I_A$ ise x virgül x'lerden başlıyo diyebilirim. O halde x'ler elemandır A gibi bir şey oluyor. Ya da bunu şöyle gösteririm. A=(1,2,3) kümesini alırım. 1, 2, 3. 1'den 1'e 2'den 2'ye 3'ten 3'e gider. Yani 1 ile 1'i işleme soktuğumdu yine 1 çıkar, 2'yle 2'yi işleme soktuğumda yine 2 çıkar. Bu bana birim fonksiyon olduğunu gösterir. Yani, I bileşke f olduğunu gösterin diyor. Şöyle yapabilir miyim? İşlem sadeleştirerekten.

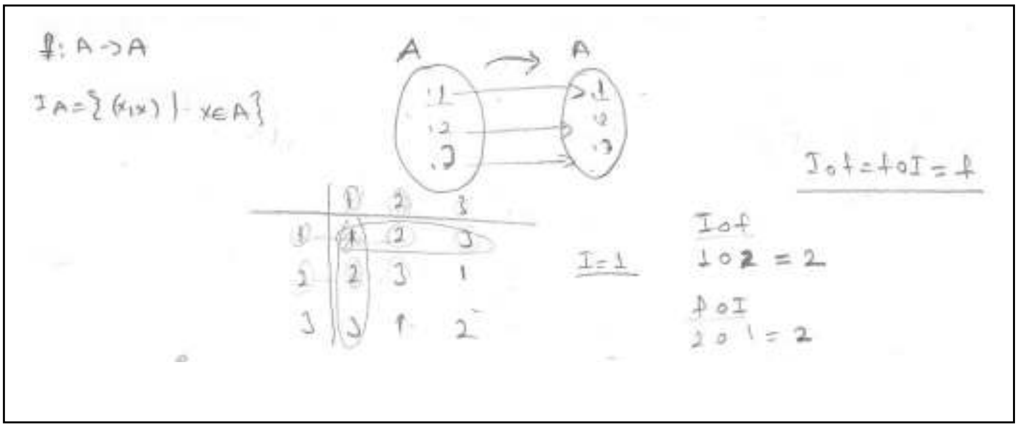
T : Nasıl istersen…

ÖA1B: O zaman işlem tablom olsun. Elemanlarım 1, 2, 3 olsun. Buda bu şekilde. (işlemler yapıyor) Böyle olsun. Şu 1, 2, 3. Şu 1, 2, 3. Şurda kesişen benim birim elemanım olur. Şimdi I bileşke f. 1'le 1'i işleme soktuk 1 olmuş, 2'yle 2'yi işleme soktuk 2 olmuş. Niye böyle olmuş, 1 olması gerekiyodu. Yanlış yaptım o zaman (mırıldanıyor). Pardon. 1 ile 1 işleme girdi 1, 1 benim birim elemanımdı, 2 ile 1'i işleme soktum kendisini verdi 2'yi, 3 ile 1'i işleme soktum 3'ü verdi, yine kendisini verdi. Yani birim eleman herhangi bir şeyle işleme girdiğinde o girdiği şeyi çıkartıyor sonuç olarak. Burada I bileşke f, I bileşke f. Örneğin buradaki 1 birim elemanım olsun f de 2 olsun. Bu neye eşittir 2'ye. foI olsun f'im burada 2 olsun bileşke I=1 olduğu için yine bunun sonucu da 2'dir. O halde Iof ile foI'nın birbirine eşit olduğunu ve f e eşit olduğunu göstermiş olurum.

T : Şimdi burada sen 2 yi örnek alarak yaptın, f'in 2 olduğunu düşündün, burada f fonksiyonunu o zaman 2 olarak mı düşünüyorsun?

ÖA1B: Yani burada f fonksiyonu aslında sabit bir fonksiyon olmuş olur.

ÖA1B görüşmede Iof=foI=f eşitliğinin doğruluğunu gösterirken matematikte işlem konusundaki birim elemanı ve işlem ile ilgili bir tablo kullanmıştır. Eşitliğin doğru olduğunu savunurken de bunu kullanmış ve aşağıdaki çözümü yapmıştır.




Şekil 63. ÖA1B'nin klinik görüşmede altıncı probleme ait çözümü

ÖA1B altıncı problemi çözerken işlem konusunda kullanılan birim elemanı kullanarak bir tablo oluşturmuş ve problemde verilen eşitliğin doğruluğunu göstermeye çalışmıştır (bkz. Şekil 63.). Katılımcı yazılı sınavdaki çözümünü de görüşmedeki çözümüne benzer biçimde yapmıştır.

Katılımcılardan ÖA3B yazılı sınavda ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanmış olan katılımcılardandır. ÖA3B'nin görüşmede yedinci problemde verilen ifadeyi doğrulama sürecindeki çözümü aşağıdaki biçimde olmuştur.

ÖA3B: f ve g fonksiyonları için olduğunu gösteriniz? Ters fonksiyon var yani burada? Tamam buna yine bir f fonksiyonu yapayım. 3'ü, 4'ü, 5'i alayım. 7, 8 ve 9'u alayım. Şimdi şöyle 3'ü 8'e, 4'ü 7'ye, 5'i 9'a götürsün. Bu f fonksiyonumuz. Birde g fonksiyonu yapayım. Buda f bileşke g. O zaman şöyle olsun 7, 8, 9, 10, 11, 12. 7'yi 10'a, 8'i 12'ye, 9'u 11'e götürsün. f ve g fonksiyonlarımız bunlar olsun. Şimdi şunları yazıyım ben. f fonksiyonu, şu tersi, görüntü kümesi değer kümesinin yerine geliyo, değer kümesi görüntü kümesinin yerine geliyor. f'in tersini yapıyım şurada. (işlem yapıyor ) 7, 8, 9, 3, 4, 5. 8'i 3'e götürecek tersinde, 9'u 5'e götürecek, 7'yi 4'e götürecek. f'in tersi bu olmuş oldu. g'nin tersini yapayım. O da aynı. Şurası görüntü kümesi olacak 7, 8, 9. 10'u 7'ye götürecek, 11'i 9'a götürecek, 12'yi de 8'e götürecek. Şimdi f bileşke g'yi yazayım. f bileşke g neyle başladık

3, 4, 5 ile başladık. 3'ü 8'e götürdüm, 8'i 12'ye götürdüm sonuçta ne oldu 3 12'ye gitmiş oldu. Şöyle 4 7'ye, 7 10'a sonuçta 4 10'a gitmiş oldu. 5 9'a, 9 11'e sonuçta ne olmuş oldu 5 11'e gitmiş oldu. f bileşke g'de bu. O zaman f bileşke g'nin karşısı da buradakiler gibi görüntü kümesi değer kümesi olacak. 12'yi 3'e, 4'ü 14'e, 11'i 5'e. Bakalım eşit mi çıktı. Şununla şunun eşit olması lazım. Ha şimdi şurası da var. g'nin tersi bileşke f'in tersi. g'nin tersinde 10'u 7'ye götürdüm, 7'yi 4'e götürdü, 10'u 4'e götürecek, 11'i 9'a, 9'u 5'e, 11'i 5'e götürcek, 12'yi 8'e, 8'i 3'e, 12'yi 3'e götürecek. Şunların eşit olması lazım. 10'u 4'e, 11'i 15'e, 12'yi 3'e. Eşit çıktı.

T : Eşit çıktığına göre bu eşitlik de doğru mudur?

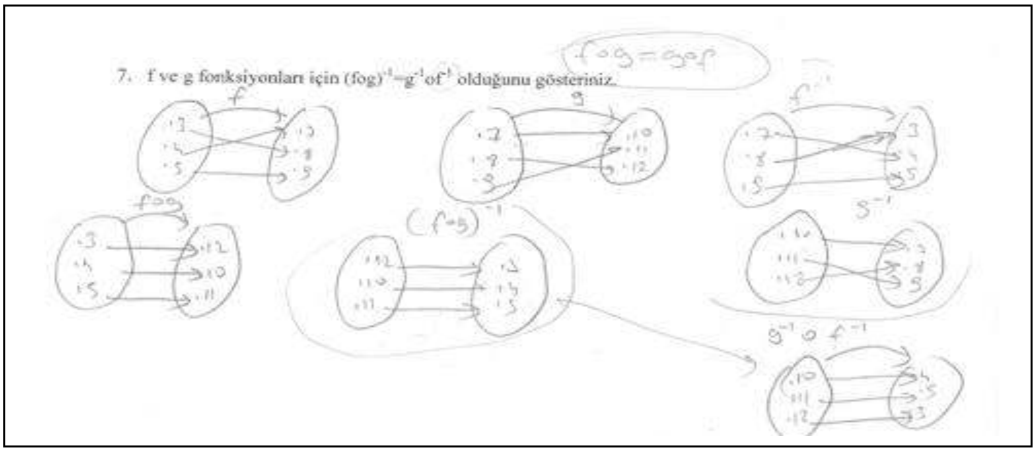
ÖA3B: Evet.

Katılımcı yedinci problemde verilen ifadeyi doğrulama sürecinde venn şeması ile tanımladığı fonksiyonları kullanmıştır. Bunu yaparken katılımcı önce venn şeması kullanarak bir f fonksiyonu ve ardından da yine venn şeması kullanarak bir g fonksiyonu tanımlamıştır. Daha sonra ise önce f bileşke g'yi bulmuş ve ardından da f bileşke g'nin tersini almıştır. Bunu yaptıktan sonra f ve g fonksiyonlarının terslerini yazarak g'nin tersi bileşke f'in tersini bulmuştur. Sonuçta f bileşke g'nin tersi ile g'nin tersi bileşke f'in tersi birbirine eşit çıkınca da problemde verilen ifadeyi doğruladığını dile getirmiştir. Bu süreçte katılımcı tamamen venn şemalarını kullanmıştır. Daha sonra ise katılımcı;

T : Burada örnekle eşitliği göstermek yeterli mi?

ÖA3B: Evet ama şu mesela her zaman doğru olmuyor. Bunun değişme özelliği yok her zaman. Evet bu şekilde.

Verilen ifadenin doğruluğunu göstermek için bir örneğin yeterli olduğunu yukarıdaki biçimde ifade etmiştir. Katılımcının kullandığı bu örnek bize yedinci problemi doğrulama sürecinde deneysel şemalardan temel örnekleri kullandığını göstermektedir. Katılımcı çözümünü Şekil 64'de görüldüğü gibi yapmıştır.




Şekil 64. ÖA3B'nin klinik görüşmede yedinci probleme ait çözümü

ÖA3B görüşmede yedinci problemi çözerken önce venn şeması yardımıyla f ve g fonksiyonlarını tanımlamıştır. Sonra fog ve $(fog)^{-1}$'i venn şemaları ile göstererek bulmuştur (bkz. Şekil 64.). Bunu tamamladıktan sonra önce f ve g fonksiyonlarının terslerini gösterip $g^{-1}of^{-1}$'i yine venn şeması kullanarak bulmuştur. Sonuçta $(fog)^{-1}$ ve $g^{-1}of^{-1}$ fonksiyonları birbirine eşit çıkınca problemdeki eşitliğin doğruluğunu göstermiştir. Katılımcı yazılı sınavda da benzer bir yol izleyerek deneysel şemaları kullanmıştır.

Katılımcılardan ÖA2B görüşmede yedinci problemi çözerken seçtiği fonksiyonları kullanarak sonuçlandırmaya çalışmıştır. Bu süreçte katılımcı ile;

ÖA2B: (mırıldanarak problemi okuyor)
T : fog'nin tersi eşitmiş g'nin tersi işlem f'in tersine.
ÖA2B: (sessizlik) g(x)=a gibi bir şey yapsak bakalım (işlem yapıyor). g eksi bir a eşittir x ($g^{-1}(a)=x$) (mırıldanarak işlem yapıyor). f(y)=b, buradan f eksi bir b eşittir y ($f^{-1}(b)=y$).
T : Ne yaptın burada? g(x)=a aldın, g'nin tersi a eşittir x. f içinde aynı şeyi yaptın.
ÖA2B: İşte x'e eşit oldu. Bunla bu eşit olamayabilir onun için g(x)'den gidiyorum. (mırıldanarak işlem yapıyor).

Yukarıdaki diyalog gerçekleşmiştir. Katılımcı fonksiyonları g(x)=a ve f(y)=b olarak tanımlamış ve problemi çözmeye çalışmıştır. Bu da katılımcının yazılı sınavda olduğu gibi deneysel şemalardan temel örnekleri kullandığına dair bir delil oluşturmaktadır.

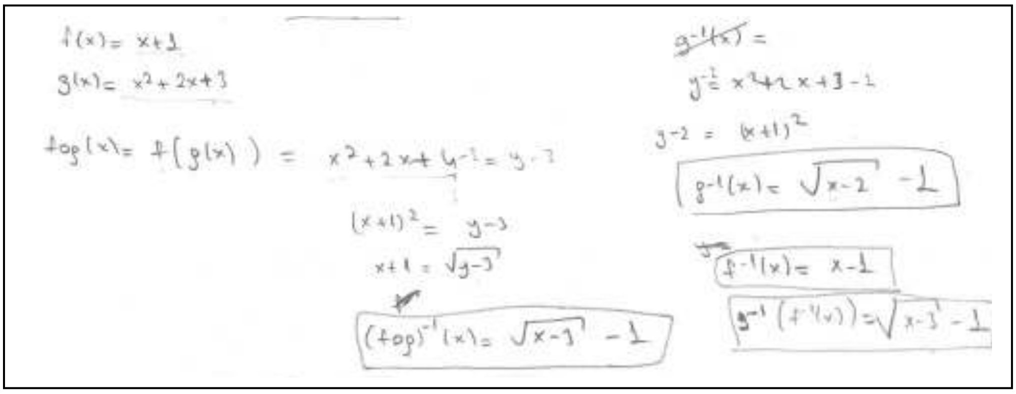
ÖA1B kodlu katılımcı birinci sınıfa devam etmekte olan öğretmen adaylarından birisidir. Katılımcı görüşmede yedinci problemi doğrulama sürecinde tanımladığı örnek f ve g fonksiyonlarını kullanarak işlemlerini yürütmüştür. Aşağıda katılımcı ile görüşme sırasında yürütülen diyalogdan bir alıntı bulunmaktadır.

ÖA1B: f ve g fonksiyonları için f bileşke g'nin tersi eşittir g'nin tersi bileşke f'in tersi olduğunu gösteriniz. f bileşke g. Bi tane f(x) fonksiyonu alayım. Bunu kendi kafamdan seçeyim. x+1 olsun kolay bir şey. g(x) fonksiyonu olsun. Bu da x üzeri 2 artı 2 çarpı x artı 3 olsun. Böyle bir şey. Şimdi burada f bileşke g'yi yaparsak. g(x) x kare artı 2x artı 4 oldu. Şimdi bunun tersini almamı istiyo benden. Bunu şöyle y'ye eşitlersek tam kareye tamamlarsak, buraya eksi 3 ekleyelim. Buraya da eksi 3 ekleyelim. Burada 1 olur, 1, 1. x artı 1'in karesi gelir buradan. Burada da y eksi 3 olur. x artı 1 kök içinde, eksi 1. (işlemler yapıyor). Buradan f bileşke g'nin tersi kök x eksi 3, eksi 1 olmuş olur. Ayrı ayrı bunların tersini alıp işleme soktuğumda da bunu bulursam demek ki birine eşittir. Yapayım mı onları da?
T : Evet.
ÖA1B: g eksi 1 x'i bulacağım şimdi. o zaman şunu şöyle yazmayalım da y yazalım bunun yerine. x kare artı 2x artı 3, bunu da yine tam kareye tamamlayalım (işlem yapıyor). g'nin tersi kök içinde x eksi 2 eksi 1 olur. f'in tersini bulmak içinde yine aynı yöntemi uygulayalım (işlemler yapıyor). f'in tersi de x eksi 1 olur. aynı çıkmıycak mı? Bi bakalım. g'nin tersi işlem f'in tersi, bunu yapmamı istiyor benden. Burada x gördüğüm yere x eksi 1 yazacağım. Yani bunun da sonucunun (fog)'nin tersine eşit olduğunu gördüm. O halde bu iki ifade birbirine eşittir.

ÖA1B seçtiği $f(x)=x+1$ ve $g(x)=x^2+2x+3$ fonksiyonlar ile problemi doğrulamıştır. Bunun için de önce f bileşke g fonksiyonunu bulup tersini almış ve ardından da f ile g'nin ayrı ayrı terslerini alıp g'nin tersi bileşke f'in tersini bulmuştur. Böylece de problemde verilen ifadenin doğruluğunu göstermiştir. Bunun ardından görüşmecinin bunun yeterli olup olmadığına dair sorusunu;

T : Böyle bir örnekle sağlanması senin için yeterli mi bu eşitliğin doğru olduğunu göstermek için?
ÖA1B: Yani başka ifadelerde yazmış olsam sonuçta aynı işlemleri yürüttüğüm için sonuç yine eşit çıkacaktı birbirine.
T : Başka bir yolla gösterir misin?
ÖA1B: Gerek duymuyorum, dedim ya başka örneklerde aynı sonucu verir. Geçim öbür soruya?

Şeklinde yanıtlamıştır. Ayrıca katılımcı başka bir yolla gösterip-gösteremeyeceği sorulduğunda başka bir örnek ile de aynı sonucun bulacağını belirterek deneysel kanıt şemalarından temel örnekleri kullanmış ve çözümünü aşağıdaki gibi yapmıştır.




Şekil 65. ÖA1B'nin klinik görüşmede yedinci probleme ait çözümü

Katılımcı ÖA1B görüşmede yedinci problemi çözmek için önce birinci dereceden bir f ve ikinci dereceden de bir g fonksiyonu tanımlamıştır (bkz. Şekil 65.). Sonra f bileşke g fonksiyonunu bularak tersini almıştır. Bunun ardından ise önce f'in tersini ve daha sonra da g'nin tersini bulmuştur. Son olarak da $g^{-1}of^{-1}$'i bularak $(fog)^{-1}$'ye eşit olduğunu belirterek seçtiği örnek fonksiyonlarla problemde verilen ifadenin eşi olduğunu yazılı sınavdaki gibi ortaya koymuştur.

ÖA1D kodlu katılımcı da ÖA1B gibi görüşmede f ve g için birer fonksiyon seçerek yedinci problemde verilen ifadenin doğruluğunu göstermiştir. Fakat burada ÖA1D'nin seçtiği fonksiyonlar ÖA1B'nin seçtiği gibi sabit fonksiyonlar değildir. Aşağıda ÖA1D ile geçen diyalogdan alıntıya yer verilmiştir.

ÖA1D: Şimdi eşitliğin iki tarafı da tek tek burada. Şimdi f(x) eşittir yine bi fonksiyon verelim, fonksiyon yazalım, ax artı b, cx artı b olsun buda.
T : Niye burada f(x)'e ax artı b. g(x)'e de cx artı d dedin?

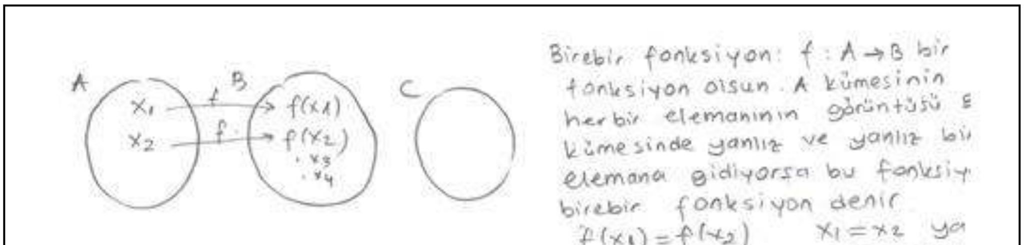
ÖA1D: Çünkü birbirinden farklı olması lazım.
T : Peki niye 1. dereceden bir fonksiyon seçiyorsun? Neden 2. dereceden bir fonksiyon seçmiyorsun?
ÖA1D: Gösterimi kolay olsun diye 2. derecede biraz daha uzun olduğu için 1. dereceden gösterirken daha kolay göstericem. Ama 2. dereceden de olabilir 3. dereceden de.
T : Tamam.
ÖA1D: Evet başlayalım o zaman f bileşke g, g(x) cx artı b. Bunu yerine yazalım. a çarpı cx artı d artı b. Evet şurası acx artı ad artı b çıktı. Şimdi bunun tersini alcaz. Tersi ne demek? Bi defa ben bunu gösteriyim yeter.

Katılımcı yedinci problemi çözerken f(x) fonksiyonunu ax+b olarak ve g(x) fonksiyonunu da cx+d olarak tanımlamış ve işlemlerini bunlara göre yapmıştır. Bu da katılımcının yazılı sınavdaki gibi deneysel şemaları kullandığını göstermektedir.

Farklı sınıf seviyelerinden katılımcılar deneysel şemalardan temel örneklerin yanı sıra sezgisel şemaları da kullanmışlardır fakat bu sadece birkaç örnek ile sınırlı kalmıştır. Bu katılımcılardan ÖA1D görüşmede ikinci problemde deneysel şemalardan temel sezgisel şemaları kullanan katılımcılardan birisidir. Katılımcı görüşmede açıklamasını;

ÖA1D: Birebirliği biliyorum ben. Bi kere bu kesin doğru. Neden doğru? Çünkü aslında doğru. Doğru ama şu şemaya uyduramadığım için gösteremedim. Şema olarak gösteremediğim için. Kümelere uyduramadığım için.
T : Ama aslında doğrudur diyorsun.
ÖA1D: Aslında doğru.
T : Doğru olduğuna nasıl karar veriyorsun?
ÖA1D: Çünkü A'dan B'ye, B'den C'ye tanımlı. B'den C'ye birebir fonksiyonda B ortak. Şimdi genel olarak küme düşünürsek, özel olarak değil, $x_1$·ler $x_2$'ler olmadan düşündüğümde, küme olarak düşünürsek A'dan B'ye birebir olduğunu düşünürsek, diğerinin de B'den C'ye olduğunu düşünürsek A'dan C'ye birebir olması aslında mantıklı. Ama $x_1$, $x_2$. $x_1$ $y_1$'e gidiyo, $x_2$ $y_2$'ye gidiyo gibi düşünürsek, yani özelleştirirsek, o zaman yani bi yerde duraklıyoruz, bi yerde kalıyoruz. Ama normalde doğru. Doğru geliyo.
T : Doğru olduğunu hissediyorsun yani.
ÖA1D: Evet hissediyorum. Hissediyorum ama gösteremiyorum.

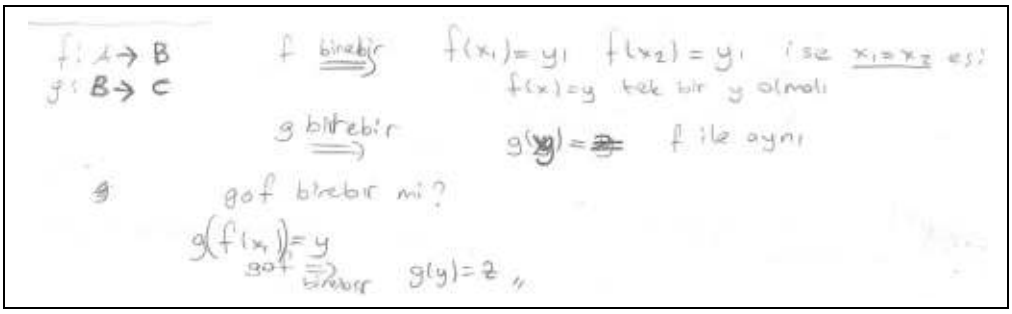
Şeklinde yapmıştır. Katılımcı problemdeki ifadenin doğru olduğunu hissetmekte fakat somut bir delil gösterememektedir. ÖA1D yazılı sınavda ise dışsal şemaları kullanmıştır. Katılımcı yazılı sınavda ise çözümünü aşağıdaki gibi yapmıştır.




Şekil 66. ÖA1D'nin yazılı sınavda ikinci probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA1D deneysel şemaları kullandığı ikinci problemi yazılı sınavda çözerken dışsal şemalar ile çözmüştür (bkz. Şekil 66.). Bu süreçte katılımcı birebir fonksiyonun tanımını doğru olarak vermiş fakat bunu g bileşke f fonksiyonuna transfer edememiştir. Bu da aslında katılımcının tanımı sadece ezberlediğini göstermektedir.

Bunun yanı sıra ÖA2D'de ikinci problemde yer alan g bileşke f'in birebir olduğunu söylemiş ama işlemsel olarak gösterememiştir. Çünkü öğretmen adayına göre f ve g fonksiyonlarının birebir olması g bileşke f fonksiyonunun birebir olmasını sağlamaktadır. Ayrıca katılımcı ikinci problemi yazılı sınavda dışsal şemalar ile doğrulamaya çalışmıştır ve çözümü aşağıda bulunmaktadır.



Şekil 67. ÖA2D'nin yazılı sınavda ikinci probleme ait çözümü

ÖA2D görüşmeler sırasında deneysel şemaları kullanarak savunmasını yaptığı ikinci problemi yazılı sınavda dışsal şemalar ile yapmıştır (bkz. Şekil 67.). Katılımcı çözümde birebirliğin tanımını doğru biçimde vermesine karşın g bileşke f fonksiyonunun birebirliğini gösterirken kullanamamıştır. Bu da katılımcının tanımı ezberlediğinin bir göstergesidir.

Klinik görüşmeye katılan ÖA1D beşinci problemi çözerken örtenliğin tanımını vermiş ve bunu hem sözel olarak yazmış ve hem de venn şeması ile göstermiştir. Fakat bunları bilmesi g bileşke f'in örtenliğini göstermesi için yeterli olmamıştır. Katılımcı açıklamasını;

ÖA1D: Bu da aynı, birebirle aynı. Gördük bunu da gördük. Ama şöyle bişey var örtenlik, birebirliğin aynısını düşünüyorum, bunun böyle olduğu hissediyorum ama yanlış da olabilir. Gösteremeyebilirim.

T : Gösteremez misin?

ÖA1D: Yine önce tanımını yapalım mı? Örtenlik, şimdi A'da aldığımız, A'dan B'ye aldığımız bir fonksiyonda A'nın her elemanını B'de ki tüm elemanları kapsıyorsa, ya da A'nın her elemanın görüntüsü B'nin tüm elemanlarını kapsıyorsa f örten bir fonksiyondur (söylerken yazıyor). İki küme çizelim. İki tane küme çizdik, A kümesi olsun B kümesi olsun, x gelsin y'ye, $x_2$ gelsin $y_2$'ye, $x_3$ gelsin $y_3$'e. Bu şekilde olacak yani B'de hiç boş yer kalmayacak. Yani bütün şu A kümesi B kümesindeki f(A)'ya eşit olacak. B'de hiç açık kalmayacak.

Mesela burada (B kümesi) $y_4$ olurda bu küme örten olmaz. O yüzden B kümesi f(A)'ya eşitse, f(A) görüntüsüdür, bu fonksiyon örten fonksiyondur. Şimdi soru gereği bi C kümesi daha ekleyelim. C kümesinde $z_1$ olsun, $z_2$ olsun, $z_3$ olsun. B'den C'ye örten, bu buna gidiyo, yine birebir gibi oldu ama. Mesela $y_2$ $z_3$ e de gitsin. Madem öyle birebir olmaması için.

T : Neden birebir olmaması için?

ÖA1D: Bence burada şey yapmayalım, örnek verelim yani. Birebir derken, yok öyle değil yani. Örneğimiz çeşitli olsun. Birebir gibi, birbirinin aynı olmasın yani. Çeşitli olsun diye. A'nın her elemanın görüntüsü B'nin tüm elemanlarını kapsıyorsa. Burada görmemiz gereken görüntü kümesinde açıkta eleman kalmaması.

T : Burada da örtenliğin tanımını yazdın. "A'dan B'ye bir fonksiyonda f örten bir fonksiyondur" şeklinde tanımı verdin. Burada A'nın her elemanının görüntüsü B'nin tüm elemanlarını kapsaması ile kastettiğin nedir?

ÖA1D: B'de, görüntü kümesinde boşta eleman kalmaması. Yani B kümesinde $y_4$ olmasa, bunu örten fonksiyon olamaz. Çünkü bunla eşleşen bişey yok A'da.

T : Burada sen A, B, C kümeleri tanımladın, g bileşke f'in örtenliğini nasıl anlıyorsun burdan? Bu yazdıklarınla nasıl bir ilişkisi var?

ÖA1D: $y_1$'in mi?

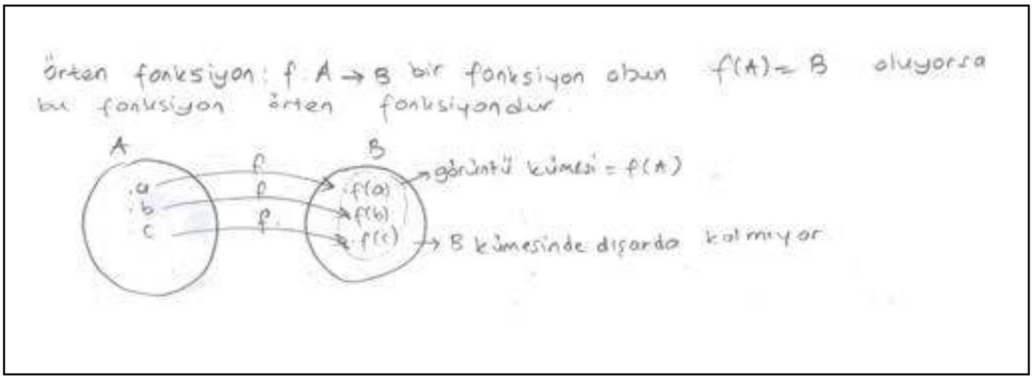
T : g bileşke f'in örtenliğine nasıl karar veriyorsun buradan?

ÖA1D: Birebirlikteki gibi, hissediyorum. Valla hissediyorum.

T : Gösteremiyor musun?

ÖA1D: Gösteremiyorum.

Şeklinde yapmıştır. Öğretmen adayı burada önce birebirlik ile örtenlik aynı diyerek dışsal şemaları kullanmış gibi görünsede daha sonra açıklaması değişmiştir. Öğretmen adayı burada tanımdan ve venn şemasından g bileşke f'in örten olduğunu hissetmekte fakat bir delil gösterememektedir. Bu da katılımcının deneysel şemalardan sezgisel şemaları kullandığını göstermektedir. Bunun yanı sıra katılımcı yazılı sınavda dışsal şemaları kullanmıştır. Katılımcı yazılı sınavda çözümünü;




Şekil 68. ÖA1D'nin yazılı sınavda beşinci probleme ait çözümü

Biçiminde Şekil 68'deki gibi yapmıştır. Fakat katılımcı problemi çözerken sadece örtenliğin tanımını vermiş olmasına rağmen problemde istenen g bileşke f fonksiyonunun örtenliğini gösterememiştir. Bu da katılımcının örtenlik tanımı ezberlediği için transfer edememesinden kaynaklanıyor olabilir.

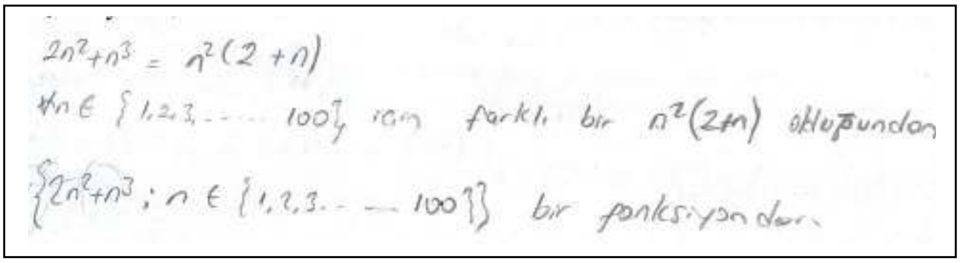
Sonuç olarak; deneysel şemaları kullanan katılımcıların büyük bir çoğunluğu temel örnekleri kullanmışlardır. Katılımcılar temel örnekleri kullanırken şekil çizme, yerine koyma, deneyerek yapma, sağlamasını yapma ve sayısal değer verme gibi yöntemler kullanmışlardır. Bunun yanı sıra temel örneklere göre çok az kullanılan sezgisel şemalarda ise katılımcılar ifadenin doğru olduğunu hissetmiş ama somut bir delil gösterememişlerdir.

### 3.3.3. Analitik Kanıt Şemalarının Farklı Sınıf Seviyelerindeki İlköğretim Matematik Öğretmeni Adayları Tarafından Kullanımına Dair Bulgular

Analitik kanıt şemaları mantıksal çıkarımlar yardımıyla tahminlerin geçerliliğini sağlamaktır. Bu nedenler genel nedenlerden oluşmakta ve akıl yürütmeyi içermektedir. Bu akıl yürütmeler ise örneklere dayanmalarından ziyade daha matematikseldirler. Bu şemada öğrenciler sayma stratejileri kullanmanın ve bunları geliştirmenin yanı sıra matematiksel ilişkileri de kullanmaktadırlar.

Bu çalışmada bütün problemler göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adaylarının %37'sinin (584 problem) yazılı sınavlarda ve %39,375'inin (63 problem) klinik görüşmelerde analitik şemaları kullandıkları görülmektedir. Klinik görüşmede bu katılımcıların 15'i birinci sınıf, 15'i ikinci sınıf, 15'i üçüncü sınıf ve 18'i de dördüncü sınıfa devam etmektedir. Analitik şemaların farklı sınıf seviyelerinde kullanımına bakıldığında 1, 2 ve 3. sınıfların aynı olmasına rağmen dördüncü sınıfların kullanımında bir artış meydana gelmektedir. Bunun yanı sıra klinik görüşmeye katılan katılımcılar yazılı sınavda 55 problemde analitik şemaları kullanmışlardır. Bu da gösteriyor ki klinik görüşmede analitik şemaları kullanan bütün katılımcılar yazılı sınavda analitik şemaları kullanmamışlardır. Bunun yanı sıra analitik kanıt şemalarının bütün alt şemaları kullanılmıştır. Fakat katılımcıların en fazla kullandıkları şema aksiyomatik kanıt şeması olmuştur. Bu süreçte ise katılımcıların çoğu problemde verilen durumu bir tanım veya kural kullanarak doğrulamaya çalışmışlardır. Bunun yanı sıra birkaç problemde de dönüştürülebilen şemalar kullanılmıştır.

Analitik şemaların alt şemalarından biri olan dönüştürülebilen kanıt şemaları görüşmeler sırasında sadece birkaç tane problemde birkaç katılımcı tarafından kullanılmıştır. Bu katılımcılardan ÖA1C birinci sınıfta öğrenimine devam etmekte olan öğretmen adayıdır. Katılımcı, yapılmış olan yazılı sınavda ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmıştır. Öğretmen adayı görüşme esnasında yöneltilen birinci problemde de analitik şemaları kullanmış olmasına rağmen yazılı sınavda dışsal şemaları kullanmıştır. Katılımcının yazılı sınavda yaptığı çözümü aşağıda yer almaktadır.



$2n^2+n^3 = n^2(2+n)$

$\forall n \in \{1,2,3,\ldots 100\}$ için farklı bir $n^2(2+n)$ olduğundan

$\{2n^2+n^3 ; n \in \{1,2,3,\ldots 100\}\}$ bir fonksiyondur.

Şekil 69. ÖA1C'nin yazılı sınavda birinci probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA1C yazılı sınavda birinci problemi Şekil 69'daki gibi çözmüştür. Katılımcı burada çözümü yaparken her n değerine karşılık farklı bir değer bulacağı için verilen ifadenin bir fonksiyon olduğunu belirtmiştir. Oysa ki bir ifadenin fonksiyon olması için bu yeterli değildir. Bunun yanı sıra ÖA1C birinci problemi görüşmede çözerken düşüncelerini;

ÖA1C: İlk soru. İfadesini bir fonksiyon olarak tanımlayabilir miyiz? $2n^2$ artı $n^3$ ifadesi verilmiş. n'i 1'den 100'e arasındaki doğal sayılar olarak tanımlamışlar. Bu aralıklarda n'e verilen her değer için n eşittir 1, 2, 3 için, n eşittir 1 için 2 artı 1 eşittir 3. n eşittir 2 için 8 artı 8 eşit 16, n eşit 3 için farklı değer bulunduğundan bunu bir fonksiyon olarak tanımlayabiliriz.

T : Burada n'e teker teker değerler vermek, karşısında bir değer bulmak verilen bu ifadeyi fonksiyon olarak tanımlamak için yeterli mi?

ÖA1C: Yetmez çünkü fonksiyonu tanımlarken tanım kümesinde boşta, tanım kümesindeki farklı elemanların, pardon. Tanım kümesindeki her elemanın farklı bir elemana gitmesi lazım veya daha doğrusu tanım kümesindeki bir elemanın değer kümesinde birden fazla karşılığı olmaması lazım. Değerleri verdiğimizde zaten bunu sağlamış oluyoruz. İkinci şık olarak ne diyebiliriz? Bunun bir kuralı daha vardı ama.

T : Fonksiyon olma kuralı mı?

ÖA1C: Evet. Birincisini sağlamış oldu bu zaten. İkincisini (sessizlik). Burada bütün değerlerimiz için farklı bi, büyük ihtimalle farklı bir karşılık, değer bulunur 3, 16. Aynı bir değerde bulsak bizim için sorun değil. Çünkü tanım kümesindeki iki farklı elaman aynı elemana gidebilir. Buradaki ifademizde de $2n^2$ artı $n^3$, burada n'e hangi değeri verirsek verelim farklı bi değer çıkacak. O yüzden herhangi bir şart yok başka.

T : Başka ekleyeceğin bir şey var mı?

ÖA1C: Evet sadece bir eleman, aynı eleman farklı elemanla eşlemez.

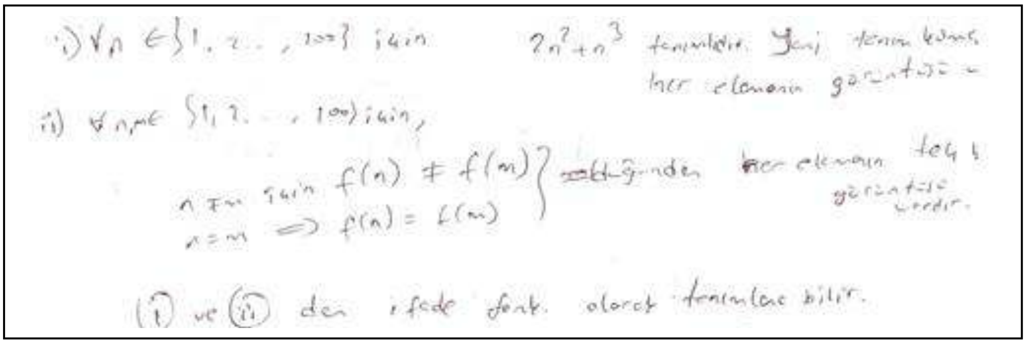
T : Bir tane daha var mı?

ÖA1C: İki taneydi. İki taneydi de, biri buydu, ikincisi tanım kümesinde her elemanın karşılığı olması lazım ki burada n'i tanımlamış 1'den 100'e kadar. Burada her elemana karşılık buluruz yani.

T : Peki fonksiyon olarak nasıl yazarız bu ifadeyi?

ÖA1C: f(n) eşittir $2n^2$ artı $n^3$. f fonksiyonu da 1, 100 kapalı aralığından reel sayı olarak, doğal sayı tanımlama. Hepsi doğal sayı çıkar.

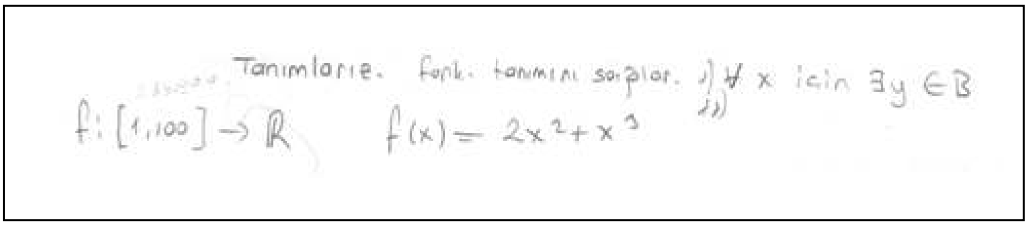
Şeklinde dile getirmiştir. Bu süreçte öğretmen adayı zihinsel operasyonları kullanarak analitik kanıt şemalarından dönüştürülebilen kanıt şemasını kullanmıştır. Öğretmen adayı burada içselleştirdiği fonksiyon tanımı yardımıyla problemi çözmüştür.Birinci problemde ÖA1C gibi klinik görüşmede analitik şemaları kullanan ÖA2C, ÖA3C ve ÖA4C'de benzer ifadeler ile birinci problemi sonuçlandırmışlardır. Fakat bu katılımcılardan ÖA2C ve ÖA3C yazılı sınavda birinci problemi çözerken dışsal şemaları kullanmalarına rağmen ÖA4C yazılı sınavda da analitik şemaları kullanmış ve çözümünü aşağıdaki gibi yapmıştır.




Şekil 70. ÖA4C'nin yazılı sınavda birinci probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA4C yazılı sınavda da birinci problemi çözerken analitik şemaları kullanmıştır (bkz. Şekil 70.). Katılımcı matematiksel olarak yaptıklarının açıklamalarını sözel olarak da yazmıştır.

Bunun yanı sıra yazılı sınavda şemaları eşit oranda kullanan ÖA2D klinik görüşmede birinci problemin çözümünde analitik şemaları kullanmış fakat yazılı sınavda dışsal şemaları kullanmıştır. Katılımcının yazılı sınava ait çözümü aşağıda yer almaktadır.




Şekil 71. ÖA2D'nin yazılı sınavda birinci probleme ait çözümü

ÖA2D birinci problemi yazılı sınavda Şekil 71'deki gibi çözmüştür. Katılımcı problemi çözerken her x değeri için bir y elemanının yeterli olduğunu belirtmiştir. Oysa bu bir ifadenin fonksiyon olması için yeterli değildir. Katılımcı problemi görüşmede çözerken ise önce tanım ve değer kümelerini tanımlamıştır. Bunu yaparken de açıklamasını;

> "100 verirsek buna mesela n yerine. n artı 2 çarpı 1000 artı 10000 diyelim. Sıfırdan bu sayıya kadar görüntü kümemiz olabilirdi. Toplarsak ne olur. 10000 artı 2000 eşit 12000 mesela. Ne derdik. f şöyle yapabilirdik. Sıfırdan 100'e gider sıfırdan 12000'e mesela yani. Normalde tanım aralıkları çok veri olarak verilmez ama. Verilseydi en azından bu kadar verilebilirdi."

Biçiminde yapmıştır. Daha sonra ise bir ifadenin fonksiyon olması için gereken koşulları;

> "Tek bir elemanın tek bir görüntüsü olmalı. Bir de her elemanın görüntü kümesinde bir tane görüntüsü olması lazım. 1 den 100 e kadar olan eleman, mesela şurada 99 yazdığımızda şu aldığımız kümenin dışında oluyorsa fonksiyon olarak tanımlayamayız."

İfadesi ile açıklayarak zihninde oluşturduğu fonksiyon tanımını kullanmış ve analitik şemalardan dönüştürülebilen kanıt şemasını kullanmıştır.

Dönüştürülebilen kanıt şemalarını kullanan bir diğer katılımcı ÖA4B dokuzuncu problemi çözme sürecinde hem yazılı sınavda ve hem de görüşmelerde analitik şemaları kullanmıştır. Katılımcı dokuzuncu problemin çözümünde analitik şemaları kullanan diğer katılımcılardan daha farklı bir yol izlemeyi tercih etmiştir. Diğer katılımcılar doğrulama sürecinde bir fonksiyonun tersinin alınması kuralını kullanırken ÖA4B görüşmede açıklamasını birim fonksiyon yardımı ile yapmıştır. Bunu da;

ÖA4B: Bunda yine aynı yöntemi kullanırım. f'in değilinin değili bileşke f'in, f'in değilini alırım. Buradan birim fonksiyona eşittir diyebilirim. Diyebilirim. Diyemem. Hayır diyebilirim, şöyle düşünürsem.

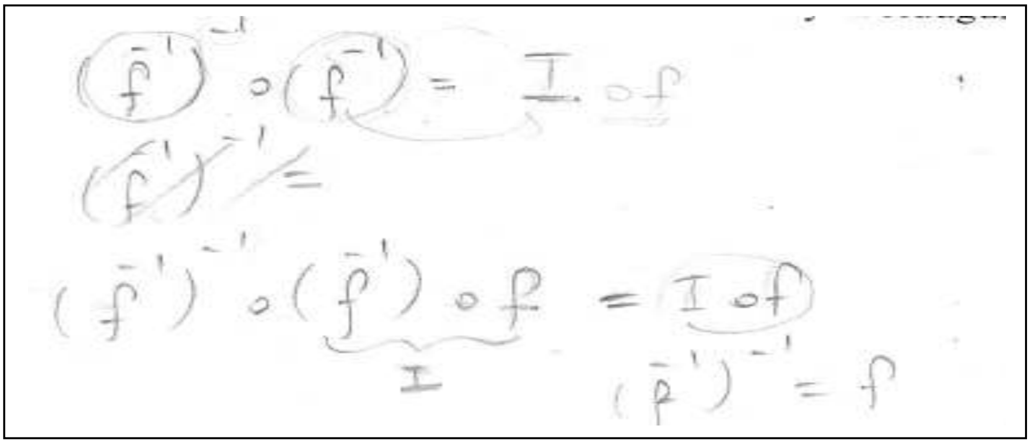
T : Niye tereddüt ettin diyebilirim diyemem diye?

ÖA4B: Şu üzerlerini karıştırdım. İkinin tek bir şey olduğunu düşündüğümden göremedim. İlk başta gördüm de sonra göremedim. Buradan f'in değilinin değili eşittir bu bu tarafa birim fonksiyon, yani şöyle atmayım o şekilde de çünkü o zaman yani nereden geldiğini izah edemem ezber oluyor. f'in değilinin değili bileşke f'in değili dedim birim fonksiyona eşit olduğunu biliyoruz. Buradan bileşke f derim. Ama gene aynı şey çıktı, bir saniye. Tamam evet birim fonksiyon.

T : Aynı şey çıktı derken. Ne düşündün?

ÖA4B: Şurası birim yapıyor ya gene aynı şeye döndüm, buna döndüm. Kontrol edemedim mi diye düşündüm ama. Şimdi önce f'in değilinin değili bileşke f'in değili yani x çarpı $x^{-1}$ şeklinde düşündüm. İçini tek bir değer gibi düşünürsek birim fonksiyona eşit olduğunu biliyorum ben. Sanırım bu da teoremler gereği. Burada direk bunu bu tarafa bileşke f şeklinde atmak istedim ama o zaman saçma olacaktı ispatın bir anlamı yoktu. Çünkü o ezber oluyor bu tarafa atmak. Zaten benim ulaşmak istediğim amaç bu taraf. O yüzden bunu karaladım ki tekrar buraya bileşke f ekleyim karşı tarafa da bileşke f eklemem gerekiyor eşitlik olduğu için. Bir an eşitliği unuttuğum için dedim yani gene aynı yere vardım diye sonra eşitliği hatırladım. Eşittir birim fonksiyon bileşke f den burası birim fonksiyon yaptı. Buradan da f'in değilinin değili eşittir f yapar. Yani birim fonksiyon bileşke f yapar. Sonuca ulaşmış oluyorum. Bu kadar başka da bir şey yok.

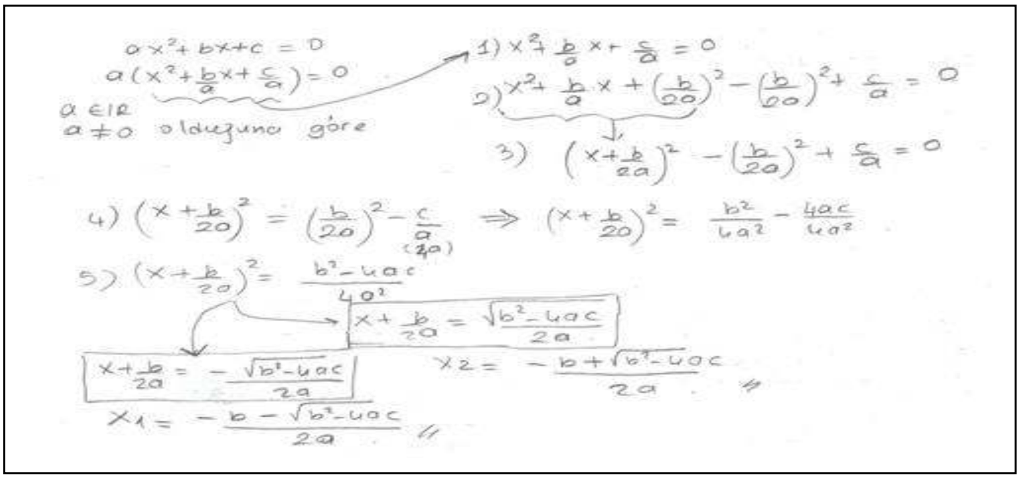
Biçiminde açıklamıştır. Katılımcı problemi çözerken verilen ifadenin her iki tarafına önce f'in tersi fonksiyonunu eklemiş ve daha sonra da çıkan ifadede her iki tarafa f fonksiyonunu ekleyerek dokuzuncu problemde gösterilmesi istenen ifadenin eşitliğini göstermiştir. Kaılımcı bu süreçte zihinsel işlemlerini kullanarak analitik şemalardan dönüştürülebilen şemayı kullanmıştır. Çözümü ise aşağıda görüldüğü gibi yapmıştır.



Şekil 72.ÖA4B'nin klinik görüşmede dokuzuncu probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA4B dokuzuncu problemi çözerken önce $(f^{-1})^{-1}$ bileşke $f^{-1}$'in birim fonksiyona eşit olduğunu yazmış (bkz. Şekil 72.) ve daha sonra da eşitliğin her iki tarafına da f fonksiyonunu ekleyerek dokuzuncu problemi çözmüştür.

Farklı sınıf seviyelerinden 16 öğretmen adayının katıldığı klinik görüşmede dördüncü problemde sadace birinci sınıflarda öğrenimine devam etmekte olan ÖA1D kodlu öğretmen adayı analitik şemaları kullanarak çözümünü yapmıştır. Diğer sınıf seviyelerinden ise analitik şemaları kullanan olmamıştır. ÖA1D yazılı sınavda da analitik şemaları kullandığı dördüncü problemi aşağıdaki biçimde çözmüştür.




Şekil 73. ÖA1D'nin yazılı sınavda dördüncü probleme ait çözümü

ÖA1D yazılı sınavda dördüncü problemi Şekil 73'deki gibi çözmüştür. ÖA1D dördüncü problemi çözerken verilen denklemi önce a parantezine almış ve ardından da tam kareye tamamlamak için eşitliğe $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ hem eklemiş ve hem de çıkartmıştır (bkz. Şekil 71.). Birinci sınıfta öğrenimine devam etmekte olan ÖA1D dördüncü problemin çözümünde görüşmede analitik şemaları kullanırken ise aşağıdaki diyalog geçmiştir.

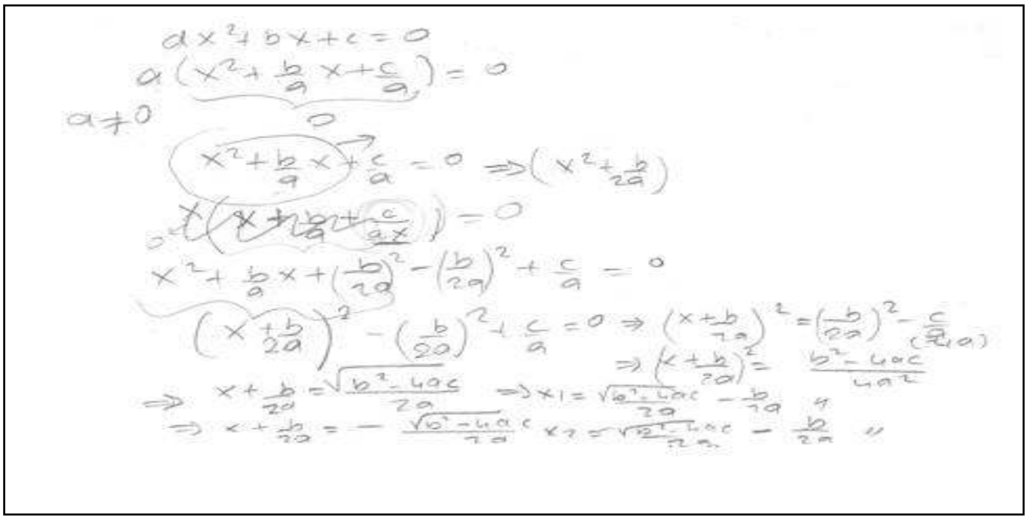
> "Burada şimdi $ax^2+bx+cx=0$ Şimdi bizden $x_1$ ve $x_2$'yi istediği için, kökleri istediği için x'i yalnız bırakmamız gerekiyor. a parantezine alalım $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x=0$ Böyle bir denklemde ya a sıfır olur ya şu ifade sıfır olur; a sıfırdan farklı olmalı, a sıfırdan farklı olmazsa bize verilen bu ifade bi denklem olmaz. Bu yüzden a sıfırdan farklı, a sıfırdan farklı, sıfır olamaz. O yüzden bu ifade sıfırdır. $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x=0$Şimdi bizden kökleri istediği için, x'i tek başına istediği için, x'i çekeceğiz buradan. x artı b bölü a artı, b bölü a artı, hah x'i çekicez. x'i çekmiycez, x'i öyle çekmiycez. x'i yalnız bırakmamız için x'i tam kare yapacağız. x'i böyle çekmiycez. şurda tam kare oluşturucaz. Öyle yapmayalımda farklı bir yöntem olarak x'i tam kare yapalım. Nasıl yapalım? Bu aslında şunun açılımıdır. 2a'nın karesi. Ya da açalım şöyle güzelce. b bölü a x artı b bölü 2a, bunların kareleri, artı c bölü a (işlemleri yazarak anlatıyor). Şöyle b bölü 2a'nın parantez karesini bir ekleyip bir çıkarırsak şu ifade x artı b bölü 2a'nın parantez karesi olur. Hem bu sayede x birinci dereceye düşmüş olur. Tam kare yaparaktan. Burada b bölü 2a'nın parantez karesiyle c bölü a kaldı (sesli bir biçimde işlemleri yaptı ve sonuçta $x_{1,2}$'yi doğru bir biçimde buldu). $x_1$'le $x_2$'yi bulmuş olduk. "

Katılımcılardan ÖA1D dördüncü problemde verilen ifadenin doğru olduğunu gösterme sürecinde ifadeyi tam kareye tamamlama yolunu seçerek verilen köklerin denklemin kökleri olduğunu göstermiştir. Burada öğretmen adayına neden tam kareye tamamladığı sorulduğunda ise;

T : Neden burada tam kareye alma ihtiyacı duydun?

ÖA1D: Çünkü x'i birinci dereceye düşürmemiz gerekiyor. Ya bunu tam kare yapacağız ya da x parantezine alacağız. x parantezine alırsak bu seferde burası ax olur, kurtulamayız. O yüzden tam kare aldım. Aklıma o geldi. Tam kareye tamamlamak için de b bölü 2a yı ekleyip çıkarttım.

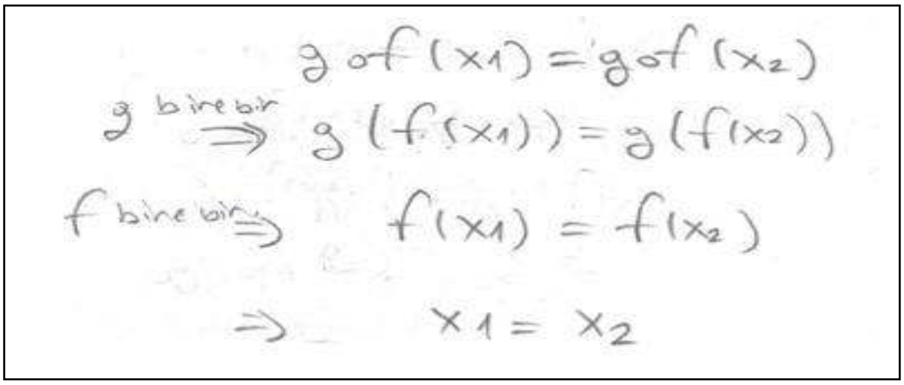
Şeklinde bir açıklama yapmıştır. Burada katılımcı tamkareye alarak x'in derecesini birinci dereceye düşürmüş ve oradan da x'i yalnız bırakarak denklemin köklerini bulmuştur. Dördüncü problemi çözme sürecinde katılımcı zihinsel operasyonları yardımı ile analitik şemalardan dönüştürülebilen kanıt şemalarını kullanmış ve çözümünü de aşağıdaki biçimde yapmıştır.



Şekil 74. ÖA1D'nin klinik görüşmede dördüncü probleme ait çözümü

ÖA1D görüşmede dördüncü problemi çözerken verilen denklemi önce a parantezine almış ve ardından da tam kareye tamamlamak için eşitliğe $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ hem eklemiş ve hem de çıkartmıştır (bkz. Şelik 74.). Bunun sonucunda da problemde verilen kök ifadelerine ulaşmış ve köklerin denkleme ait olduğunu belirtmiştir. Katılımcının yazılı sınav ile görüşmede yaptığı çözümler ise birbirinin aynısıdır. Katılımcı dördüncü problemde analitik şemaları kullanan tek katılımcıdır ve bu süreçte dönüştürülebilen şemaları kullanmıştır.

Analitik şemalardan dönüştürülebilen şemaların yanı sıra aksiyomatik kanıt şemaları da kullanılmıştır. Bunlardan ikinci sınıfa devam etmekte olan ÖA2C yazılı sınavda ve görüşmede problemleri çözerken ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmıştır. Katılımcı ikinci problemi de hem yazılı sınavda ve hem de klinik görüşmede analitik şemalar ile çözmüştür. Katılımcının yazılı sınava ait çözümü aşağıda görülmektedir.

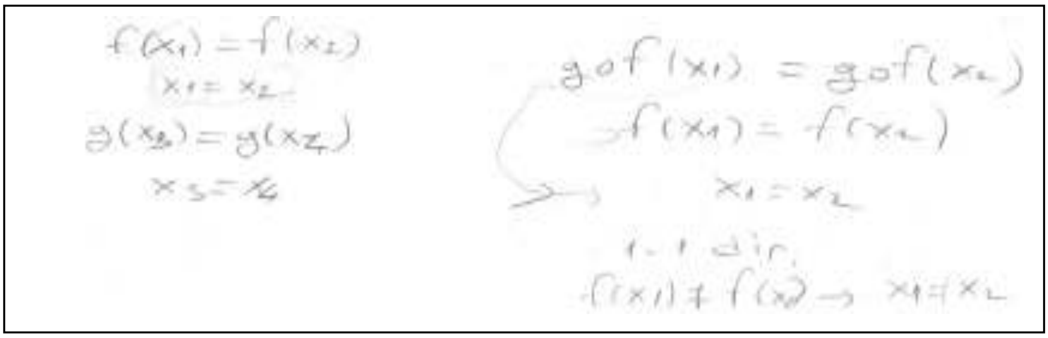



Şekil 75. ÖA2C'nin yazılı sınavda ikinci probleme ait çözümü

Katılımcı yazılı sınavda ikinci problemi Şekil 75'deki gibi çözmüştür. Problemi çözerken ise birebirlik tanımını kullanmıştır. Klinik görüşmede ise bunu;

> "(Sessizlik) Birebirlik tanımı, hatırlamaya çalışıyorum. $f(x_1)$ eşittir, f birebirse mesela $f(x_2)$ ise bu eşit bu ise birebirdir. Birebir olduğunu gösteriniz. g de birebirse, g için aldığımız x'de $g(x_3)$ eşittir $g(x_4)$ için $x_3$ eşittir $x_4$ çıkıyosa g'de birebirdir. O zaman g bileşke f'i yazarsam gof içinde $x_1$ diyelim, gof içinde $x_2$ diyelim. g birebir olduğuna göre $f(x_1)$ eşittir $f(x_2)$ olmalı. f'de birebirdi. O halde $x_1$ eşittir $x_2$, buradan da bileşkesi birebirdir."

Şeklinde birebirliğin tanımını kullanarak g bileşke f fonksiyonunun birebirliğini analitik şemalardan aksiyomatik kanıt şeması ile açıklamış ve çözümünü aşağıdaki biçimde yapmıştır.




Şekil 76. ÖA2C'nin klinik görüşmede ikinci probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA2C ikinci problemi çözerken (bkz. Şekil 76.) önce birebir fonksiyonun tanımını matematiksel olarak vermiştir. Bunun ardından ise verdiği bu tanımı g bileşke f fonksiyonunun birebirliğine transfer ederek matematiksel olarak göstermiş ve bu süreçte analitik şemaları kullanmıştır. Katılımcının yazılı sınavdaki çözümü ile görüşmedeki çözümü aynıdır.

ÖA2C gibi ÖA4C'de ikinci problemde hem yazılı sınavda ve hem de görüşmede analitik şemaları kullanan katılımcılardandır. Katılımcı yazılı sınavda da problemleri çözerken ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmıştır. İkinci problemde g bileşke f'nin birebirliğini gösterirken görüşmede açıklamasını aşağıdaki gibi yapmıştır.

ÖA4C: Şimdi birebirlikte tanıma bakmam lazım. Şimdi birebirliğin, fonksiyonun birebir olduğunu gösterin demiş. f(a) B'ye gitmiş, f(b) de C'ye gitmiş. Şimdi birebirlikten de hocam tanım gereği ne olması lazım. Her eleman birebir örtüşmeli yani onu nasıl şey yapalım. Şimdi burada şunu şey yapalım. g bileşke f(m) diyelim. Şimdi aklıma ilk bu geldi. İşleme buradan devam edelim.

T : Amacın ne şimdi, neyi göstermeye çalışıyorsun?

ÖA4C: Şimdi burada da amacım hani g bileşke f fonksiyonu birebir ise her elamanın görüntüsü farklı olacak. Şimdi iki tane aynı eleman aldım.

T : Hıhı.

ÖA4C: İki tane farklı eleman aldım. Bunlar eşit dedim. Eğer bu farklı elemanlar görüntüleri de ne olması lazım aynı olursa demek ki birebirdir.

T : Birebirdir.

ÖA4C: Birebirdir. Bu sonuca ulaşacağım. Şimdi f fonksiyonu birebir dedik. f fonksiyonu birebir dedik. g fonksiyonunun da birebir olduğunu söyledik. O zaman burada f ve m nedir? Şimdi g fonksiyonu burada birebirse f ve m'in ne olması lazım? Şimdi birbirine eşit olması lazım. Şimdi şöyle yapalım hocam şimdi bileşkede iki tane eleman aldım değil mi?

T : Evet.

ÖA4C: Burada açılımı yaptığım zaman burası bir g fonksiyonu değil mi?

T : Evet.

ÖA4C: Dolayısıyla burada a, a üssü ile başlayalım. Şimdi burada mesela a ne olsun?

T : İkisi de mi a üssü?

ÖA4C: Yok biri a üssü.

T : Tamam devam et.

ÖA4C: Biri a, diğeri a üssü, a, a üssü. Şimdi bu ifade hocam B kümesinde tanımlı ya.

T : Evet.

ÖA4C: Dolayısıyla yani f(a)'nın değer kümesi burada tanım kümesi olmuş oluyor. Yani dolayısıyla g içinde bir eleman olmuş oluyor. Şunlar g içinde bir eleman çünkü g, B'den C'ye, f de A'dan B'ye tanımlanıyo. Yani dolayısıyla g burada birebir ise eleman aldık ya bunlarında ne olması gerekir birbirine eşit olması gerekir.

T : Hıhı.

ÖA4C: Çünkü niye birebir olduğu için farklı eleman aldık ve hani o elemanlarla farklı olduğunu göstereceğiz ya, ya da aynı eleman aldık aldığımız iki eleman, fonksiyonlarda aldığımız iki eleman tanımına başlarken aldığımız iki elemanın işlem sonrası birbirine eşit olması gerekiyor. Yok şimdi şöyle yapalım, aldığımız farklı iki eleman x ve y'miz var diyelim.

T : Evet.

ÖA4C: Fonksiyonda yerine koyduğumuzda değil mi fonksiyonun görüntüsü olarak ne olması lazım, farklı olması lazım.

T : Evet.

ÖA4C: Eğer bunlarla burada eşitlikle başladıysak ikisinin görüntüsü de birbirine eşit olduğunu söylüyorsak en sonda birbirine eşit olması gerekiyor.

T : Ki birebir olsun.

ÖA4C: Birebir olsun.

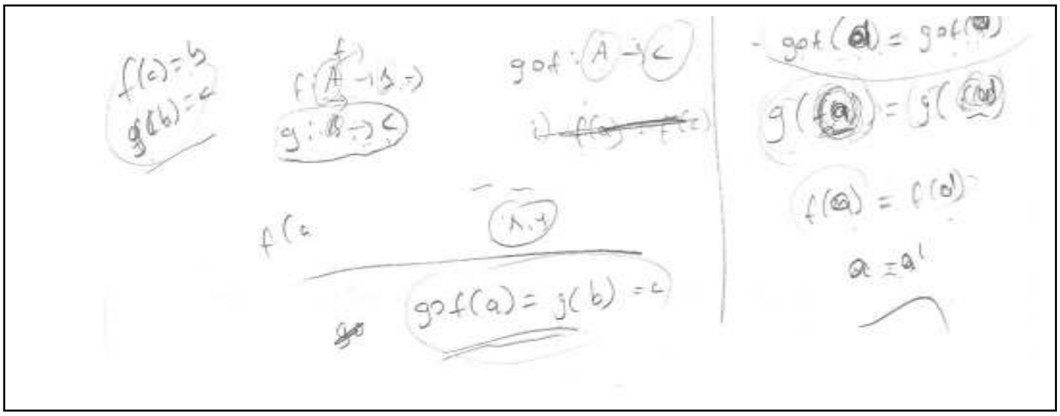
T : a elemanı ile a üssü elemanının görüntüsü aynı olduğu için a ve a üssü de birbirine eşittir.

ÖA4C: Evet onu demeye çalıştım. Şimdi burada işleme devam edersek burada f(a) ve f(a') birbirine eşittir diyebilirim ben. Bunu niye diyorum ben çünkü g de birebir örten olduğu için aldığım iki elemanın görüntüleri de eşitse aldığım bu iki elemanın da kendileri, birbirine eşit olması gerekir. Daha sonra aynı işlemi a ya uygularsam a'nın a üssüne eşit olması gerekir.

T : a, a üssüne eşit olduğundan da birebirdir.

ÖA4C: g bileşke f birebirdir diyorum.

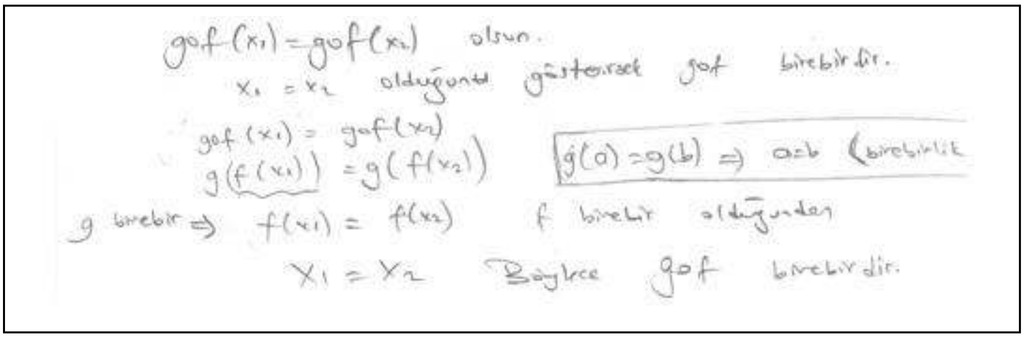
ÖA4C kodlu katılımcı ikinci problemde analitik kanıt şemalarından aksiyomatik şemaları kullanmıştır. Çünkü bu süreçte katılımcı birebirliğin tanımını doğru biçimde kullanarak bunu aynı zamanda g bileşke f fonksiyonuna transfer etmiş ve ikinci problemde kullanmıştır. Katılımcının çözümü ise aşağıda yer almaktadır.




Şekil 77. ÖA4C'nin klinik görüşmede ikinci probleme ait çözümü

ÖA4C ikinci problemi görüşmede çözerken Şekil 77'deki gibi çözmüştür. Katılımcı problemi çözerken birebirliğin tanımını verdikten sonra bu tanım ile g bileşke f fonksiyonunun birebirliğini matematiksel olarak göstermiştir.

ÖA3C 3. sınıfa devam etmekte olan ve yazılı sınavda ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanan bir katılımcıdır. Katılımcı ikinci problemin çözümünde de yazılı sınavda ve görüşmede analitik şemaları kullanmıştır. ÖA3C'nin yazılı sınavda yaptığı çözümü aşağıda yer almaktadır.




Şekil 78. ÖA3C'nin yazılı sınavda ikinci probleme ait çözümü

ÖA3C'nin Şekil 78'deki çözümüne bakıldığında birebirliğin tanımını doğru olarak verdiği ve bu tanımı da g bileşke f fonksiyonuna transfer ederek çözüme ulaştığı görülmektedir. Aşağıdaki diyalogda ise katılımcının görüşmede ikinci probleme yaptığı açıklama yer almaktadır.

ÖA3C: Fonksiyonları birebir ise. Bu çok kolaydı. Hatırladığım için şöyle yaptım.

T : Nereden hatırladığın için?

ÖA3C: Birinci sınıfta gördük heralde ya da lineer cebirde. Birde gördük doğru. Neyse şöle yaptım onu birebir olması için f(x) eşit f(y) olsun, x eşit y ise birebirdir. Öyle diyoduk, bunu kabul ediyoruz. Zaten o yüzden bende şöyle çözdüm. g bileşke f'in birebir olduğunu sorduğu için gof(x) eşit gof(y) olsun dedim.

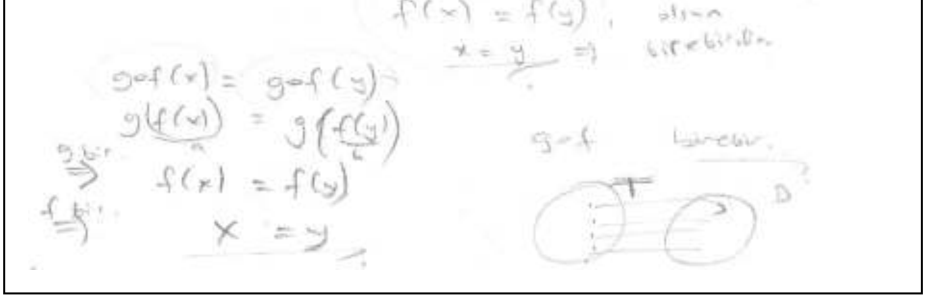
T : Sen bu tanımı mı hatırlıyorsun?

ÖA3C: Hıhı, evet. Lineer cebir, evet lineer cebirden. Sonra g(f(x)) eşit g(f(y)) dedim, şunu kullandım. f ve g fonksiyonları birebirmiş yani f(x) eşit f(y) olduğunda x y'ye eşitmiş. Yok ben yanlış hatırlamıyorum dimi doğru dimi bu?

T : Bilmiyorum.

ÖA3C: Az bir şey söyleyin ya… Doğru doğru doğrudur. Neyse f(x) eşittir, tamam tamam şey yapıyoruz. Burada f'nin birebirliğini kullanıyoruz buraya a dersem buraya b dersem g(a) eşit g(b) olduğundan a eşit b olduğundan dolayı f(x) eşit f(y) oluyor. Burada da bu g'nin birebirliği, bu f'nin birebirliği f'nin birebirliğini kullanıyorum, x eşit y diyorum. O zaman ne oldu gof(x) eşit gof(y) olduğunda x eşit y bulduğum için gof birebir oluyor.

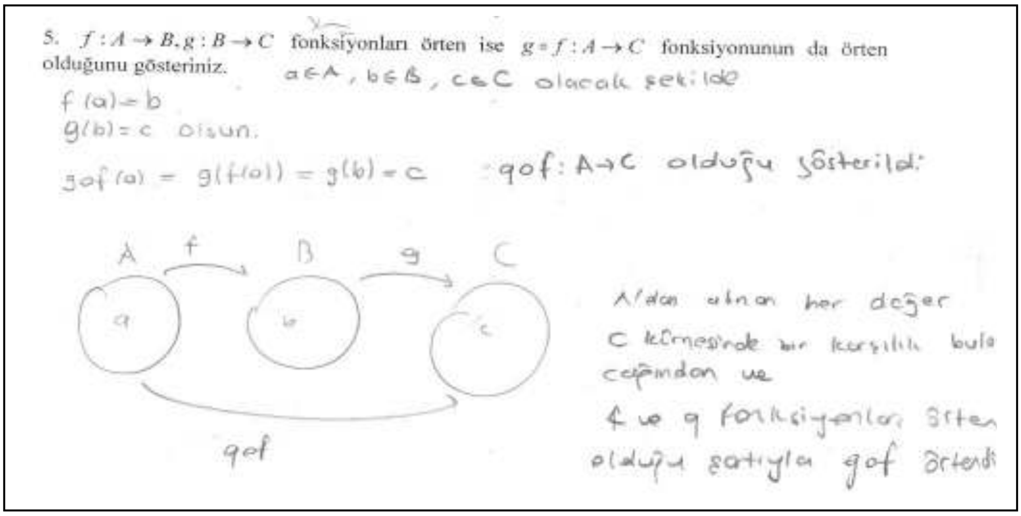
ÖA3C'nin ikinci problem için yaptığı açıklamaya bakıldığında öğretmen adayının analitik şemalardan aksiyomatik şemaları kullandığı görülmektedir. Çünkü katılımcı ikinci problemi çözerken birebirliğin matematiksel tanımını kullanarak savunmasını yapmıştır.




Şekil 79. ÖA3C'nin klinik görüşmede ikinci probleme ait çözümü

ÖA3C'nin Şekil 79'daki çözümüne bakıldığında katılımcının birebirlik tanımını g bileşke f fonksiyonuna aktararak istenen ifadenin birebirliğini formal olarak gösterdiği görülmektedir. Katılımcının görüşmedeki çözümü ise yazılı sınavdaki çözümü ile aynıdır.

Üçüncü sınıfa devam etmekte olan bir başka katılımcı olan ÖA3A yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanan katılımcılardandır. ÖA3A rahat ve kendinden emin bir tavır içinde görüşmeye gelmiştir. Bunun yanı sıra ÖA3A diğer katılımcıların aksine ilk görüşmede ilk beş problemi değil son beş problemi yapmak istemiştir. Bu nedenle de katılımcı 6. problemden başlayarak problemleri çözmüştür. Katılımcı ÖA3A beşinci problemi çözerken klinik görüşmede analitik şemaları ve yazılı sınavda da dışsal şemaları kullanmıştır. Katılımcı yazılı sınavda çözümünü Şekil 80'deki biçimde yaparken analitik şemaları kullanmış gibi görünmektedir. Çünkü çözüme bakıldığında katılımcı matematiksel olarak g bileşke f fonksiyonunun örtenliğini gösterdikten sonra açıklamasını da yazmıştır. Fakat katılımcı yazılı sınavda ikinci problem olan g bileşke f fonksiyonunun birebirliğini gösterirken de aynı çözümü yapmıştır. Bu da katılımcının birebirlik ve örtenlik kavramlarını birbirinden ayıramadığını göstermektedir.

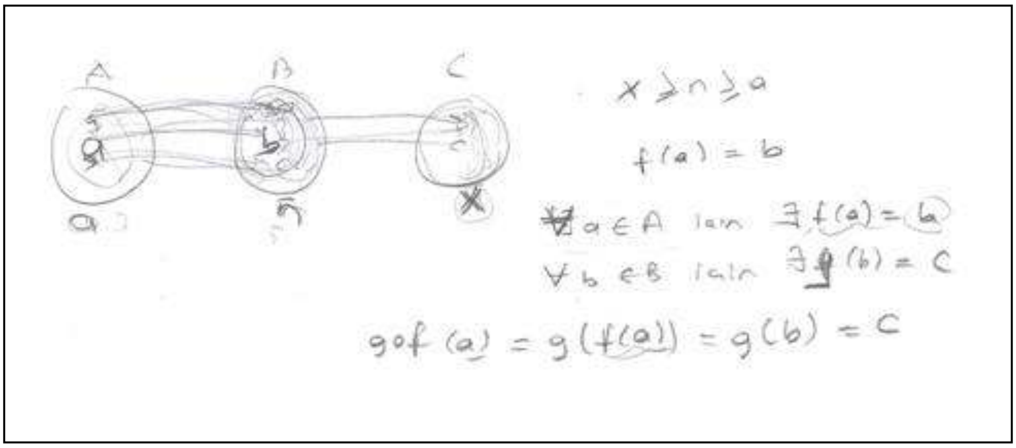



Şekil 80. ÖA3A'nın yazılı sınavda beşinci probleme ait çözümü

Katılımcının görüşmedeki açıklaması da;

"Evet. Bu şekilde olması lazım. Aynı şekilde şuradan a buradan b elemanı aldığımda her b eleman B içinde mesela c olması lazım. Şimdi bakıyorum bileşke fonksiyonumu A'dan aldım diyelim. Şöyle geldi, her a elemanı için düşünüyorum. En az karşılık gelen bir b değeri olduğu için herhangi bir değer karşılık gelmek zorunda olduğu için g(b) olacak. Bununla zaten şunu değiştiriyoruz g fonksiyonunu. Bununla c ye geldiği. Göstermiş olduk, o zaman örtendir."

Biçiminde olmuştur. Klinik görüşmede örtenliğin tanımını venn şeması ile açıklamış fakat g bileşke f fonksiyonunun örten olduğunu matematiksel olarak göstermiştir. ÖA3A'nın beşinci probleme ait çözümü Şekil 81'de görülmektedir.




Şekil 81. ÖA3A'nın klinik görüşmede beşinci probleme ait çözümü

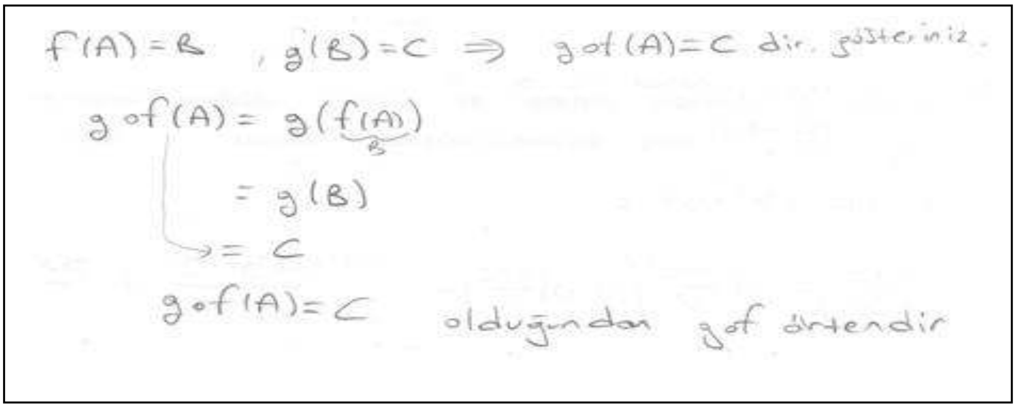
ÖA3A görüşmede beşinci problemi çözerken önce örtenliğin tanımını venn şeması yardımıyla açıklamıştır. Daha sonra da bu tanımı kullanarak problem ifadesinde sorulan g bileşke f fonksiyonunun örten olduğunu göstermiş ve açıklamasını yapmıştır.

Katılımcılardan birinci sınıfa devam etmekte olan ÖA1C yazılı sınavda ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanan katılımcılardandır. ÖA1C beşinci problemi çözerken hem klinik görüşmede ve hem de yazılı sınavda analitik şemaları kullanmıştır. Görüşmede ise açıklamasını;

> "Örten olduğundan neye göre bağdaştırmıştım? Onu çözemedim. f(A) örten, A örten, f fonksiyonu örtense f(A) eşittir B dediğim zaman. Örtenlikte f(A) eşittir B denir. Mesela görüntü kümesi değer kümesine eşitse örtendir. Şimdi buradan görüntü kümemiz f(A) değere eşit, B'ye eşit örten dediği için. Burada ikinci durumu da g'de görüntü kümemiz fonksiyonda C'ye eşit olmak zorunda. Şimdi bu fonksiyona gelelim. Bu fonksiyonda da g'de f fonksiyonu g'de f(A) fonksiyonu eğer C'ye eşitse diyecez örtendir. Hah şimdi oldu. f(A)'yı da bulduk B diye. g(B) biliyoruz C olduğunu. Şimdi buradan biz görüntünün değer kümesine eşit olduğunu gösterdiğimiz için örten diyoruz."

Şeklinde yaparak analitik kanıt şemalarından aksiyomatik şemaları kullanmıştır. Öğretmen adayı burada zihinsel operasyonlar ile örtenliğin tanımına ulaşarak bu tanım ile g bileşke f fonksiyonunun örten olduğunu açıklamıştır. Bunun yanı sıra katılımcı örtenliğin tanımını g bileşke f fonksiyonuna da transfer etmeyi başarmıştır.

ÖA1C ile benzer biçimde ÖA2C'de hem yazılı sınavda ve hem de görüşmede beşinci problemi analitik şemaları kullanarak çözmüştür. Katılımcının yazılı sınavda yaptığı çözüm aşağıda yer almaktadır.

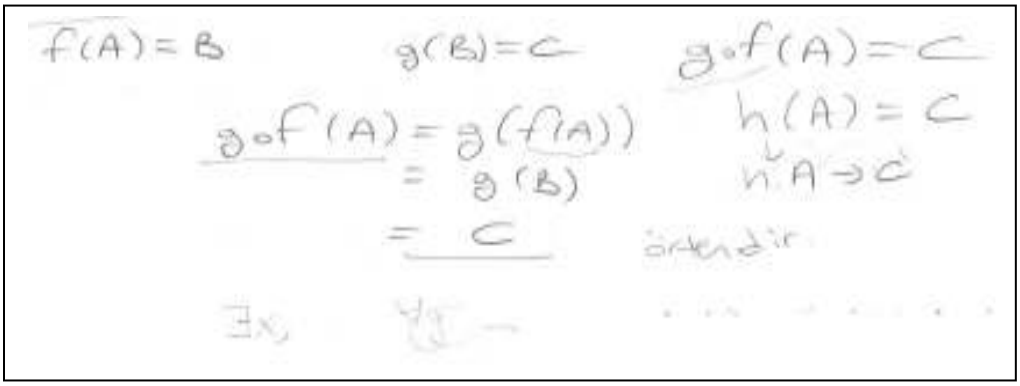



Şekil 82. ÖA2C'nin yazılı sınavda beşinci probleme ait çözümü

ÖA2C yazılı sınavda beşinci problemi çözerken örtenliğin tanımını kullanarak g bileşke f fonksiyonunun örtenliğini matematiksel olarak göstermiştir (bkz. Şekil 82.). Klinik görüşmede de açıklamasını aşağıdaki gibi yapmıştır.

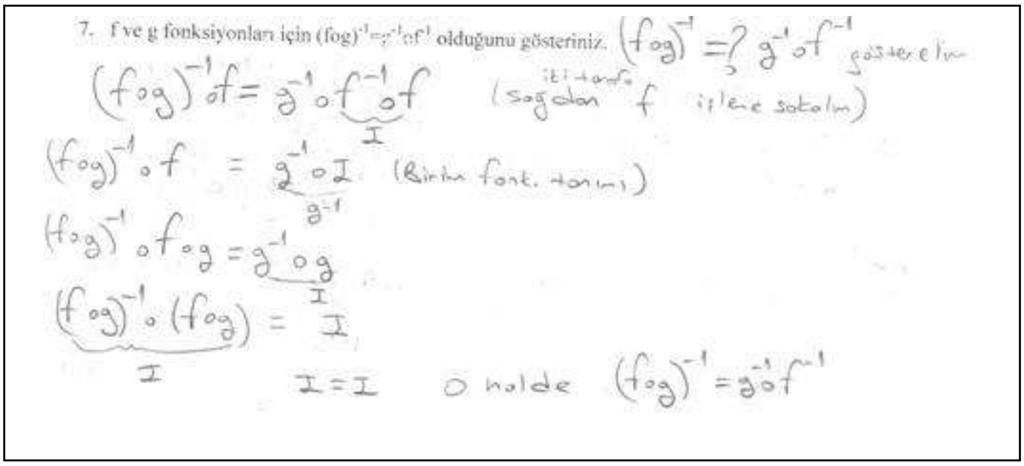
> "Örten ise A'dan C'ye fonksiyonunun da örten olduğunu gösteriniz. Örtenlikte f yerine bir değer koyduğumuzda, mesela f A'dan B'ye olduğuna göre f(A)'nın B'ye eşit olduğunu anlıyorum ben örtenlikten. g örtense de g(B)'nin de C'ye eşit olduğunu düşünüyorum. A'dan C'ye fonksiyonunun da örten olduğunu gösteriniz demiş. O halde göstermem gereken gof(A)'nın C'ye eşit olduğu. Ordan ben gof(A)'yı yazarsam, g'nin içinde f(A). f(A) B idi. O halde cevap şeydir, yani gof(A) C'ye eşittir, örtendir."

ÖA2C matematiksel dili kullanarak beşinci problemdeki g bileşke f fonksiyonun örten olduğunu göstererek analitik şemalardan aksiyomatik şemaları kullanmıştır. Çözümünü ise Şekil 83'deki gibi yapmıştır.




Şekil 83. ÖA2C'nin klinik görüşmede beşinci probleme ait çözümü

ÖA2C görüşmede beşinci problemi çözerken örtenliğin tanımı kullanmıştır (bkz. Şekil 83.). Daha sonra ise örtenliğin tanımını g bileşke f fonksiyonuna transfer ederek örten olduğunu yazılı sınavdaki gibi matematiksel olarak göstermiştir. ÖA2C ikinci sınıfa devam etmekte olan ve yazılı sınavda da ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanan katılımcılardandır. Katılımcı yedinci problemi çözerken de hem yazılı sınavda ve hem de görüşmede analitik şemaları kullanmıştır. ÖA2C yazılı sınavda yedinci problemi aşağıdaki biçimde çözmüştür.




Şekil 84. ÖA2C’nin yazılı sınavda yedinci probleme ait çözümü

ÖA2C yazılı sınavda yedinci problemi çözerken eşitliğin her iki tarafına da önce f ve sonra da g fonksiyonu ekleyerek çözümünü yapmıştır (bkz. Şekil 84.). Katılımcı ile görüşmede aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir. Savunmasını ise;

ÖA2C: (mırıldanarak problemi okuyor, sessizlik) Şimdi bileşke, bir taraftan f’i soksam bu tarafta bilinmeyen oluyo. (sessizce işlem yapıyor) Şimdi f’i bir taraftan işleme soksam (mırıldanarak işlem yapıyor), sağ taraftan yapabilir miyim? Sağdan yapıyoduk sanırım.

T : Neyi sağdan yapıyorduk?

ÖA2C: Bileşke alırken hani her iki tarafa f alabilir miyiz diye bakıyorum da? Sağdan mı soldan mı onu tam olarak hatırlayamıyorum? Sağdan almak lazım. (sessizce işlem yapıyor)

T : Her zaman bunlar birbirine eşit mi?

ÖA2C: (sessizlik) f bileşke g, g bileşke f’e eşit değildir her zaman.

T : Tamam eşit değildir ama senin az önce yapmaya çalıştığın şey yanlış anlamadıysam f bileşke g fonksiyonun tersinin sağ tarafına f fonksiyonu eklemeye çalıştın, değil mi?

ÖA2C: Evet.

T : Orada f fonksiyonunu eşitliğin bu tarafında sağa ekleyince diğer tarafta da sağa eklemiyor musun?

ÖA2C: Hıhı.

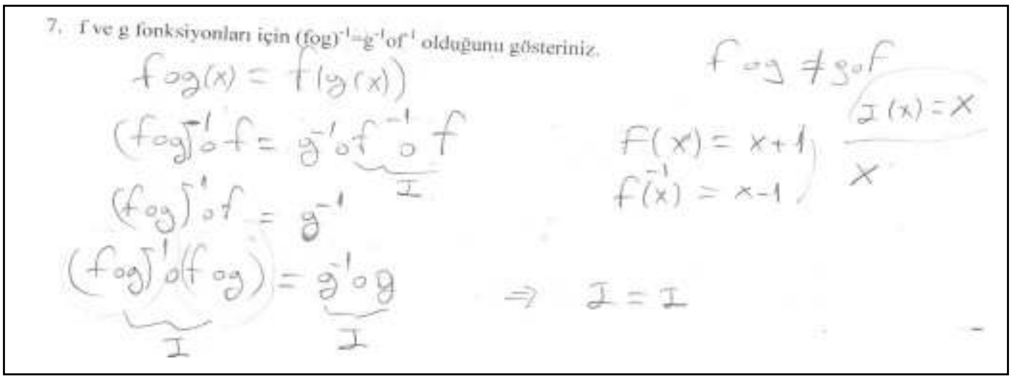
T : O zaman bu değişir mi acaba? Her iki tarafı da aynı işleme tabi tuttuğunda…

ÖA2C: Şöyle bir şey yaparsam hani iki tarafa da eklersem bileşke f etkilemez tabi. Ama diğer hani nasıl diyeyim şöyle yaptığımı düşününce. Ama buradan birim fonksiyon gelince etkilemiyor diye düşünüyorum. Birim fonksiyon o zaman burası tersi g bileşke f, g üzeri eksi 1. birim fonksiyon olduğu için f’i kullanıcaz. Her iki tarafa g yi eklesem. Burası g’nin tersi bileşke g. Burası da birim fonksiyon oldu. Yine f bileşke g'nin tersi ve f bileşke g'nin tersinde bileşkesi de birim fonksiyon. Eşitlik doğru olduğuna göre bu eşitlik de doğrudur.

T : Evet burada I eşittir I çıkması eşitliğin doğru olduğunu mu gösterir?

ÖA2C: Hıhı.

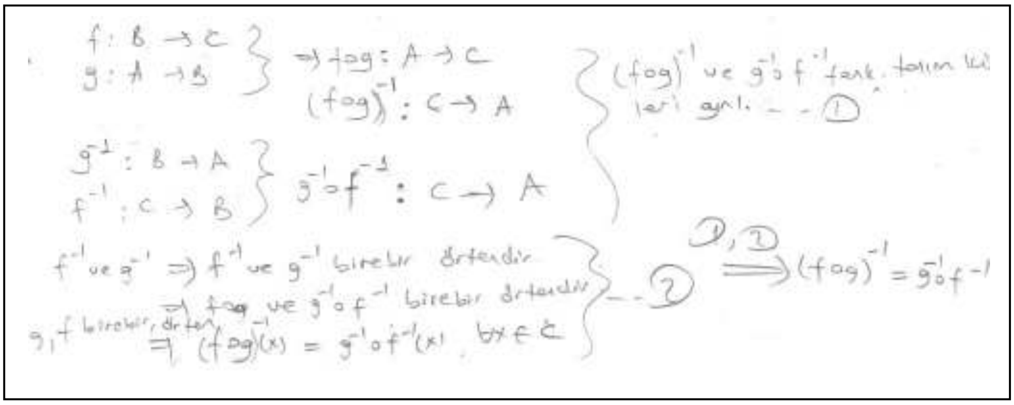
Şeklinde yapmıştır. Katılımcı yedinci problemi görüşmede çözerken eşitliğin her iki tarafına önce f ve sonra da g fonksiyonu ekleyerek işlemlerini yapmıştır. Bunların sonucunda eşitliğin her iki tarafında da birim fonksiyonu elde edince verilen ifadenin doğru olduğunu yani eşit olduğunu dile getirmiştir. Bu da katılımcının analitik şemalardan aksiyomatik şemayı kullandığını göstermektedir. Katılımcı çözümünü ise aşağıdaki gibi yapmıştır.




Şekil 85. ÖA2C'nin klinik görüşmede yedinci probleme ait çözümü

ÖA2C'nin Şekil 85'de yaptığı çözüme bakıldığında katılımcının eşitliğin her iki tarafına önce f fonksiyonunu ve sonra da g fonksiyonunu eklediği görülmektedir. Bunun sonucunda da yazılı sınavdaki gibi I=I bulunca verilen ifadenin doğru olduğunu belirtmiştir.

ÖA4A kodlu katılımcı dördüncü sınıfa devam etmekte olan bir öğretmen adayıdır. Katılımcı yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanmıştır. ÖA4A yazılı sınavda da yedinci problemi çözerken dışsal şemaları kullanmasına rağmen görüşmeler sırasında analitik şemaları kullanmıştır.




Şekil 86. ÖA4A'nın yazılı sınavda yedinci probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA4A yazılı sınavda yedinci problemde eşitliğin doğruluğunu savunurken $(fog)^{-1}$ ile $g^{-1}of^{-1}$ ifadelerinin tanım kümelerinin aynı olduğunu ve bu nedenle de ifadelerin birbirine eşit olduğunu belirtmiştir (bkz. Şekil 86.). Katılımcı görüşmedeki çözümünü ise aşağıdaki biçimde açıklamıştır.

ÖA4A: Şimdi fonksiyon olduğuna göre f A'dan B'ye olsun. g'de, g'nin sonucu f'in olduğuna göre C'den A'ya olacak. Böyle olsun.

T : Anlamadım. f, A'dan B'ye g ise…

ÖA4A: C'den A'ya. Çünkü g'nin sonucu A'nın tanım kümesini oluşturduğu için A'dan olsun dedik. Şimdi bunun bileşkesini aldığımız zaman bu fonksiyonumuz, g bileşke f fonksiyonumuz C'den D'ye olur. Şunlara baktığımız zaman g'nin tersi fonksiyonumuz A'dan C'y e olur. f'in tersi fonksiyonumuzda D'den A'ya olur. g'nin tersi bileşke f'in tersi de ilk önce f den belirlediğimiz B, B'den C'ye olur. Bir dakika f bileşke g, şunu ters yazdık.

T : f bileşke g, C'den ayrı değil. Nereden geliyor bu?

ÖA4A: Bir dakika g, g için C'den verdik. C'yi mi yanlış yazdım ben? C'den A'ya verdim. A'dan B'ye verdim. g o zaman C'den B'ye olur. g'nin tersi A'dan C'ye, f'in tersi B'den A'ya. İlk önce g'nin tersi B'den C'ye, B'den A'ya, g A'dan C'ye bunun tersini alıyoruz. g bileşke f'in tersi B'den C'ye. İkisinin de tanım ve değer kümeleri eşit oluyor. İki tane koşulumuz vardı. Biri tanım ve değer kümeleri eşit olması gerekiyordu. Birinci koşulumuz bu eşitliği yazabilmek için. İkinci koşulumuz da bu iki fonksiyona da aynı değeri verdiğimiz zaman aynı eşitliği bulmamız gerekiyordu.

T : Bir şey sorabilir miyim? Neden tanım ve değer kümelerinin eşit olması gerekiyor bu eşitliğin sağlanması için?

ÖA4A: Öyle bir şey hatırlıyorum soyut matematik dersinden. Tanım ve değer kümelerinin eşit olması lazım. Birde bu f bileşke g'nin tersine, örneğin x değeri verdiğimiz zaman f(x) eleman f bileşke g'nin tersi x eşit olmalı. Eşit mi diye bakmamız lazım. g'nin tersi f bileşke g'nin tersi x.

T : Sen şimdi ilk olarak tanım ve değer kümelerinin eşit…

ÖA4A: Eşit olduğuna gösterdim.

T : Şimdide eşit olup olmadığına bakacaksın.

Katılımcı yedinci problemi yaparken önce ifadede yer alan $(fog)^{-1}$ ile $g^{-1}of^{-1}$'in tanım ve değer kümelerinin eşit olması gerektiğini dile getirmiş ve bunların eşitliğini göstermiştir. Bunun ardından ise problemde verilen ifadenin eşitliğini;

ÖA4A: Eşit olup olmadığına bakacağım. Bunu nasıl yapacağım bilmiyorum. Bu ikisini de ayrı ayrı fonksiyon tanımlayıp baksam olmaz mı? Her fonksiyonda sağlanır mı?

T : Fonksiyon tanımlayıp derken?

ÖA4A: Yani mesela f'i ayrı g'yi ayrı tanımlayıp sonra bileşke yerinin aynı olup olmadığına baksam. Şu $(fog)^{-1}(x)$ eşittir y olsun. (fog)(y) eşittir x olur. O zaman bu iki tarafın tersini aldığımız zaman x olur. Şu iki tarafın $f^{-1}$'ini aldığımız zaman $f^{-1}$ bileşke fog(y) eşittir $f^{-1}(x)$ şunlar birbirlerini götürür. g(y) eşit $f^{-1}(x)$ olur.

T : Burada şimdi ne yaptın?

ÖA4A: Her iki tarafın $f^{-1}$'ini aldım ama doğru yapıp yapmadığımı bilmiyorum.

T : Sonra her tarafa $f^{-1}$.

ÖA4A: Bunun olup olmadığını bakmaya çalışıyorum. Buna y dedim bu eksi 1'i yok ettim yani. Şunun tersini aldım. Şu ikisi yer değiştiriyordu ya eksi olduğu zaman. f, (fog)(y) oldu. Her iki tarafın tersini aldım, fonksiyon içine aldım. Şunlar birbirini götürdü. g(x), g(y) eşit f(x)'in tersi oldu. Sonra şunun da $g^{-1}$'ini aldığımda $g^{-1}$ ile işleme soktuğumuzda $g^{-1}$=g(y)=$g^{-1}of^{-1}(x)$ olur. Şunlar şunu götürür. y=$f^{-1}(x)$, yani şu ulaştık buna. Yani bu eşitlik olabilir.

T : Yani eşitlik doğrudur diyorsun.

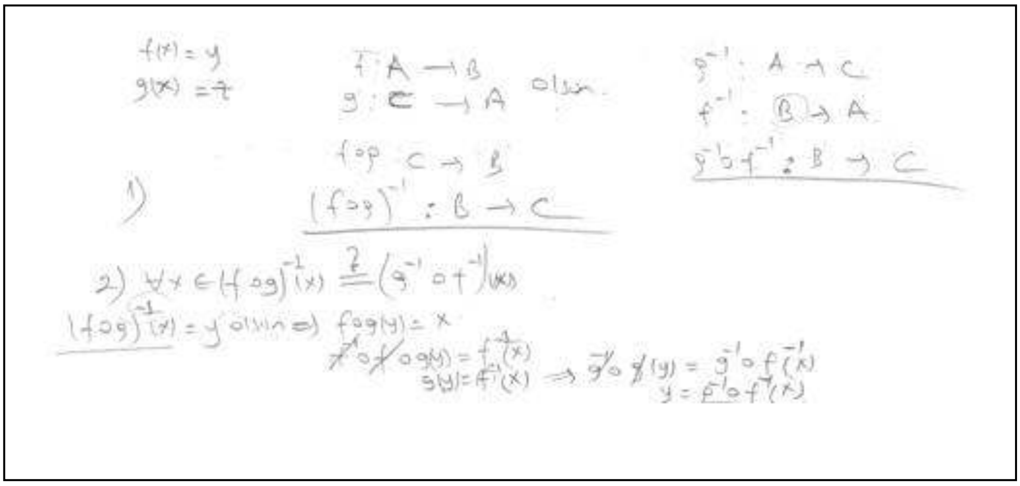
ÖA4A: Evet. Doğrudur.

T : f bileşke g'in tersini y ($(fog)^{-1}(x)=y$) olarak…

ÖA4A: İşlemlerini yaptım.

T : Sonra da g'nin tersi işlem f'in tersini y olarak buldun eşitlik doğrudur dedin tamam. Diğer probleme geçelim.

Şeklinde açıklamıştır. Bunu yaparken de bir fonksiyonun tersini bulma kuralını kullanmıştır. Yani katılımcı $(fog)^{-1}$'nin y'ye eşit olduğunu kabul ederek tersini almış ve fog(y)=x yazmış ve bunun ardından da her iki tarafa f'in tersini ekleyerek işlemlerini devam ettirmiştir. Bu da katılımcının analitik şemalardan aksiyomatik şemayı kullandığını göstermektedir. Katılımcının çözümüne ise aşağıda yer verilmiştir.




Şekil 87. ÖA4A'nın klinik görüşmede yedinci probleme ait çözümü

Şekil 87'de ÖA4A'nın görüşmede yedinci problemi nasıl çözdüğü görülmektedir. Katılımcı çözümünü yaparken önce $(fog)^{-1}$ ile $g^{-1}of^{-1}$'in tanım ve görüntü kümelerinin eşit olduğunu göstermiştir. Bunun ardından da eşitliğin doğruluğunu tersini alma kuralı ve her iki tarafa ekleme yaparak göstermiştir. Oysa ki yazılı sınavda eşitliğin doğruluğunu sadece $(fog)^{-1}$ ile $g^{-1}of^{-1}$'in tanım kümelerinin eşit olmasına bağlamıştır.

ÖA3C yazılı sınavda ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanan ve üçüncü sınıfa devam etmekte olan bir katılımcıdır. Katılımcı yedinci problemi yazılı sınavda boş bırakmış fakat görüşmede analitik şemalar ile çözmüştür. Katılımcı görüşmede önce bir yoldan yedinci problemi çözmeyi denemiş ve sonuçlandıramamıştır. Bunun ardından problemde verilen ifadenin doğru olduğunu varsayarak işlemlerini yapmış ve problemi aşağıdaki gibi sonuçlandırmıştır.

ÖA3C: Yani nasıl yapacağız? Dur bakalım. f bileşke g, f bileşke g'nin tersi eşittir mesela k olsun. Burada şey oluyor f bileşke g(k) eşittir x (fog(k)=x). f(g(k)) eşittir x oluyor. Ben buradan yapmıştım da çıkmamıştı. Bu olur mu acaba bilmiyorum ki. Sonra bir de g'nin tersi bileşke f'in tersi ($g^{-1}of^{-1}$) ooo… g'nin tersi bileşke f'in tersinde x ($g^{-1}o\ f^{-1}(x)$) nedir? g'nin tersini f'in tersine buluyorum. f'in tersine ne desem? a desem. Bir sürü bilinmeyen çıkıyor. f'in tersinde x eşittir a ($(f(x)^{-1}=a)$) dersem f(a) eşittir x'dir. f'in tersi x, a dersem ben buna g'nin tersi a'da (sessizlik) burdan çıkmıyo.

T : Başka şekilde gösteremez misin bunu?

ÖA3C: Bu yoldan olmadı. Başkada, başka bakalım. Bunun doğru olduğunu varsayalım (işlem yapıyor). Varsayalım ki doğru olsun. Zaten şöyle olsun şu şöyle ise f(k), f bileşke g(k)'da x'e eşittir.

T : Evet.

ÖA3C: O zaman eğer bu doğruysa, zaten bu doğru olsun dedik. O zaman f bileşke g bileşke f'in tersi eşit g olur. bu ne ya? Buna ne desem, x'e eşit olsun. Vay bu ne ya! Aaa dur dur birim fonksiyon, bu birim fonksiyon tabi. Ama bu içindeki buraya geçmesi lazım. İçindekini buraya nasıl geçireceğiz? Tüh ya! Aa bu ters fonksiyonmuş, yanlış yapmışım. Hayır ya!

T : Şimdi ne yapmayı düşünüyorsun?

ÖA3C: Kafamı bi toparlıyım. Şimdi bak. Bunu aldım. Bu nasıl bir x, burada bir şey yok. Burada bir şey olmadıktan sonra nolcak? Tamam, nasıl yapalım o zaman? Bunu yapalım. Şu ifade içeri aldığımda bu birim fonksiyona eşit yaaa!

T : Neden birim fonksiyona eşit?

ÖA3C: Çünkü bunun için. Bunun şöyle göstereyim (yazıyor) yazabilirim.

T: Tamam.

ÖA3C: Bu tarafa ne gelcek? Bu da birim fonksiyona…

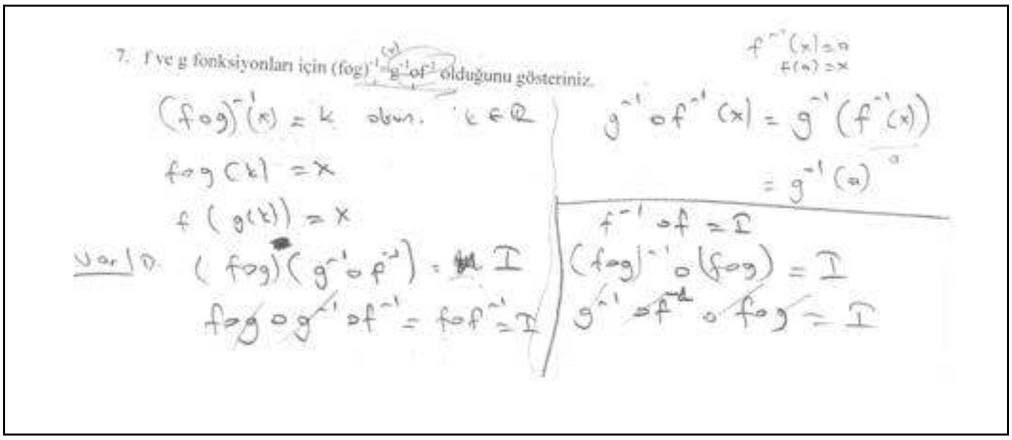
T : Birim fonksiyona eşit olması için ne lazım?

ÖA3C: Bu nedir? Eşit olduğunu mu gösteriyor? Doğruluğunu mu gösteriyor nedir ki?

T : Bunun doğru olduğunu niye göstersin birim fonksiyona eşit olması?

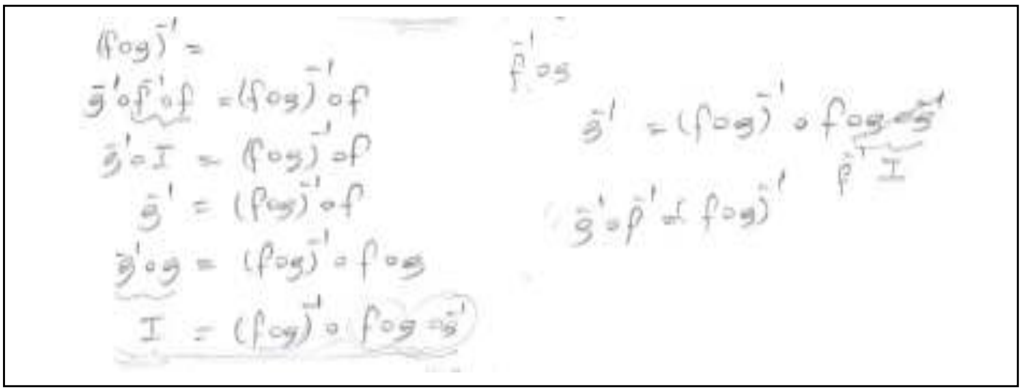
ÖA3C: (mırıldanıyor, sessizlik) Buna başka bir yol deniyim. Evet tabiî ki şimdi f'in tersi bileşke f nedir? I'dır. Bu I'yı kullanarak orayı I işte anladın mı? Şimdi şöyle yazalım şöyle diyeyim ben f'in tersi bileşke f I ($f^{-1}of=I$) dır ya eğer ki bunun f bileşke g'nin tersinin bu olduğunu söylüyorsa o zaman f bileşke g'nin tersi aynı şey. $(fog)^{-1}$'nin bileşke hayır f'in tersi bileşke f demem lazım ama. f bileşke g dersem birim fonksiyona eşit olur. Tamam, birim fonksiyona eşit olursa, bu birim fonksiyon doğru. Tamam bu sefer doğru, $f^{-1}of$ eşittir I olduğundan dolayı $(fog)^{-1}$ bileşke (fog)'de I'dır. Eğer bu doğruysa bunun tersi nedir şudur. g'nin tersi bileşke f'in tersidir, hani eğer doğru olduysa böyledir. O zaman bileşke diyorum tekrar f bileşke g açalım bileşkeyi bakalım I mı? Dimi eğer eşitse buna bu çıkması lazım. Bu nedir, zaten I çıktı. Demek ki eşit.

Katılımcı problemde verilen ifadenin doğru olduğunu varsayarak eşitliğin her iki tarafına f bileşke g ekleyerek işlemlerini gerçekleştirmiştir. Bunun sonucunda da problemi analitik şemalardan aksiyomatik ile savunarak çözümünü aşağıdaki gibi yapmıştır.




Şekil 88. ÖA3C'nin klinik görüşmede yedinci probleme ait çözümü

ÖA3C görüşmede yedinci problemi çözerken eşitliğin her iki tarafına f bileşke g fonksiyonu ekleyerek doğruluğunu savunmuştur (bkz. Şekil 88.). bunun sonucunda da I=I olduğunu ortaya koyarak ifadenin doğruluğunu göstermiştir. ÖA3C ile benzer biçimde ÖA4B'de görüşmede eşitliğin her iki tarafına önce f ve sonra da g fonksiyonu ekleyerek verilen ifadeyi doğrulamış ve bu süreçte de yazılı sınavda olduğu gibi analitik şemalardan aksiyomatik şemaları kullanmışdır. ÖA4B'nin çözümü Şekil 89'da görülmektedir.



Şekil 89. ÖA4B'nin klinik görüşmede yedinci probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA4B yedinci problemde verilen ifadenin eşitliğini göstermek için eşitliğin her iki tarafına önce f ve daha sonra da g fonksiyonu eklemiştir (bkz. Şekil 89.). Bunun sonucunda da problemde verilen ifadenin eşit olduğunu ortaya koymuştur.

Dördüncü sınıfa devam etmekte olan bir başka katılımcı da ÖA4A'dır. ÖA4A üçüncü problemi çözerken yazılı sınavda deneysel şemaları kullanırken görüşmede analitik şemalardan aksiyomatik şemayı kullanmıştır. Katılımcının yazılı sınavdaki çözümü aşağıda görülmektedir.

$F(x) = x^2$ olsun

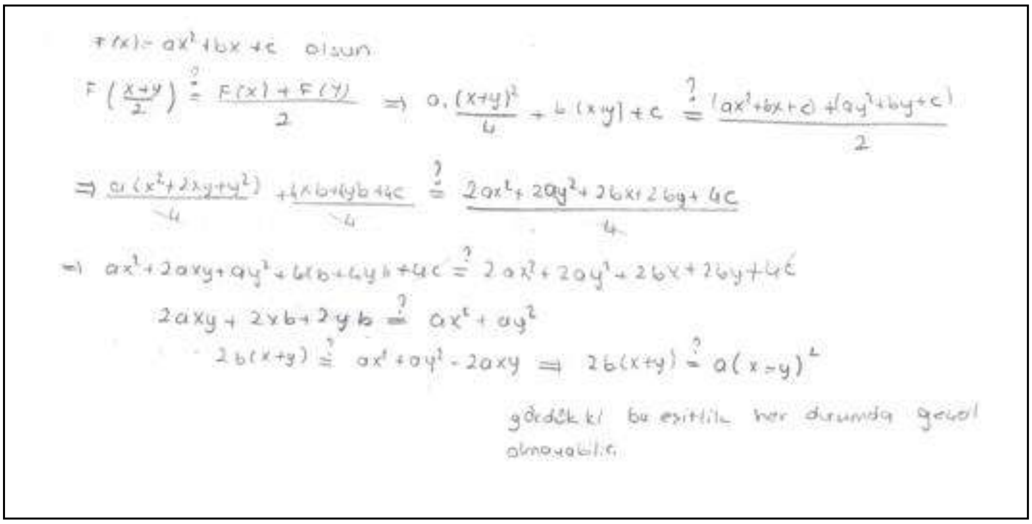
$$\frac{F(x)+F(y)}{2} = \frac{x^2+y^2}{2} \stackrel{?}{=} (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$$

Şekil 90. ÖA4A'nın yazılı sınavda üçüncü probleme ait çözümü

Katılımcı için yazılı sınavda üçüncü problemdeki ifadeyi doğrulama sürecinde bir örnek yeterli olmuştur (bkz. Şekil 90.). Fakat görüşmede analitik şemaları kullanarak çözdüğü üçüncü problem için;

> "2. dereceden herhangi bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Eşitliği doğru mudur, yanlış mıdır? Açıklayınız. Fonksiyonun ikinci dereceden olması yani şu en az bir tane x in kareli olması, y yerine x de olabilir. $ax^2$ artı bx artı c diyelim. x yerine x+y yazarsak bölü 2, karesi artı $b\left(\frac{x+y}{2}\right)+c$, bunu düzenlemeye çalışırsak, bi de şunu yazalım F(x) artı F(y)'yi. F $ax^2$ artı bx artı c artı $ay^2$ artı by artı c. Şunu $ax^2$ artı 2axy artı $ay^2$ bölü 2 artı (bx artı by) bölü 2 artı c. Şöyle düzenlediğimiz zaman $ax^2$ bölü 2 artı axy artı $ay^2$ bölü 2 artı (bx artı by) bölü 2 artı c. Yani karşılıklı düşündüğümüz zaman bu açılımın şuna eşit olması lazımdı. Hani biz bunu düzenlemeye gittiğimizde bu eşitliği vermiyor. Biz buna ulaşamayız. Sonuçta bu tarafı 2 ile çarpsak a nın önüne bu tarafta 2 gelir. Biz bunun düzenlemesini yapamayız. Düzenleme yapabilmemiz için şu $x^2$'lilerin önündekilerin eşit olması lazım. Hani şurada 2 tane c var ama şu ax artı c diğer c ye eşit mi onu bilmiyorum. Yani düzenleme yapamıyorum. O yüzden eşitliğe yanlıştır dedim."

Açıklamasını yukarıdaki gibi yapmıştır. Bu süreçte katılımcı analitik şemalardan aksiyomatik şemayı kullanmıştır. ÖA4A'ya ifadenin eşit olduğu bir durum var mı diye sorulduğunda ise "Eşit olduğu durum işte a'nın, b'nin ve c'nin değerlerine göre değişebilir." şeklinde olmuştur. Katılımcılardan ÖA3A ise üçüncü problemi çözerken yazılı sınavda ve görüşmede analitik şemaları kullanmıştır. Aşağıda katılımcının yazılı sınavda yaptığı çözüme yer verilmiştir.




Şekil 91. ÖA3A'nın yazılı sınavda üçüncü probleme ait çözümü

Şekil 91'de ÖA3A'nın yazılı sınavda üçüncü probleme ait çözümü görülmektedir. Katılımcı problemi çözerken F(x) fonksiyonunu ikinci dereceden fonksiyonların genel ifadesi olan $ax^2+bx+c$ olarak tanımlayarak bunu $F\left(\frac{x+y}{2}\right)$ ve $\frac{F(x)+F(y)}{2}$'de yerine yazarak işlemlerini yapmıştır. Bunun sonucunda da problemde verilen ifadenin her durumda geçerli olmadığını yazmıştır. Klinik görüşmede ise çözümünü yaparak açıklamasını da;

ÖA3A: (sessizce işlem yapıyor) F(x)'i ikinci dereceden yalnız bir fonksiyon olarak aldığımızdaydı ikinci dereceden. Sonra şu fonksiyonda x gördüğüm yere $\frac{x+y}{2}$ yazmayı denedim.

T : F(x)'de x gördüğün yere $\frac{x+y}{2}$ yazdın.

ÖA3A: (sessizce işlem yapıyor).

T : Şimdi F(x) ve F(y)'yi tanımladın.

ÖA3A: (işlem yapıyor) İlk önce eşitliğin şu tarafına (sessizlik).

T : $F\left(\frac{x+y}{2}\right)$'yi bulacaksın.

ÖA3A: Onu buldum şimdi eşitliğin sol tarafının da neye denk olduğunu (sessizce işlem yapıyor)? Şunu yanlış yapmadıysam şu anda her iki tarafın eşit olmadığını gösterdim sanırım. Şimdi şunu önce, sol tarafını şöyle yazdım. Bunu açarak şurası 4 olacak tabi ki. Çok güzel yanlış yaptım. Şurada karesini aldığım zaman (sessizlik). O zaman bunla bunu aldığımda şuradan bir şey fark etmeyecek. Yani şurada aslında açık olarak direk gördüğüm zaman.

T : Değişiyor mu?

ÖA3A: Burada 2 oluyor. Normalde yaptığım işlemde şurada karesinden 2 eksi y geliyor ya aslında bu oradaki denkliği bozan şey oluyo yani. Eşit olmadığını normalde mesela benim bu yöntemle, kullandığım eşitliklerin gösteriminde şu ifadeyi mesela ilk önce açıyorum. Sonra şuna göre toplamaya çalışıyorum ama burada biraz karışık olduğu için direk şu gösterime getirmek zor ve fazla bileşen geliyor yani.

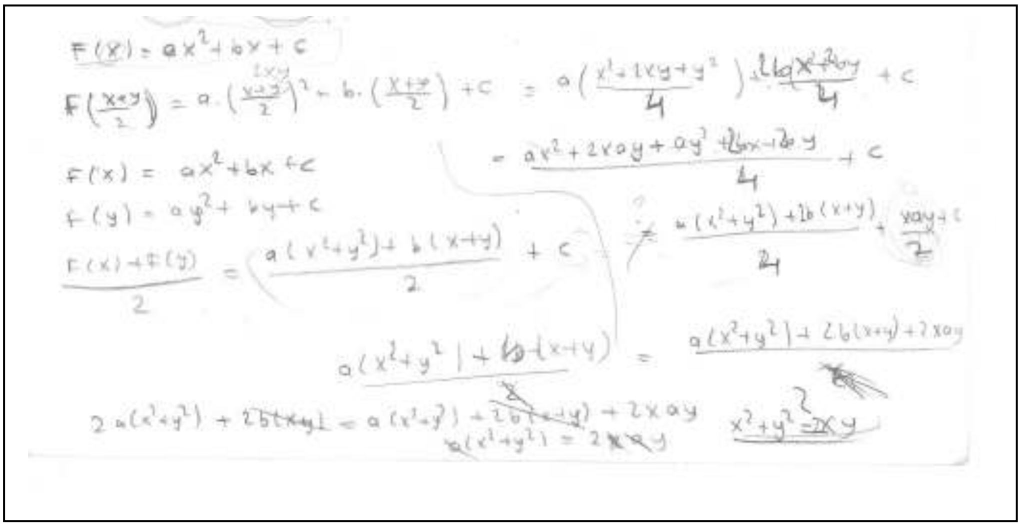
T : O yüzden de eşit değildir diyorsun.

ÖA3A: Yani her durumda eşit değil. Mesela şurayı sıfır yapacak değer olur, ona denk olduğu değer olur ama her zaman için kesindir diyemiyorum yani çünkü çok fazla çarpanı var bileşeni var.

Şeklinde yapmıştır. Katılımcı daha sonra bazı durumlarda ifadenin eşit olacağını dile getirmiş ve bunu da;

T : Söyleyebileceğin bir durum var mı hani şu durumda bu ifadeler birbirlerine eşittir diye?
ÖA3A: Şimdi burada şey var x, y'nin ve a'nın değerine göre sınanır ama a zaten sabit bir sayı. Tabi istenilirse eğer hangi durumlarda olduğunu bildiğimiz zaman belki olur ama soruda böyle bir şey sormuyor. Sadece doğru mudur yanlış mıdır? Bu durumlarda doğrudur diyebiliriz aslında. Bir daha kontrol edeyim de (sessizlik). Böyle bir şey yapmak doğru mu sizce? Bence doğru değil yani.
T : Nasıl bir şey yapmak?
ÖA3A: Bu duruma geldikten sonra bunların eşit olmadığını gördüm zaten. Şunun şuna eşit olmadığını gördüm ki y'ler birbirini götürdü diyelim. Şöyle bir şey var bunların eşit olduğunu görmek için birbirine eşitledim. a'ya ve b'ye göre bir değer bulmaya çalışırım o zaman. Dediniz ya hangi durumda. O zaman bunları birbirine eşitlerim şu kalan sabit kümenin değerini bularak ancak böyle bir şey bulabilirim. O zaman direk şöyle (sessizce işlem yapıyor). Kalanları sadeleştiririm, $x^2$ artı $y^2$ mesela x, y ye eşit olduğu durumlarda bu eşitlik geçerlidir diyebilirim mesela.

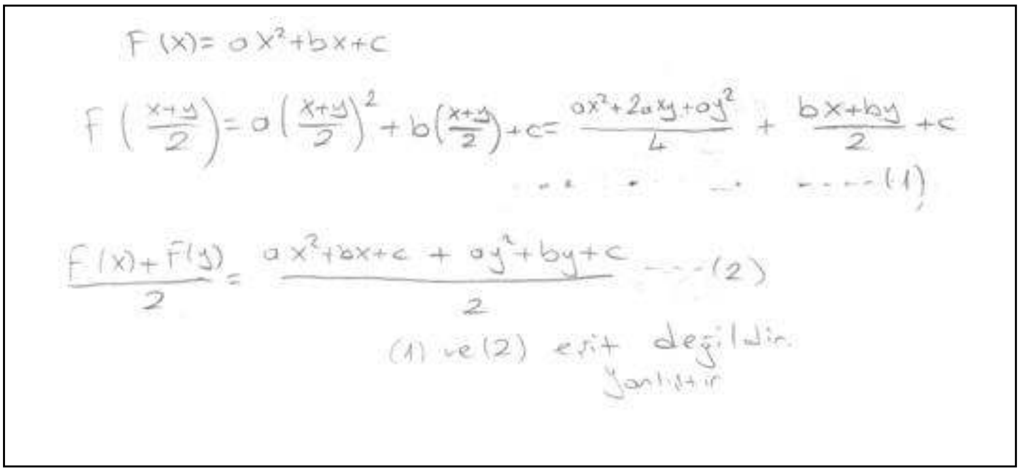
Biçiminde ifade ederek açıklamış ve çözümünü de aşağıdaki şekilde yapmıştır.



Şekil 92. ÖA3A'nın klinik görüşmede üçüncü probleme ait çözümü

Şekil 92'de ÖA3A'nın üçüncü problemi görüşmede nasıl çözdüğü görülmektedir. Katılımcı problemi çözerken F(x) fonksiyonunu ikinci dereceden fonksiyonların genel ifadesi olan $ax^2+bx+c$ olarak tanımlayarak bunu önce $F\left(\frac{x+y}{2}\right)$'de ve daha sonra da $\frac{F(x)+F(y)}{2}$'de yerine yazarak işlemlerini yapmıştır. Bunun sonucunda da problemde verilen ifadenin eşit olmadığını yazılı sınavda olduğu gibi belirtmiştir.

Yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanan ÖA2C'de klinik görüşme ve yazılı sınav sırasında üçüncü problemde analitik şemaları kullanmıştır. Katılımcının yazılı sınavda yaptığı çözümü Şekil 93'de yer almaktadır.



$F(x)=ax^2+bx+c$

$F\left(\frac{x+y}{2}\right)=a\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+b\left(\frac{x+y}{2}\right)+c=\frac{ax^2+2axy+ay^2}{4}+\frac{bx+by}{2}+c$ ....(1)

$\frac{F(x)+F(y)}{2}=\frac{ax^2+bx+c+ay^2+by+c}{2}$ ....(2)

(1) ve (2) eşit değildir. Yanlıştır

Şekil 93. ÖA2C'nin yazılı sınavda üçüncü probleme ait çözümü.

Şekil 93'de ÖA2C'nin üçüncü problemi nasıl çözdüğü görülmektedir. Katılımcı problemi çözerken F(x) fonksiyonunu $ax^2+bx+c$ olarak tanımlayarak önce $F\left(\frac{x+y}{2}\right)$'yi ve daha sonra da $\frac{F(x)+F(y)}{2}$'yi bulmuştur. Bunun sonucunda da problemde verilen ifadenin eşit olmadığını belirtmiştir. Üçüncü problemde analitik şemaları kullanan ÖA2C görüşmedeki açıklamasını ise aşağıdaki gibi yapmıştır.

ÖA2C: (sessizlik) Doğru mudur yanlış mıdır? İkinci dereceden (sessizlik). Bişeyler yapmadan doğru mudur yanlış mıdır diyemem. Ama…

T : Ne yapacağız?

ÖA2C: İkinci dereceden bir denklem şeklinde yazabilirim. Ama iki bilinmeyenli mi olacak? Onu düşünüyorum, nası yaptığımı hatırlamıyorum hocam. F(x)'e $ax^2+bx+c$ dersem, F(y)'de $ay^2+by+c$ olur. $F\left(\frac{x+y}{2}\right)$, o zaman x, $\left(\frac{x+y}{2}\right)$ olur. a parantezinde a parantezinde $\left(\frac{x+y}{2}\right)$'nin karesi artı b parantezinde $\left(\frac{x+y}{2}\right)$ artı c olur (mırıldanarak işlemler yapıyor). Sonuçta $\frac{a\left(x^2+y^2\right)}{4}+2axy+\frac{b(x+y)}{2}+c$'dir. Diğerine bakalım, F(x) artı F(y) bölü 2'ye. Buradan ne gelir? O da $\frac{a\left(x^2+y^2\right)+b(x+y)+c}{2}$ olur. Paydaları eşit değil, işlem hatası yapmadıysam eşit değiller hocam.

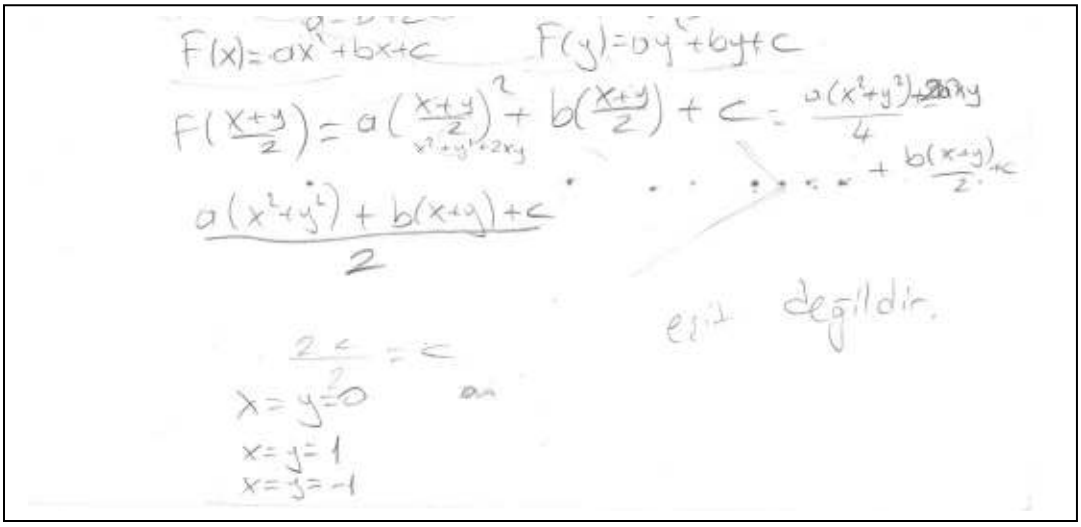
T : Neye göre eşit olmadıklarına karar verdin?

ÖA2C: İlk önce fonksiyonları yazdım, F(x)'le F(y). $F\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$'yi yazdım. Bunun sonucuyla, şu verdiği $\dfrac{F(x)+F(y)}{2}$'yi tek tek yazdım. İkisi eşit çıkmadı. O yüzden yanlıştır dedim.

ÖA2C ifadenin eşit olduğu bir durum var mıdır sorusu yöneltildiğinde ise;

ÖA2C: (sessizlik) x ve y'ye sıfır dersem (mırıldanarak işlem yapıyor). Sıfır için x eşittir y'dir. Bu durumda eşit de olur. Sıfır için doğrudur.
T : Her ikisinin de sıfır olduğu durumda eşittir.
ÖA2C: Evet.
T : Başka bir durum var mıdır acaba?
ÖA2C: (sessizlik) 1 için yapılabilir. x ve y'ye 1 versem, a artı b artı c, a artı b artı c olur. 1'de sağlar. Başka var mı? Yoktur heralde? eksi 1'de nolur acaba? (sessizlik) Eksi 1'de de oluyo sanki. İşlem hatası mı yapıyorum?
T : O zaman x ile y'nin eşit olarak 0, 1 ve -1 oldukları durumda mı bu ifade eşit olur?
ÖA2C: Evet. Başka değer için olamaz yani.

Açıklamasını yaparak sadece x ile y 0, 1 ve -1 değerlerini aldığında birbirine eşit olduğunu dile getirmiştir. Katılımcıya göre ifadenin eşitliğini sağlayan başka bir durum da yoktur. Bu süreçte katılımcının görüşmede yaptığı çözüm ise aşağıda bulunmaktadır.



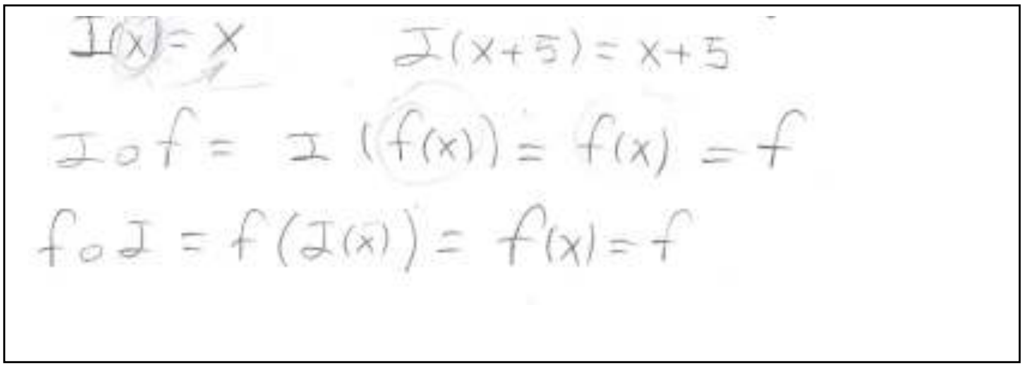

Şekil 94. ÖA2C'nin klinik görüşmede üçüncü probleme ait çözümü

ÖA2C'nin çözümüne bakıldığında katılımcının F(x) fonksiyonunu $ax^2+bx+c$ olarak tanımladığı ve buna bağlı olarak da F(y) fonksiyonunu $ay^2+by+c$ olarak tanımladığı görülmektedir (bkz. Şekil 94.). Katılımcı işlemleri tamamladıktan sonra problemde verilen ifadenin eşit olmadığını göstermiş ve eşit olan durumlar olup-olmadığı sorusunu da "x ve y'nin eşit olduğu durumlarda eşit olur." diyerek yanıtlamıştır. Fakat katılımcının yazılı sınavda böyle bir yaklaşımı olmamış doğrudan eşit olmadığını yazmıştır.

Katılımcılardan ÖA2C ikinci sınıfa devam etmekte olan ve yazılı sınavda ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanan katılımcılardandır. Katılımcı altıncı problemi de çözerken yazılı sınavda ve görüşmede analitik şemaları kullanmıştır. Görüşmede problemi çözerken açıklamasını;

ÖA2C: (sessizlik) Ben birim fonksiyonu sanırım f(x) eşittir x diye tanımlamıştım. Yazalım bakalım çıkmıyor mu? Yani verdiğiniz ifadeyi eksili buldu. O zaman …
T : Verdiğiniz ifadeyi eksili buldu derken?
ÖA2C: Yani az önce birim fonksiyon I(x) dersem x olarak çıkacak. I(x+5) dersem x+5 olarak çıkacak.
T : Hı.
ÖA2C: Birim fonksiyonu zaten demin gösterdim.
T : Tamam.
ÖA2C: I bileşke f dersek de yani I fonksiyonu içinde f(x) fonksiyonu, oda eşit olarak çıkacak. O halde I bileşke f eşittir f dir. f bileşke I'yı tanımlarsak f içinde I(x) olacak. x değiştirmiyordu, yani f(x) olarak çıkacak. Bu da f tir.
T : Burada I ile f(x) in bileşimi f(x). Bunun nedenini açıklayabilir misin?
ÖA2C: Hıhı. Yine fonksiyonda hangi değeri verirsek yine aynısı çıkıyordu. Yani etkilemiyordu o yüzden I nın içinde f(x) de f(x) olarak çıkar.

Şeklinde dile getirmiştir. Katılımcı bu süreçte önce birim fonksiyonun ne olduğunu seçtiği bir örnek ile açıklamıştır. Bunun ardından da altıncı problemde verilen ifadeyi birim fonksiyonun tanımını da kullanarak analitik şemalardan aksiyomatik şemalar ile göstermiştir. Bu süreçte çözümünü ise aşağıdaki gibi yapmıştır.



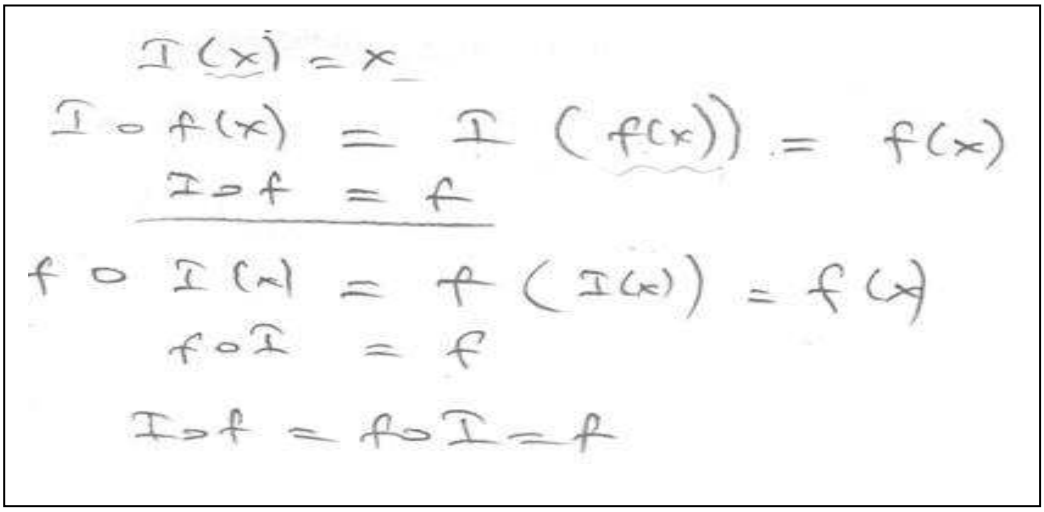

Şekil 95. ÖA2C'nin klinik görüşmede altıncı probleme ait çözümü

Şekil 95'de ÖA2C'nin görüşmede altıncı problemi çözerken önce birim fonksiyonu I(x)=x şeklinde ve ardından da I(x+5)=x+5 şeklinde yazarak açıkladığı görülmektedir. Bundan sonra ise katılımcı altıncı problemdeki eşitliği sağlamıştır.

Katılımcılardan ÖA3C altıncı problemi çözerken hem yazılı sınavda ve hem de klinik görüşmede analitik şemaları kullanmıştır. Katılımcı klinik görüşmede altıncı problemi çözme sürecinde birim fonksiyonun tanımını doğru bir biçimde vererek açıklamasını;

> "I birim fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu için I bileşke f eşit f bileşke I eşit f olduğunu gösteriniz. Haydi! Şimdi I demek birim fonksiyon, I(x) eşit x. Birim fonksiyon nedir? Yani şuraya ne versem yine kendisi olacak. Şimdi şöyle yapalım I bileşke f(x)'i alalım. Eşittir I (f(x)). Tamam şimdi verdiğimiz, şimdi x yerine f(x) gelcek ya birim fonksiyonda, I(x) eşit x olduğu için bu var ya bu f(x)'e eşittir. Bu da ne oldu I bileşke f eşittir f oldu. Birde f bileşkeye de aynı şekilde. f bileşke I(x) eşittir f(I(x)). I(x), I(x)'tir. f(x) oluyor. Ne oluyor? f bileşke I eşit f oluyor. O zaman bu eşitlik doğru oluyor."

Şeklinde yapmıştır. ÖA3C tanımladığı birim fonksiyon yardımıyla önce Iof=f'i ardından da foI=f'i göstererk problemde sorulan eşitliğin doğru olduğunu analitik şemalardan aksiyomatik kanıt şemalarını kullanarak göstermiştir. Çözümünü de Şekil 96'daki gibi yapmıştır.




Şekil 96. ÖA3C'nin klinik görüşmede altıncı probleme ait çözümü

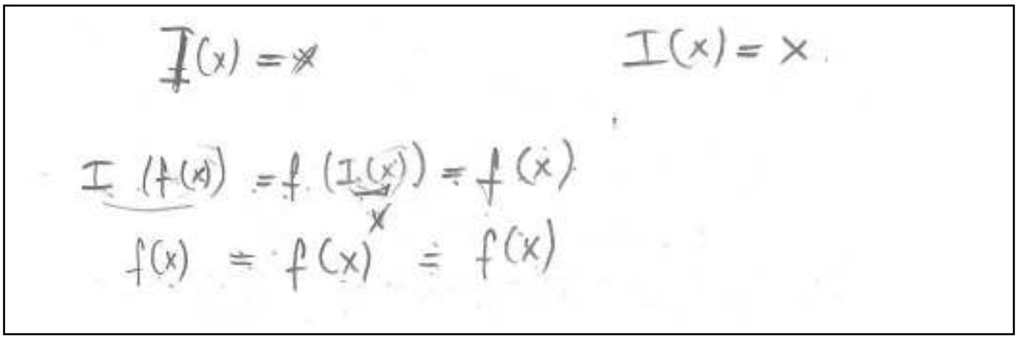
ÖA3C Şekil 96'da görüldüğü üzere önce I(x) birim fonksiyonunu tanımlamış ve bu tanım yardımıyla da altıncı problemi çözmüştür. Katılımcı yazılı sınavda da çözümünü benzer biçimde yapmıştır.

ÖA1A'da altıncı problemi çözerken yazılı sınavda boş bırakmasına rağmen yazılı sınavda analitik şemaları kullanan diğer katılımcılardan birisidir. ÖA1A görüşmede açıklamasını;

> ÖA1A: (Problemi okuyor) Fonksiyon birim fonksiyon olabilmesi için…. (işlem yapıyor, uzun bir sessizlik). Bu soru hakkında hiç yorum yapamıycam şimdi.

T : Daha önceki uygulamada da bu probleme bir şey yazmamışsın. Ama belki şimdi aklına bir şeyler gelir. Bir bak istersen.
ÖA1A: Yok hiç, hani gerçekten.
T : Birim fonksiyonunun ne olduğunu mu hatırlamıyorsun?
ÖA1A: Yok, birim fonksiyonu hatırlıyorum da, I(x)=x dedim. Yanlış mı hatırlıyorum?
T : Bilmiyorum. Benim bilmediğimi varsayalım.
ÖA1A: Yanlış mı hatırlıyorum? Ben böyle hatırlıyorum birim fonksiyonu ama, bilmiyorum yapamıyorum. Ama şimdi aklıma gelmiyo.
T : Şu an aklına hiçbir şey gelmiyor mu?
ÖA1A: Hayır, gelmiyor.
T : Birim fonksiyon bu olduğuna göre bileşke fonksiyonu mu bilmiyorsun?
ÖA1A: Yoooo bileşke fonksiyonu da biliyorum. (Sessizlik, I(f(x))=f(I(x))=f(x) yazıyor) Söylemiş, böyle olduğunu söylemiş.
T : Evet öyle olduğunu söylemiş. Ama senden öyle olduğunu göstermeni istiyorum.
ÖA1A: O zaman I birim fonksiyon ise I(f(x)) eşittir o zaman f(x). Ordan f(I(x)) eşittir f(x)'dir. Çünkü I(x) eşittir x'dir, bu birim fonksiyon ise. f(x) eşittir f(x)'dir (anlatarak işlemlerini yapıyor)
T : Şurada I(x) yerine x yazdın.
ÖA1A: Evet.
T : Neden öyle yazdın?
ÖA1A: I(x) birim fonksiyon ise x tamam. O zaman şu bileşkeyi yaptım, I(f(x))=f(I(x))=f(x). O zaman I(f(x)), x'imiz f(x) oldu artık, dolayısıyla f(x) oldu. Burada da f(I(x)) eşittir f(x) oldu artık. f(x)'de f(x). Bu kadar.

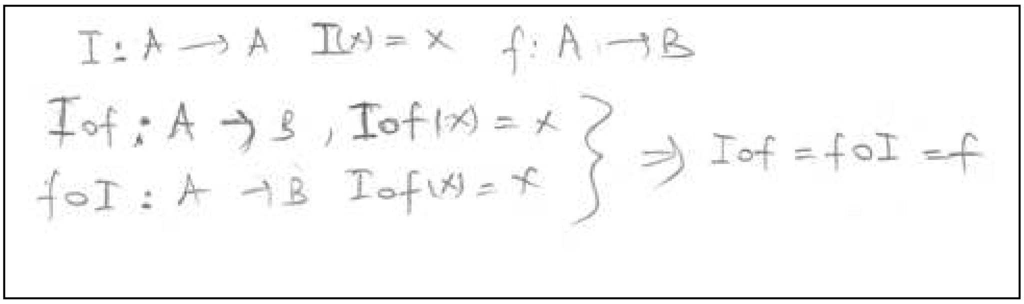
Şeklinde yapmıştır. Fakat katılımcı ilk olarak problemin çözümünü yapamayacağını dile getirmiştir. Çünkü katılımcı yazılı sınavda altıncı problemi çözemeyerek boş bırakmıştır. Fakat daha sonra birim fonksiyonun tanımını yaparak problemi analitik şemalardan aksiyomatik ile çözüp açıklamasını yaparak işlemlerini aşağıdaki gibi gerçekleştirmiştir.



Şekil 97. ÖA1A'nın klinik görüşmede altıncı probleme ait çözümü

ÖA1A'da görüşmede altıncı problemde analitik şemaları kullanan diğer katılımcılar gibi önce birim fonksiyonu tanımlamıştır (bkz. Şekil 97.). Bunun ardından da altıncı problemdeki ifadeyi doğrulamıştır.

ÖA4A kodlu katılımcı dördüncü sınıfa devam etmekte olup yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanmıştır. Katılımcı altıncı problemin çözümünde yazılı sınavda da dışsal şemaları kullanmış fakat görüşmede problemin çözümünde analitik şemaları kullanmıştır. Katılımcının yazılı sınavda yaptığı çözümü Şekil 98'de yer almaktadır.




Şekil 98. ÖA4A yazılı sınavda altıncı probleme air çözümü

ÖA4A yazılı sınavda dışsal şemaları kullandığı altıncı problemde Iof(x)'in x'e eşit olduğunu yazarak problemde verilen ifadenin eşitliğini göstermeye çalışmıştır (bkz. Şekil 98.). Görüşmede ise açıklamasını;

ÖA4A: Birim fonksiyon f(x) eşittir x şeklinde tanımlanıyor, birim fonksiyon için. Birim fonksiyon ile f in bileşkesi. F zaten pardon. I birim fonksiyon, f fonksiyonu mesela ne olsun? I birim fonksiyonu, f fonksiyonu olursa f(x) eşittir y olsun. F'de x i verirsek yerine y ye ulaşırız. Yani şöyle I bileşke f(x) eşittir I bileşke y'ye eşit olur. Zaten I(y) de her zaman y ye eşit olduğu için bunun sonucu her zaman y olur. Her zaman olur ama bu. Şu I'ya da x değerini verdiğimiz zaman I(x) eşittir x olur. Şöyle yapalım. F(x)'e eşit olur. X'de f'deki değerini hesapladığımız zaman da f(y) eşittir pardon f(x) eşittir y olur. Zaten y her zaman f(x)'e eşitti. Göstermiş oluruz böylece şu ikisini.

T : Burada I işlem f(x) eşittir…

ÖA4A: I'y ye eşit oldu.

T : f(x) yerine y yazdın.

ÖA4A: Evet y yazdım. Sonra I(y) zaten birim fonksiyon her zaman y olur.

T : Birim fonksiyonda her zaman y olur derken I(x) eşittir…

ÖA4A: I(x) eşit x x, mesela I(y) olduğu zaman hani içi de aynı ya y olduğu zaman her zaman y olur.

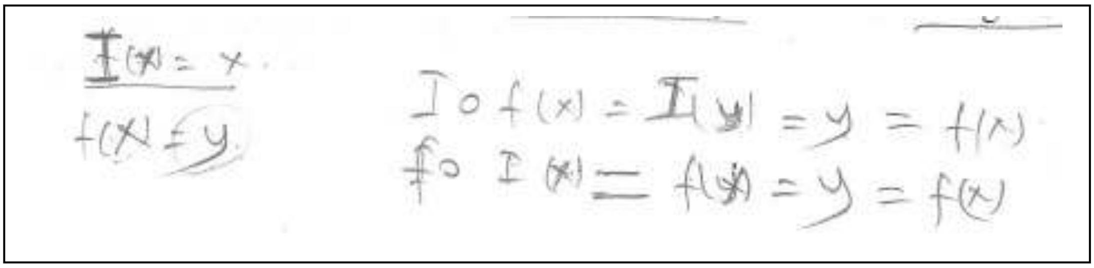
T : tamam burası f(x) o halde.

ÖA4A: I(x) f(x) e eşit olur. F(x) her zaman y idi. Y f(x) e eşit dolayısıyla birbirlerine eşittir.

T : o zaman bu eşitlik doğrudur.

ÖA4A: evet. Burada her x için sağlanır bu. Dolayısıyla her y için de.

Biçiminde yapmıştır. Bu süreçte katılımcı birim fonksiyonu kullanarak sonuca ulaşmış ve çözümünü de Şekil 99'daki gibi yapmıştır.



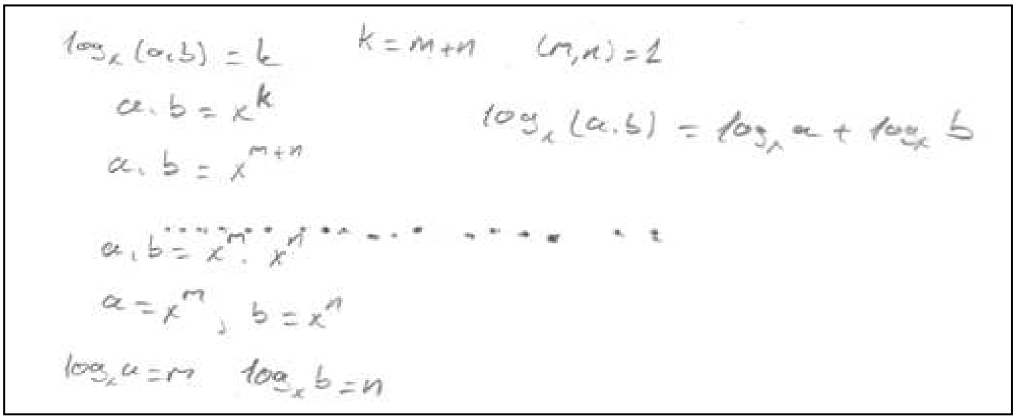

Şekil 99. ÖA4A klinik görüşmede altıncı probleme ait çözümü

Katılımcı ÖA4A görüşmede altıncı problemi çözerken birim fonksiyon ile bileşke fonksiyonu kullanarak problemdeki ifadenin doğruluğunu göstermiştir (bkz. Şekil 99.).

ÖA4D kodlu katılımcı dördüncü sınıfa devam etmektedir ve dördüncü sınıftan görüşmeye katılanlar arasında KPSS (Kamu Personeli Seçme Sınavı) kaygısını en çok taşıyan katılımcıdır. Katılımcı logaritma konusunu en son üniversite birinci sınıfta analiz dersinde gördüğünü dile getirdikten sonra görüşmede sekizinci problemi çözerken görüşmeci ile arasındaki diyalog aşağıdaki biçimde devam etmiştir.

ÖA4D: Olduğunu gösteriniz?
T : Logaritmaları en son ne zaman görmüştün?
ÖA4D: Logaritmaları en son ne zaman görmüştüm? Yine birinci sınıfta analiz dersinde olmuş olabilir ayrıntılı bir şekilde. Bunun buna eşit olduğunu göstereceğiz. Bunu k gibi bir sayıya eşitlemiş olsaydım ben.
T : Nereyi? Logaritma x tabanında a çarpı b'yi mi?
ÖA4D: k gibi bir sayıya eşitlemiş olsam a çarpı b eşittir x üzeri k olur. Bu işime yarar mı ya da buradan gidilir mi? a çarpı b eşittir k üzeri x. Böyle bir şey yapabiliriz ama. a çarpı b eşittir k dedik mesela. k'da ne olsun mesela m artı n. m ile n aralarında asal, şöyle gösterebiliriz. Bunu bu şekilde kabul edelim. Buradan a çarpı b eşittir x üzeri k dediğimiz zaman…
T : Onu neye göre yazıyoruz?
ÖA4D: Bunu logaritmanın formülünden kendi şeyinden, x üzeri k'ya burası.
T : a çarpı b eşittir x üzeri k yazdın ya onu neye göre yazdın?
ÖA4D: Bunu logaritmada öğrenmiştik bir teorem olarak.
T : Tamam.
ÖA4D: Ben burada a çarpı b eşittir x üzeri m artı n dersem. a çarpı b eşittir x üzeri m çarpı x üzeri n dersem.
T : k'yı m artı n almıştın zaten.
ÖA4D: Buradan da şu şekilde yazarsam a eşittir x üzeri m, b eşittir x üzeri n diye düşünsem.
T : Aslında burada k=m+n alırken onu düşünüp almamış mıydın?
ÖA4D: Yani bunu şöyle düşünmüştüm ben. Buradan da logaritma x tabanında a eşittir m, logaritma x tabanında b eşittir n. Zaten m ile n'nin toplamı k'ya eşitti. Buradan da logaritma x tabanında a çarpı b eşittir logaritma x tabanında a art logaritma x tabanında b dir.
T : Böylece göstermiş oldun. Peki burada m ile n'nin niye aralarında asal sayı olması gerekiyor?
ÖA4D: m ile n'nin aralarında asal olması... Aslında ilk başta ben bunu yazarken şey düşünmüştüm. k'yı bir an için alt tabanda düşünmüştüm. Ondan m ile n aralarında asal demiştim. Şimdi asal olmalarında pek de bir şey gerek yok. Çünkü üst olarak yazdığımız için. Sadece m artı n şeklinde ayrılabilir desek de olabilir.

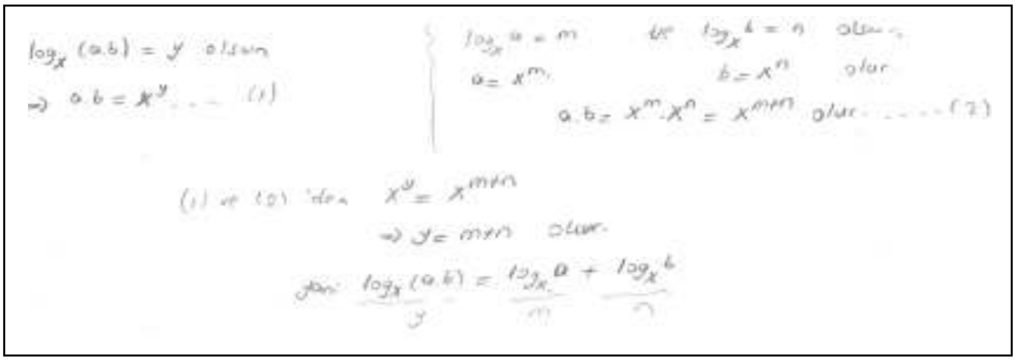
ÖA4D sekizinci problemi çözerken logaritmada öğrendikleri bir teoremi kullanarak problemi doğru bir biçimde çözerek sonuçlandırmıştır. Bu nedenle de yazılı sınavda ve görüşmede savunma sürecinde aksiyomatik kanıt şemalarını kullanmıştır. ÖA4C'de sekizinci problemi ÖA4D ile aynı biçimde doğrulayarak aksiyomatik şemaları kullanmıştır. Katılımcının aksiyomatik şemaları kullandığı çözümüne ise aşağıda yer verilmiştir.




Şekil 100. ÖA4D'nin klinik görüşmede sekizinci probleme ait çözümü

Sekizinci problemi görüşmede Şekil 100'deki gibi çözen katılımcı logaritmanın tanımını, logaritmanın bazı özelliklerini ve üslü sayıların bazı özelliklerini kullanmıştır.

Birinci sınıfa devam etmekte olan ÖA1C yazılı sınavda ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmış olan katılımcılardandır. Katılımcı sekizinci problemi çözerken de yazılı sınavda ve görüşmede logaritma kurallarını kullanarak analitik şemalar ile çözmüştür. Katılımcının aşağıda yazılı sınavda yaptığı çözümü yer almaktadır.




Şekil 101. ÖA1C'nin yazılı sınavda sekizinci probleme ait çözümü

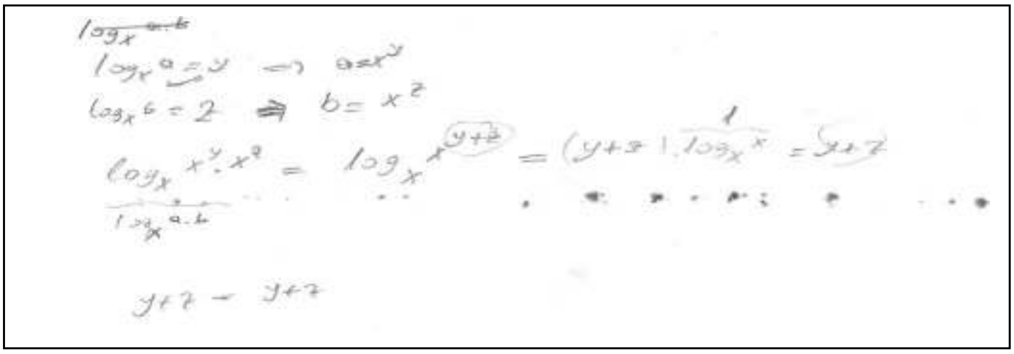
Şekil 101'de ÖA1C'nin yazılı sınavda sekizinci probleme ait çözümü görülmektedir. Katılımcı problemi çözerken logaritmanın tanımını ile bazı özelliklerini ve üslü sayıların özelliklerini de kullanmıştır. Bunun sonucunda da eşitliğin doğru olduğunu ortaya koymuştur. Görüşmede ise açıklamasına;

ÖA1C: (problemi mırıldanarak okuyor) Şimdi logaritma x tabanında a eşittir y ($\log_x a=y$), a eşittir x üzeri y ($a=x^y$) olur.
T : a eşittir x üzeri y'yi nasıl yazdık?
ÖA1C: Logaritma kuralından.
T : Logaritmayı en son ne zaman görmüştün?
ÖA1C: Logaritmayı genel matematikte gördük mü hatırlamıyorum da liseden biliyorum yani.
T : Üniversitede gördünüz mü bu konuyu?
ÖA1C: Heralde tam hatırlamıyorum ama görmemiş de olabiliriz logaritmayı.

Şeklinde başlamıştır. Katılımcıya logaritmayı en son ne zaman gördüğü sorulduğunda ise lisede gördüğünü dile getirerek açıklamasına aşağıdaki gibi devam etmiştir.

T : Onu da logaritma tanımından yazdın.
ÖA1C: Hıhı. Eşitliğin diğer tarafına bakarsak a ve b elemanları yerine bunları yazarım. Bu da eşittir logaritma x tabanında x üzeri y, x üzeri z. Bu da logaritma x tabanında x üzeri y artı z ($\log_x x^{y+z}$). Buda eşittir y artı z'yi başa alırım, kuvvet olduğu için x tabanında x'de 1'dir zaten. Bu halde logaritma x tabanında a çarpı b ($\log_x a.b$), a çarpı b, y artı z'ye eşit oldu.
T : Hıhı.
ÖA1C: Başta da zaten logaritma x tabanında a'ya y, logaritma x tabanında b'ye z ($\log_x a=y$, $\log_x b=z$) demiştik. İki taraf da y artı z eşittir y artı z olduğundan eşittir denir

Katılımcılardan ÖA1C sekizinci problemde verilen durumu doğrulama sürecinde daha önceden bildiği logaritma kurallarını ve tanımlarını kullanmıştır. Bu da katılımcının analitik şemalardan aksiyomatik kanıt şemasını kullandığını göstermektedir. Analitik şemaları kullandığı sekizinci probleme ait çözümü ise aşağıda yer almaktadır.



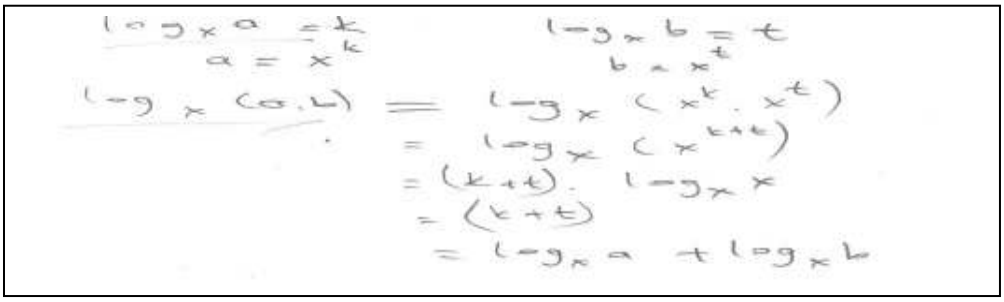
Şekil 102. ÖA1C'nin klinik görüşmede sekizinci probleme ait çözümü

Şekil 102'de ÖA1C'nin görüşmede sekizinci probleme ait çözümü görülmektedir. Katılımcı problemi çözerken logaritmanın tanımını ve bazı özellikleri ile üslü sayıların bazı özelliklerini de kullanmıştır. Bunun sonucunda da eşitliğin doğru olduğunu yazılı sınavdaki gibi ortaya koymuştur.

Üçüncü sınıfta öğrenimine devam etmekte olan ÖA3C klinik görüşmede sekizinci problemi çözerken yazılı sınavda yaptığı şekilde çözerek sonuçlandırmıştır. Katılımcının çözümü aşağıdaki diyalogdan alıntıda görülmektedir.

ÖA3C: Bunu şöyle yapmıştım. Logaritma x tabanında a eşittir k diyelim. k ama reel artı değeri. Bir de logaritma x tabanında b'ye t diyorum. Ben bunların hangisine 1 demiştim acaba? Neyse.
T : O zaman verdiğin değer çok da önemli değil.
ÖA3C: Yok yok. Aslında önceki yaptığım geliyor aklıma zaten.
T : Yazılı sınavda yaptığın.
ÖA3C: Aslında direk o geliyor. Bunları toplarsak, bu çarpmayla ilgili bir şey mi ya? Dur bir dakika şimdi. a eşittir x üzeri k ya b eşitir x üzeri t, değil mi? b, x, t ise diyelim ki.
T : Diyelim ki öyle. Bunu nereden yazdın a eşittir x üzeri k?
ÖA3C: Logaritmanın özelliğinden. Burada logaritma olduğundan üste geçiyordu ya taban. Logaritmadan geliyor. Logaritma x tabanında a çarpı b, logaritma x tabanında x üzeri k çarpı x üzeri t, farklı bişeye geçtim sanki, neyse oldu. Logaritma x tabanında x üzeri k artı t nedir?
T : Nedir?
ÖA3C: k artı t çarpı logaritma x tabanında x ($(k+t)\log_x x$).
T : Onu nereden yapıyorsun şimdi?
ÖA3C: Logaritmanın özelliği.
T : Hıhı o da logaritmanın özelliği peki.
ÖA3C: Logaritma x tabanında x 1'dir. k artı c'ye eşittir. Bakıyorum logaritma x tabanında a çarpım b. k neydi? Logaritma x tabanında a idi. t neydi? Logaritma x tabanında b idi. Böylece eşitliği göstermiş olduk. Hıhı böyle.

ÖA3C ile benzer biçimde sekizinci problemi çözen ÖA3D'de logaritmanın özelliklerini kullandığını dile getirerek problemdeki ifadenin doğruluğunu savunmuştur. Burada katılımcılar dile getirmeseler de problemi çözerken logaritmanın tanımını da kullanmışlardır. Bu da aksiyomatik kanıt şemasını kullandıklarının bir göstergesidir. Bu göstergeye delil olacak çözümü aşağıda yer almaktadır.




Şekil 103. ÖA3C'nin klinik görüşmede sekizinci probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA3C sekizinci problemi çözerken logaritmanın tanımı ile logaritmanın ve üslü sayıların bazı özelliklerini kullanmıştır (bkz. Şekil 103.). Bu tanım ve özellikler yardımıyla da problemi çözerek sonuca ulaşmıştır.

ÖA3C'nin ilk görüşmeden itibaren son derece rahat bir tavır sergilediği gözlenmiştir. Katılmcı kendisini ve düşüncelerini son derece rahat bir biçimde dile getirmektedir. Bunun yanı sıra görüşmelerin neden yapıldığı, ne için kullanılacağı gibi soruların yanıtlarını da öğrenmek istemiştir. Yazılı sınavda da ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanan katılımcı onuncu problemi çözerken de hem yazılı sınavda ve hem de görüşmede analitik şemaları kullanmıştır. ÖA3C ile onuncu problemi çözerken görüşmede geçen diyalogdan doğrudan alıntıya aşağıda yer verilmiştir.

ÖA3C: Bu soruya f(a) buldum, f(b) buldum ve $f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$ buldum.

T : Tamam.

ÖA3C: f(a) eşittir logaritma $\frac{1-a}{1+a}$, f(b) eşittir logaritma $\frac{1-b}{1+b}$, $f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$, x'in yerine şu ifadeyi yazcam, eşittir logaritma $\frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}}$. eşittir logaritma $\frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b}$'dir. Şu kısmı da toplayalım. f(a) artı f(b) logaritma $\frac{1-a}{1+a}$ artı logaritma $\frac{1-b}{1+b}$. Biraz önce yapmıştık, ispatta da bu ikisi çarpım durumuna giriyor logaritmada.

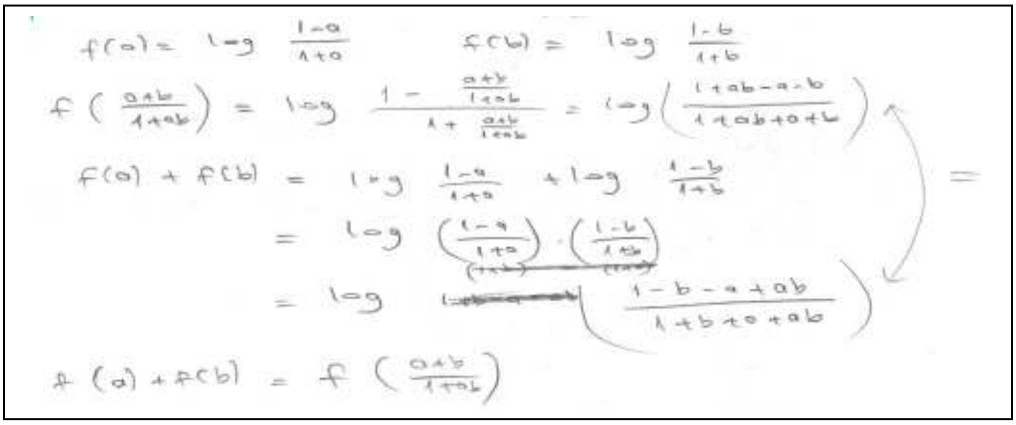
T : 8. problemde mi?

ÖA3C: Hıhı. (sessizce işlem yapıyor) Şimdi bunu çarpıyoruz. Çarpalım. Logaritma 1 artı b eksi a eksi ab. Bu ne yaa! Allah Allah! Allah'ım sen büyüksün ya Rabbim. Bu çarpımdır, çarpıyoruz direk. Çarpalım direk $\frac{1-b-a+ab}{1+b+a+ab}$, şu ifadenin aynısı fark ederseniz.

T : Hıhı.

ÖA3C: Böylece şöyle yapalım f(a) artı f(b) eşit olur $f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$'ye. Hıhı. Aynısı mı bakıyorum. Hıhı. Yanlış yapmadıysam.

ÖA3C onuncu problemi çözerken önce f(a)'yı yazmış ve sonra da f(b)'yi yazarak f(a)+f(b)'yi bulmuştur. Bunun ardından da $f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$'yi bularak eşitliğin doğruluğunu göstermiştir. Bunu yaparken de sekizinci problemdeki kuralı kullanarak aksiyomatik kanıt şemalarını kullanmıştır. Katılımcı onuncu problemdeki ifadenin eşitliğini aşağıdaki gibi göstermiştir.



Şekil 104. ÖA3C'nin klinik görüşmede onuncu probleme ait çözümü

Şekil 104'de ÖA3C onuncu problemi nasıl çözdüğü görülmektedir. Katılımcı bu süreçte önce f(a) ile f(b)'yi bulmuş ve daha sonra da bunları toplamıştır. Bunun ardından da problemde verilen eşitliğin diğer tarafını bularak problem durumunun doğruluğunu matematiksel olarak göstermiştir. Bu süreçte logaritmanın toplamaya yönelik kuralını da kullanmıştır.

Görüşmeye katılan ÖA1D'nin ilk görüşmedeki heyecanı onuncu problemi çözdüğü ikinci görüşmede yerini sakin bir tavıra bırakmıştır. Katılımcı onuncu problemi çözerken yazılı sınavda ve görüşmede aynı şekilde çözerek analitik şemaları kullanmış ve görüşmede açıklamasını;

ÖA1D: f(a)'yı yazalım. f(a) logaritma 1 eksi a bölü 1 artı a'dır. f(b)'yi yazalım logaritma 1 eksi b bölü 1 artı b'dir. Bunları taraf tarafa toplayalım, logaritma 1 eksi a bölü 1 artı a artı logaritma 1 eksi b bölü 1 artı b'dir. Şimdi diğerini yapcam. $f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$ eşittir, eşit logaritma $\dfrac{1-\dfrac{a+b}{1+ab}}{1+\dfrac{a+b}{1+ab}}$ eşittir logaritma 1 artı ab, şunlar gitcek, eksi a-b bölü 1+ab+a+b. Onu yaptık bunu yaptık ab bunu yaptık.

T : Tamam eşit mi peki şimdi bunların ikisi birbirine?

ÖA1D: Değil ya da şöyle yapalım bunları elde edecek bişey yapalım. Yapalım, logaritma 1 artı ab ya onu uydurmaya çalışalım, eksi ab şöyle 1 artı a, b parantezine alalım 1 artı a. O zaman ne oldu? Logaritma 1 artı ab eksi a eksi b bölü 1 artı a parantezinde 1 artı b oldu. Sonra bunları ayıralım. Diyelim ki, (işlem yapıyor) yukarıyı da öyle yapalım, yukarıyı da şey yapalım 1 eksi b çarpı, çarpı olur mu artı 1 eksi b eksi. Eksi olsun 1 eksi b olsun.

T : Hıhı.

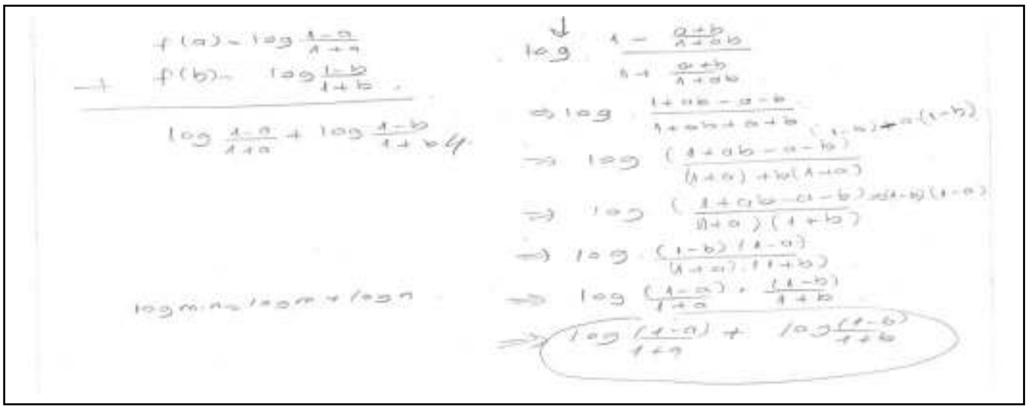
ÖA1D: Evet sonra 1 eksi b parantezine alalım. 1 eksi b, o 1 eksi a olsun. Son durumu 1 eksi b, 1 eksi a bölü 1 artı a artı 1 artı b. Evet bunu şimdi şuna uydurcaz. Logaritma 1 eksi a, bunlar alt alta gelcek şekilde 1 artı a çarpı 1 eksi b, 1 artı b olcak. Sonra çarpım durumunda olan logaritma m çarpı n'yi böyle yazabiliyoduk. n artı logaritma m olarak yazabiliyoduk.

T : Nereden biliyorsun öyle yazabildiğimizi?

ÖA1D: Şurdaki şeyden (8. problemi gösteriyor).

T : Hıhı.
ÖA1D: Burdan yazdım (işlem yapıyor). Yazalım o zaman. Logaritma 1 eksi a bölü 1 artı a artı logaritma 1 eksi b bölü 1 artı b. O zaman, ne oldu o zaman? Eşit olduğunu yaptık.
T : Evet başka söyleyeceğin bir şey var mı Hande bu problemle ilgili?
ÖA1D: Hayır. a, b eksi 1, 1 arasında demiş. Eksi 1 ile 1, bişey ifade etmiyo bu. Evet bişey ifade etmiyo. Neden 1'le eksi 1 arasında? Bunlar niye dahil değil çünkü o zaman burası sıfır olurdu.

Biçiminde yapmıştır. Katılımcı onuncu problemi çözme sürecinde kendisinin de dile getirdiği gibi sekizinci problemde yer alan logaritma kuralını kullanmıştır. Bu da analitik şemalardan aksiyomatik kanıt şemalarını kullandığını göstermektedir. Katılımcının çözümü de aşağıda görülmektedir.



Şekil 105. ÖA1D'nin klinik görüşmede onuncu probleme ait çözümü

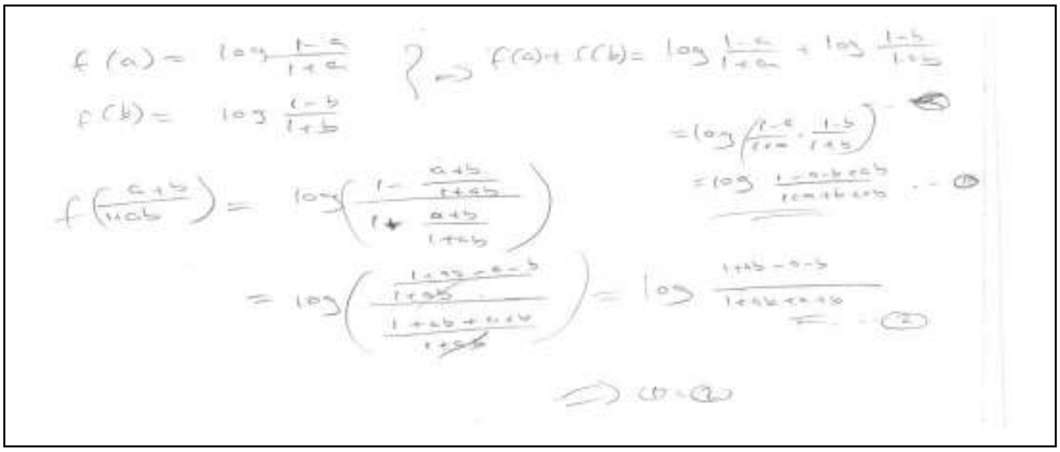
ÖA1D onuncu problemi çözerken önce f(a) ile f(b)'yi bulmuş ve daha sonra da bunları toplamıştır (bkz. Şekil 105.). Daha sonra da problemde verilen eşitliğin diğer tarafını bularak ifadenin doğruluğunu matematiksel olarak göstermiştir. Bu süreçte logaritmanın toplamaya yönelik olan kuralını da kullanmıştır.

ÖA4C dördüncü sınıfa devam etmekte olan ve yazılı sınavda da analitik şemaları ağırlıklı olarak kullanan katılımcılardandır. Katılımcı tıpkı ÖA3C gibi görüşmeye ilk başlandığı zamandan itibaren gayet rahat ve kendinden emin bir tavır sergilemiştir. Bunun yanı sıra görüşmeciye yardımcı olmak için mümkün olduğunca sesli düşünmüştür. Onuncu problemi ise yazılı sınavda ve görüşmede analitik şemalar yardımıyla çözmüştür. Problemi görüşmede;

ÖA4C: a b elemanı eksi 1, 1 için olduğunu gösteriniz. f(x), f(a)'ya bakarsak logaritma $\frac{1-a}{1+a}$, f(b) ise logaritma $\frac{1-b}{1+b}$. Bu kalsın burada.
T : Tamam.

ÖA4C: Diğer tarafa bakalım. $f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$ eşittir logaritma $\frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}}$. Burada payda eşitlediğimiz zaman logaritma $\frac{\frac{1+ab-a-b}{1+ab}}{\frac{1+ab+a+b}{1+ab}}$ olur. 1 artı ab'ler gider. Geriye logaritma $\frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b}$ olur. Diğerini de, (a) ile f(b)'yi toplayalım. Logaritma $\frac{1-a}{1+a}$ artı $\frac{1-b}{1+b}$. 8 sorudaki kuraldan toplama çarpılır, bu da logaritma $\frac{1-a}{1+a}$ çarpı $\frac{1-b}{1+b}$ olur. Sonucu da $\frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b}$ olur. Buna 1, diğerine de 2 diyelim. İkisi birbirine eşit çıktığı için eşitlik tamamdır.

Biçiminde çözerek önce f(a)'yı ve sonra da f(b)'yi yazarak f(a)+f(b)'yi bulmuş. Bunun ardından da $f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$'yi bularak eşitliğin doğruluğunu göstermiştir. Bu da gösteriyor ki katılımcılardan ÖA4C onuncu problemi çözerken aksiyomatik kanıt şemalarını kullanmıştır. Çözümünü ise Şekil 106'daki gibi yapmıştır.



Şekil 106. ÖA4C'nin klinik görüşmede onuncu probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA4C onuncu problemi çözerken önce f(a) ile f(b)'yi bulmuş ve daha sonra da bunları toplamıştır (bkz. Şekil 106.). Bunun ardından ise problemde verilen eşitliğin diğer tarafının neye eşit olduğunu bularak ifadenin doğruluğunu matematiksel olarak göstermiştir. Bu süreçte logaritmada toplama kuralını da kullanmıştır.

ÖA2A klinik görüşmeye katılan en isteksiz ve gönülsüz katılımcıdır. Çünkü katılımcı görüşmeye ilk başlandığında kendisini sınav oluyormuş gibi hissetmiş ve sürekli yazılı sınav kağıdına bakmak istemiştir. Fakat onuncu problemi çözerken görüşmede analitik şemaları kullanmıştır. Problemi de görüşmede aşağıdaki biçimde çözerek açıklamasını;

ÖA2A: (problemi sesli olarak okuyor) f(x)= $\log\frac{1-x}{1+x}$ olsa. Burada x yerine a demiş $\log\frac{1-a}{1+a}$. f(b)= $\log\frac{1-b}{1+b}$. Şimdi şurda yerine koyarsam f(a)+f(b) logaritma var. f(a)+f(b)= $\log\frac{1-a}{1+a}+\log\frac{1-b}{1+b}$. (mırıldanarak işlemi yapıyor) Eşit midir değil midir? Tamam. Yani $f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)=\log\frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{1+\frac{a+b}{1+ab}}$. Çıkar mı hocam?

T : Bilmem.

ÖA2A: Eşittir $\log\frac{\frac{1+ab-a-b}{1+ab}}{\frac{1-ab+a+b}{1+ab}}$ bunlar giderse buda eşittir logaritma (mırıldanarak işlemi yapıyor).

T : Tamam.

ÖA2A: (1+ab-a-b)/(1-ab+a+b) şunlarda çarpım şeklinde olduğu için toplayalım.

T: Hıhı.

ÖA2A: $\log\left(\frac{1-a}{1+a}\right)\left(\frac{1-b}{1+b}\right)$ tamam. Logaritma, bunları çarptığım zaman $\log\frac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b}$ eşit olduğu görünüyor.

Şeklinde yapmıştır. Bunun yanı sıra katılımcı onuncu problemi yazılı sınavda boş bırakmıştır. Bunun nedeni sorulduğunda ise bunu;

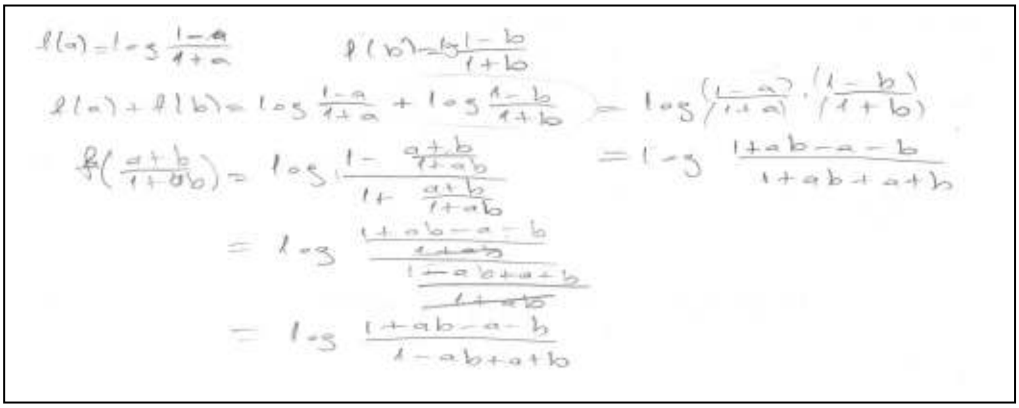
T : Sen bu problemi sınavda yapmamışsın.

ÖA2A: Ben mi yapmamışım?

T : Hıhı. Niye yapmadın?

ÖA2A: Canım sıkıldı, zaten hep sınavlarda canım sıkılıyo. Zaten ispatta yine aynı şey çıkıyor da.

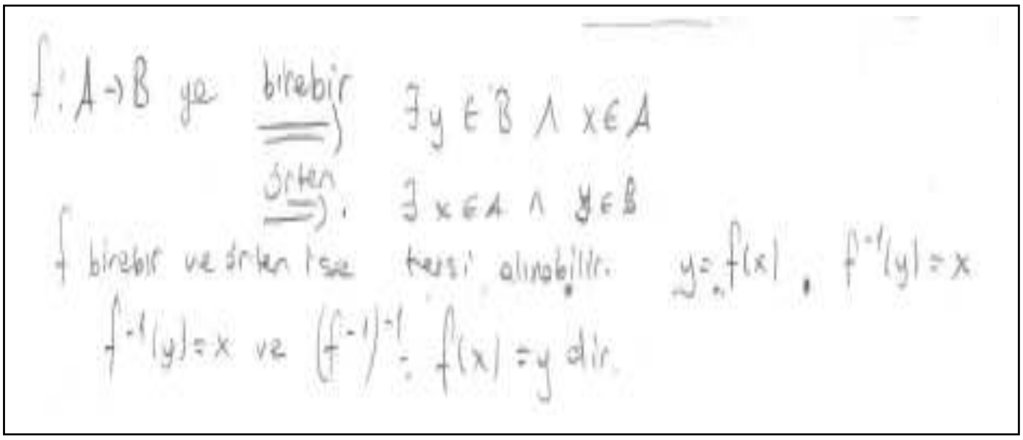
Biçiminde sınavlarda canım sıkılıyor diyerek yapmıştır. Fakat klinik görüşmede onuncu problemde verilen eşitliği analitik şemalardan aksiyomatik şemalar ile doğrulamıştır. Katılımcının onuncu problemi nasıl çözdüğü aşağıda görülmektedir.



Şekil 107. ÖA2A’nın klinik görüşmede onuncu probleme ait çözümü

ÖA2A onuncu problemi çözerken önce f(a) ile f(b)’yi bulmuş ve daha sonra da bunları toplamıştır (bkz. Şekil 107.). Daha sonra da problemde verilen ifadenin diğer tarafının neye eşit olduğunu bularak problemde sorulan ifadenin doğruluğunu matematiksel olarak göstermiştir. Bu süreçte logaritmaya ait bir kuralı da kullanmıştır.

Katılımcılardan ÖA2D dokuzuncu problemde verilen ifadenin doğruluğunu gösterirken yazılı sınavda ve görüşmede analitik şemaları kullanmıştır. Katılımcının yazılı sınav çözümü aşağıda yer almaktadır.

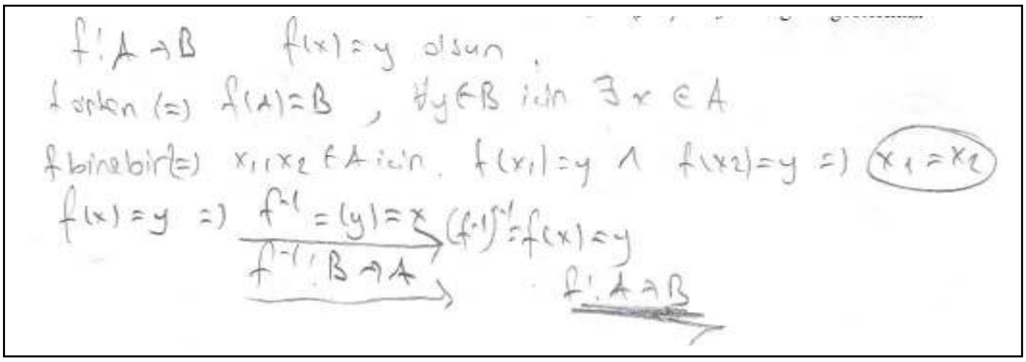


Şekil 108. ÖA2D’nin yazılı sınavda dokuzuncu probleme ait çözümü

Şekil 108’de de görüldüğü gibi katılımcı önce problemde tanımlanan fonksiyon birebir ve örten olduğu için tersinin olacağını yazmıştır. Daha sonra da fonksiyonun tersini alma kuralını kullanarak matematiksel olarak dokuzuncu problemde verilen ifadenin eşit olduğunu göstermiştir. Katılımcı klinik görüşmede de önce f fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu göstermiştir. Bunun ardından da ÖA2D açıklamasını;

> "Burada A, B, f(x) eşittir y olsun. (sessizce yazıyor) f birebir olduğu için bi de bunun şartı var. Örten, birebir (işlem yapıyor). Birebir ve örten olduğu için bunu dedik. Burada ne olmuş oluyor bizim fonksiyonumuz. f(x) eşittir y ise f eksi 1 eşit y eşit x. birebir ve örten olduğu için dedik. Buradan almış olduğumuz f(x) fonksiyonumuz f'in tekrar tersini alınca da f(x) eşit y olur. Bundan bu, zaten belli."

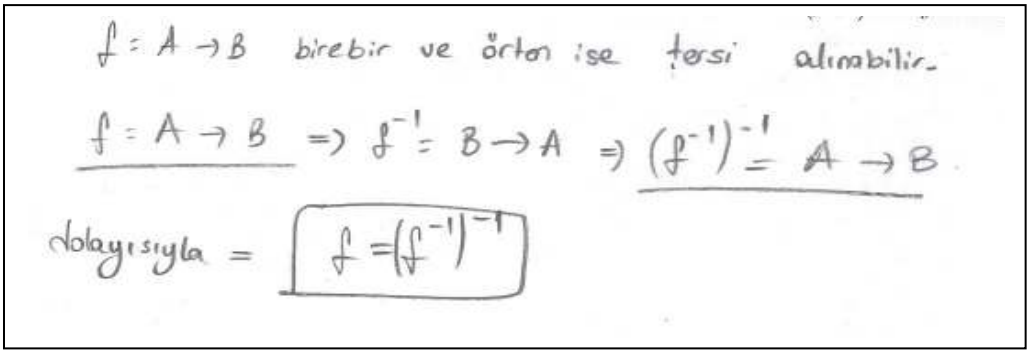
Şeklinde yaparak f(x) fonksiyonunu f(x)=y olarak tanımlamıştır. Daha sonra da verilen ifadenin eşitliğini ÖA1A ve ÖA4C gibi yaparak analitik şemalardan aksiyomatik şemayı kullanmıştır. Çözümü ise aşağıda yer almaktadır.




Şekil 109. ÖA2D'nin klinik görüşmede dokuzuncu probleme ait çözümü

Şekil 109'da da görüldüğü gibi katılımcı önce problemde yer alan birebirlik ve örtenlik tanımlarını yazmıştır. Daha sonra da fonksiyonun tersini alma kuralını kullanarak matematiksel olarak dokuzuncu problemde verilen ifadenin eşit olduğunu göstermiştir. Son olarak da f ile f'nin tersinin tanım ve değer kümelerinin yer değiştirdiğini yazmıştır.

Dokuzuncu problemi çözme sürecinde ÖA1A yazılı sınavda dışsal şemaları kullanırken görüşmeler sırasında analitik şemaları kullanmıştır. Katılımcının yazılı sınavda dışsal şemalar ile yaptığı çözümü aşağıda yer almaktadır.

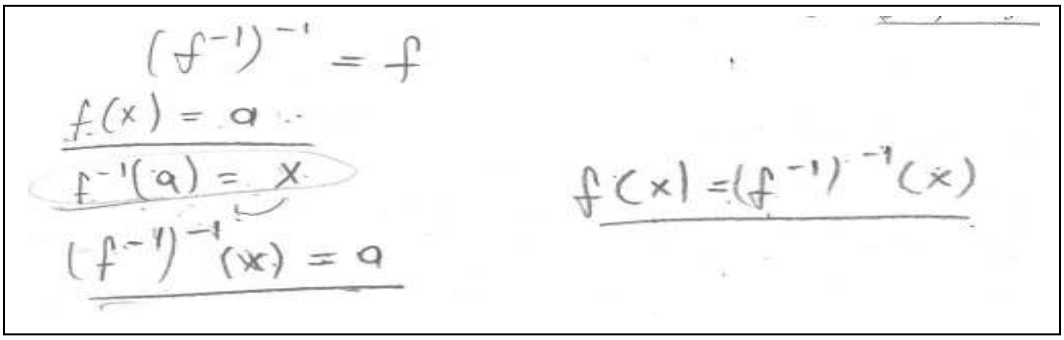



Şekil 110. ÖA1A'nın yazılı sınavda dokuzuncu probleme ait çözümü

Katılımcı için yazılı sınavda f ile $(f^{-1})^{-1}$'in tanım ve değer kümelerinin birbirine eşit olması eşitliğin doğruluğu için yeterli olmuştur (bkz. Şekil 110.). Katılımcı görüşmede ise problemi okuduktan sonra hiçbir tereddütte bulunmadan problemi çözerek açıklamasını aşağıdaki gibi yapmıştır.

> "f fonksiyonu birebir örten fonksiyonsa demiş $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ olduğunu gösteriniz demiş. f fonksiyonu birebir ve örten bir fonksiyonsa tersi alınabilir, onu söylemiş. f(x)'in tersini alıyom. f(x) eşittir a olsun. Buradan tersi f üzeri eksi 1 a eşittir x ($f^{-1}(a)=x$) oldu. (işlem yapıyor) sonra bunun tekrar tersini alıyorum. f üzeri eksi bir eksi bir eşittir a olur. Bu durumda f(x) eşittir f'in tersinin tersine. Yaptım."

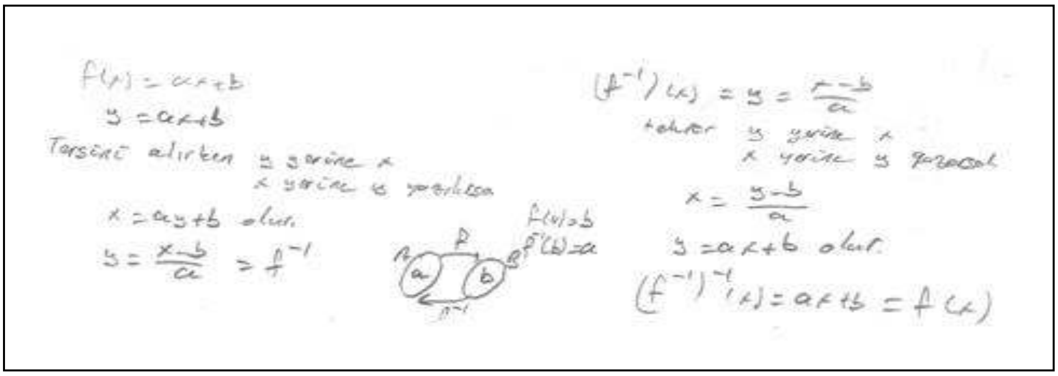
Katılımcılardan ÖA1A f fonksiyonunu f(x) eşittir a olarak tanımlamış ve bunun ardından tersini almış ve tekrar tersini alarak verilen ifadenin doğruluğunu göstermiştir. ÖA1A ile benzer bir çözümü dördüncü sınıfta öğrenimine devam etmekte olan ÖA4C yapmıştır. Fakat ÖA4C, f fonksiyonunu f(x) eşittir y olarak tanımlayarak problemi çözmüştür. Burada her iki katılımcı da bir fonksiyonun tersini alma kuralını kullanarak analitik şemalardan aksiyomatik kanıt şemasını kullanmışlardır. Bu katılımcılardan ÖA1A'nın çözümü aşağıda yer almaktadır.




Şekil 111. ÖA1A'nın klinik görüşmede dokuzuncu probleme ait çözümü

Şekil 111’de de görüldüğü gibi katılımcı fonksiyonun tersini alma kuralını kullanarak matematiksel olarak dokuzuncu problemde verilen ifadenin eşit olduğunu göstermiştir.

ÖA4D dördüncü sınıfa devam eden ve yazılı sınavda tüm şemaları eşit oranda kullanan katılımcılardandır. Katılımcı dokuzuncu problemi çözerken yazılı sınavda deneysel şemaları kullanmasına rağmen yazılı sınavda analitik şemaları kullanmıştır. Yazılı sınavda deneysel şemalar ile yaptığı çözümü aşağıda yer almaktadır.



Şekil 112. ÖA4D’nin yazılı sınavda dokuzuncu probleme ait çözümü

ÖA4D dokuzuncu problemdeki eşitliği yazılı sınavda birinci dereceden tanımladığı fonksiyon yardımı ile doğrulayarak deneysel şemaları kullanmıştır (bkz. Şekil 112.). Katılımcı klinik görüşmede ise dokuzuncu problemde analitik şemaları kullanan ÖA1A, ÖA4C ve ÖA2D’nin çözümüne benzer bir yol izleyerek fonksiyonun tersi kuralından gitmiştir. Bunu da aşağıdaki biçimde;

ÖA4D: Yine birebir ve örten. Tersinin tersi kendisine eşit olduğunu gösteriniz demiş. Bunun tersinin tersi kendisine eşit olduğunu nasıl gösterebiliriz? Tersini bir eleman alıp eşittir y dedik. Pekala, burada her iki tarafın tersini aldığımız zaman x eşittir f’in tersinde y olmuş olmaz mı?

T : Bunu yine tersinin kuralından mı yaptın?

ÖA4D: Hı hı. Her iki tarafın tersini aldığımızı düşündüm. Tekrar burada x tarafına geldiğimizde f(x)= y olmuş oluyor. y’de buna eşit olduğuna göre f’in tersinin tersi eşittir f’dir.

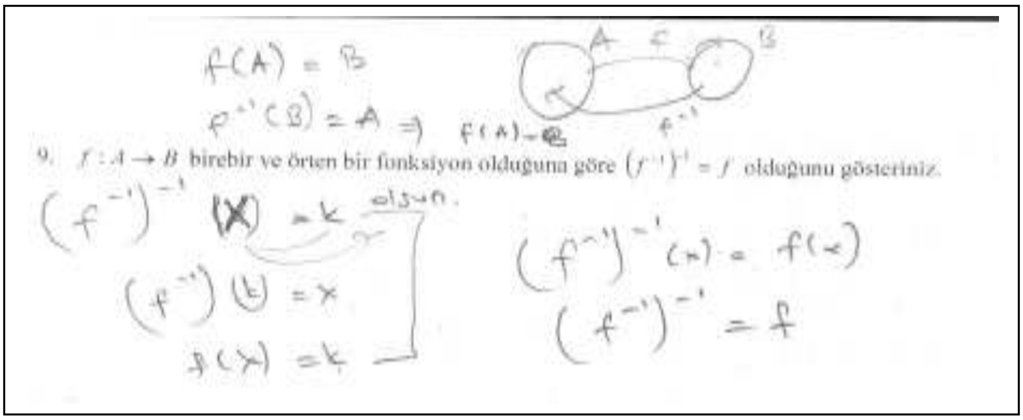
Açıklamıştır. Fakat ÖA4D eşitliğin doğruluğunu göstermeye f fonksiyonundan değil $(f^{-1})^{-1}$’den başlayarak f(x) fonksiyonuna ulaşmıştır. ÖA4D ile benzer olarak ÖA3C’de dokuzuncu problemde verilen ifadeyi kanıtlamaya $(f^{-1})^{-1}$’den başlayarak f(x) fonksiyonuna ulaşmıştır. Bunun açıklamasını da;

ÖA3C: Birebir örten fonksiyon olduğuna göre, bakın burada söylemiş bize.

T : Evet.

> ÖA3C: f'in tersinin tersine ($(f^{-1})^{-1}$) x dedim. Niye derseniz? Pardon k'ya eşit olsun. O zaman bunun fonksiyon özelliğinden f(k)'nın tersi eşit x'dir ($f(k)^{-1}=x$). Anladınız mı? Ondan sonra bu buraya geliyor, bu buraya geliyor. Ondan sonra burada da bir ters var. Ne oluyor o zaman f(x) eşit k oluyor. Bunlar k'ya eşit olduğu için birbirine eşit oluyor yani.

Şeklinde yapmıştır. Hem ÖA4D ve hem de ÖA3C dokuzuncu problemi çözerken bir fonksiyonun tersi kuralını kullanarak analitik şemalardan aksiyomatik şemaları kullanmışlardır. ÖA3C'nin çözümüne aşağıda yer verilmiştir.




Şekil 113. ÖA3C'nin klinik görüşmede dokuzuncu probleme ait çözümü

Katılımcılardan ÖA3C Şekil 113'de de görüldüğü gibi problemde verilen ifadenin doğruluğunu hem kümeleri düşünerek ve hem de fonksiyonun tersini alma kuralını kullanarak matematiksel olarak göstermiştir.

Sonuç olarak, analitik şemaları kullanan öğretmen adayları dönüştürülebilen ve aksiyomatik şemaların her ikisini de kullanmışlardır. Fakat katılımcıların ağırlıklı olarak kullandıkları şema aksiyomatik şemalar olmuştur. Çünkü analitik şemaları kullanan katılımcıların çoğu problemi çözme sürecinde önceden öğrendikleri tanımları, kuralları vs. kullanarak problemi çözmüşlerdir. Bunun yanı sıra dönüştürülebilen kanıt şemalarını kullanan katılımcılar ise genellikle zihinsel operasyonlarını kullanmışlardır.

### 3.4. Farklı Sınıf Seviyelerindeki İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel Kanıta Yönelik Görüşleri ile Fonksiyonlar Konusunda Kullandıkları Kanıt Şemaları Arasındaki İlişkiye Dair Bulgular

Yazılı sınav ve ölçekteki faktörler arasındaki ilişkiyi belirlemeye yönelik olarak Mann-Whitney U testi kullanılarak her bir faktör için ayrı ayrı analizler yapılmış ve değerlendirilerek yorumlanmıştır. Bu süreçte ölçekteki faktörlerin her birine göre katılımcılar iki gruba ayrılmıştır. Katılımcılar iki gruba ayrılırken önce her bir faktör için katılımcıların her birinin aldığı puanların aritmetik ortalamaları alınarak her bir katılımcının her faktör için ortalama puanları hesaplanmıştır. Bunun ardından da bu ortalama puanları küçükten büyüğe doğru sıra numaraları verilerek bu sıralamanın medyanı bulunmuştur. Katılımcılar sıralamanın medyanında yer alan ortalama puana göre iki gruba ayrılmışlardır. Katılımcılar iki gruba ayrılırken bu ortalama puanın altında puanı olanlar, matematiksel kanıt yapmaya yönelik güveni, özdeğerlendirmesi, tutum-inancı ve zihinsel süreci düşük olarak alınmıştır. Bu ortalama puanın üstünde puan alan katılımcılar ise matematiksel kanıt yapmaya yönelik güveni, özdeğerlendirmesi, tutum-inancı ve zihinsel süreci yüksek olarak alınmıştır. Mann-Whitney U testinin sonuçları bu iki gruba göre değerlendirilerek yorumlanmıştır. Bu bölümün devamında her bir faktör ile kullanılan kanıt şemaları arasındaki ilişkiye yer verilmiştir.

### 3.4.1.Farklı Sınıf Seviyelerindeki Öğretmen Adaylarının Matematiksel Kanıta Yönelik Güvenleri ile Fonksiyonlar Konusunda Kullandıkları Kanıt Şemaları Arasındaki İlişkiye Dair Bulgular

"Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği"nde yer alan güven faktörü ile yazılı sınavda ve klinik görüşmede kullanılan kanıt şemaları arasında anlamlı bir farklılık olup-olmadığını belirlemeye yönelik olarak Mann-Whitney U testi yapılmıştır. Bunlardan yazılı sınavda kullanılan kanıt şemaları ile güven faktörü arasındaki farklılığın sonuçları da Tablo 23'de sunularak değerlendirilmiştir.

Tablo 23. Yazılı sınavda kullanılan kanıt şemaları ile güven arasındaki ilişkiye ait Mann-Whitney U testi sonuçları

| **Şemalar** | **Gruplar** | **N** | **Sıralar Ortalaması** | **Sıralar Toplamı** | **Mann-Whitney U** | **Z** | **p** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Dışsal** | 1.grup | 56 | 59,37 | 3324,50 | 1728,500 | -,193 | .847 |
| | 2. grup | 63 | 60,56 | 3815,50 | | | |
| | Toplam | 119 | | | | | |
| **Deneysel** | 1.grup | 56 | 58,86 | 3296,00 | 1700,000 | -,349 | .727 |
| | 2. grup | 63 | 61,02 | 3844,00 | | | |
| | Toplam | 119 | | | | | |
| **Analitik** | 1.grup | 56 | 54,71 | 3063,50 | 1467,500 | -1,597 | .110 |
| | 2. grup | 63 | 64,71 | 4076,50 | | | |
| | Toplam | 119 | | | | | |

Tablo 23'ün devamı

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Boş** | 1.grup | 56 | 69,06 | 3867,50 | 1256,500 | -2,771 | .006 |
| | 2. grup | 63 | 51,94 | 3272,50 | | | |
| | Toplam | 119 | | | | | |

Tablo 23'de kanıta yönelik güven boyutu ile yazılı sınavda dışsal, deneysel, analitik kullanan ve boş bırakan katılımcılar arasında anlamlı bir fark olup olmadığına dair bulgular görülmektedir. Tabloda yer alan gruplardan 1. grup güveni düşük ve 2. grupta güveni yüksek olan katılımcılardır. Bu süreçte $p < .05$ düzeyinde yazılı sınavda dışsal, deneysel ve analitik şemaları kullananlar ile güven boyutu arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Yazılı sınavda problemi çözemeyerek boş bırakanların Z değeri -2,771 ve anlamlılık düzeyi de 0,006 olarak bulunmuştur. Bu da gösteriyor ki kanıt konusunda güveni düşük olan katılımcılar ile problemleri boş bırakan katılımcıların arasında $p < .05$ düzeyinde anlamlı bir farklılık bulunmaktadır. Diğer bir ifadeyle yazılı sınavda kanıta yönelik güveni düşük olan katılımcılar problemleri çözemeyerek daha çok boş bırakmışlardır. Bunun yanı sıra klinik görüşmeye katılan katılımcıların kullandıkları şemalar ile güven boyutu arasında anlamlı bir fark bulunmamaktadır. Fakat klinik görüşmelerde ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanan 4 katılımcıdan 2'sinin kanıta yönelik güvenleri diğer şemaları kullanan bazı katılımcılara göre daha düşüktür.

### 3.4.2. Farklı Sınıf Seviyelerindeki Öğretmen Adaylarının Matematiksel Kanıta Yönelik Özdeğerlendirmeleri ile Fonksiyonlar Konusunda Kullandıkları Kanıt Şemaları Arasındaki İlişkiye Dair Bulgular

Ölçekte yer alan özdeğerlendirme faktörü ile klinik görüşmede ve yazılı sınavda kullanılan kanıt şemaları arasında anlamlı bir farklılık olup-olmadığını belirlemeye yönelik olarak Mann-Whitney U testi yapılmıştır. Yazılı sınav sonuçları ise Tablo 24'de sunularak değerlendirilmiştir.

Tablo 24. Yazılı sınavda kullanılan kanıt şemaları ile özdeğerlendirme arasındaki ilişkiye ait Mann-Whitney U testi sonuçları

| Şemalar | Gruplar | N | Sıralar Ortalaması | Sıralar Toplamı | Mann-Whitney U | Z | Pp |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Dışsal** | 1.grup | 50 | 56,87 | 2843,50 | 1568,500 | -,862 | .389 |
| | 2. grup | 69 | 62,27 | 4296,50 | | | |
| | Toplam | 119 | | | | | |
| **Deneysel** | 1.grup | 50 | 60,21 | 3010,50 | 1714,500 | -,058 | .954 |
| | 2. grup | 69 | 59,85 | 4129,50 | | | |
| | Toplam | 119 | | | | | |
| **Analitik** | 1.grup | 50 | 62,25 | 3112,50 | 1612,500 | -,613 | .540 |
| | 2. grup | 69 | 58,37 | 4027,50 | | | |
| | Toplam | 119 | | | | | |
| **Boş** | 1.grup | 50 | 59,79 | 2989,50 | 1714,500 | -,058 | .954 |
| | 2. grup | 69 | 60,15 | 4150,50 | | | |
| | Toplam | 119 | | | | | |

Tablo 24'de özdeğerlendirme boyutu ile yazılı sınavda dışsal, deneysel, analitik kullanan ve boş bırakan katılımcılar arasında anlamlı bir fark olup olmadığına dair bulgular görülmektedir. Tabloda yer alan gruplardan 1. grup kanıta yönelik özdeğerlendirmesi düşük ve 2. grupta özdeğerlendirmesi yüksek olan katılımcılardır. Bu süreçte $p < .05$ düzeyinde yazılı sınavda kullanılan dışsal, deneysel ve analitik şemalar ile kanıta yönelik özdeğerlendirme arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Bunun yanı sıra problemi boş bırakma ile özdeğerlendirme arasında da anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Ayrıca klinik görüşmeye katılan katılımcıların kullandıkları şemalar ile özdeğerlendirme faktörü arasında anlamlı bir fark bulunmamaktadır. Fakat klinik görüşmelerde ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanan 4 katılımcıdan 3'ünün kanıta yönelik özdeğerlendirmeleri diğer şemaları kullanan bazı katılımcılara göre daha düşüktür.

### 3.4.3. Farklı Sınıf Seviyelerindeki Öğretmen Adaylarının Matematiksel Kanıta Yönelik Tutum ve İnançları ile Fonksiyonlar Konusunda Kullandıkları Kanıt Şemaları Arasındaki İlişkiye Dair Bulgular

Farklı sınıf seviyelerinden katılımcıların bulunduğu çalışmada kullanılan ölçekte yer alan tutum-inanç faktörü ile yazılı sınavda ve klinik görüşmede kullanılan kanıt şemaları arasında anlamlı bir farklılık olup-olmadığını belirlemeye yönelik olarak Mann-Whitney U testi yapılmıştır. Yazılı sınav sonuçları da Tablo 25'de sunularak değerlendirilmiştir.

Tablo 25. Yazılı sınavda kullanılan kanıt şemaları ile tutum-inanç arasındaki ilişkiye ait Mann-Whitney U testi sonuçları

| Şemalar | Gruplar | N | Sıralar Ortalaması | Sıralar Toplamı | Mann-Whitney U | Z | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Dışsal** | 1.grup | 57 | 61,96 | 3531,50 | 1655,500 | -0,607 | .544 |
| | 2. grup | 62 | 58,20 | 3608,50 | | | |
| | Toplam | 119 | | | | | |
| **Deneysel** | 1.grup | 57 | 57,01 | 3249,50 | 1596,500 | -0,93 | .353 |
| | 2. grup | 62 | 62,75 | 3890,50 | | | |
| | Toplam | 119 | | | | | |
| **Analitik** | 1.grup | 57 | 59,28 | 3379,00 | 1726,000 | -0,221 | .825 |
| | 2. grup | 62 | 60,66 | 3761,00 | | | |
| | Toplam | 119 | | | | | |
| **Boş** | 1.grup | 57 | 67,22 | 3831,50 | 1355,500 | -2,245 | .025 |
| | 2. grup | 62 | 53,36 | 3308,50 | | | |
| | Toplam | 119 | | | | | |

Tablo 25'de kanıta yönelik tutum-inanç boyutu ile yazılı sınavda dışsal, deneysel, analitik şemaları kullananların yanı sıra problemi çözemeyerek boş bırakan katılımcılar arasında anlamlı bir fark olup olmadığına dair bulgular görülmektedir. Tabloda yer alan gruplardan 1. grup kanıta yönelik tutum-inancı düşük ve 2. grupta tutum-inancı yüksek olan katılımcılardır. Bu süreçte $p < .05$ düzeyinde dışsal, deneysel ve analitik şemaları kullananlar ile kanıta yönelik tutum-inanç boyutu arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Problemleri çözemeyerek boş bırakanların Z değeri -2,245 ve anlamlılık düzeyi de 0,025 olarak bulunmuştur. Bu da gösteriyor ki kanıt konusunda tutum ve inancı düşük olan katılımcılar ile yazılı sınavda problemleri boş bırakan katılımcıların arasında $p < .05$ düzeyinde anlamlı bir fark bulunmaktadır. Diğer bir ifadeyle kanıta yönelik tutum ve inancı düşük olan katılımcılar yazılı sınavda problemleri çözemeyerek daha çok boş bırakmışlardır. Bunun yanı sıra klinik görüşmeye katılan katılımcıların kullandıkları şemalar ile tutum-inanç boyutu arasında anlamlı bir fark bulunmamaktadır. Fakat klinik görüşmelerde ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanan 4 katılımcıdan 2'sinin kanıta yönelik tutum ve inançları diğer şemaları kullanan bazı katılımcılara göre daha düşüktür.

### 3.4.4. Farklı Sınıf Seviyelerindeki Öğretmen Adaylarının Matematiksel Kanıta Yönelik Zihinsel Süreçleri ile Fonksiyonlar Konusunda Kullandıkları Kanıt Şemaları Arasındaki İlişkiye Dair Bulgular

"Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği"nde yer alan son faktör ise zihinsel süreç faktörüdür. Kanıta yönelik zihinsel süreç faktörü ile yazılı sınavda ve klinik görüşmede kullanılan kanıt şemaları arasında anlamlı bir farklılık olup-olmadığını belirlemeye yönelik olarak Mann-Whitney U testi yapılmıştır. Yazılı sınavın sonuçları da Tablo 26'da sunularak değerlendirilmiştir.

Tablo 26. Yazılı sınavda kullanılan kanıt şemaları ile zihinsel süreç arasındaki ilişkiye ait Mann-Whitney U testi sonuçları

| **Şemalar** | **Gruplar** | **N** | **Sıralar Ortalaması** | **Sıralar Toplamı** | **Mann-Whitney U** | **Z** | **p** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Dışsal** | 1.grup | 56 | 62,33 | 3490,50 | 1633,500 | -,711 | .477 |
| | 2. grup | 63 | 57,93 | 3649,50 | | | |
| | Toplam | 119 | | | | | |
| **Deneysel** | 1.grup | 56 | 63,34 | 3547,00 | 1577,000 | -1,020 | .307 |
| | 2. grup | 63 | 57,03 | 3593,00 | | | |
| | Toplam | 119 | | | | | |
| **Analitik** | 1.grup | 56 | 53,78 | 3011,50 | 1415,500 | -1,877 | .049 |
| | 2. grup | 63 | 65,53 | 4128,50 | | | |
| | Toplam | 119 | | | | | |
| **Boş** | 1.grup | 56 | 60,18 | 3370,00 | 1754,000 | -,055 | .956 |
| | 2. grup | 63 | 59,84 | 3770,00 | | | |
| | Toplam | 119 | | | | | |

Tablo 26'da kanıta yönelik zihinsel süreç boyutu ile yazılı sınavda dışsal, deneysel, analitik şemaları kullananların yanı sıra problemi çözemeyerek boş bırakan katılımcılar arasında anlamlı bir fark olup olmadığına dair bulgular görülmektedir. Tabloda yer alan gruplardan 1. grup kanıta yönelik zihinsel süreci düşük ve 2. grupta zihinsel süreci yüksek olan katılımcılardır. Bu süreçte yazılı sınavda $p < .05$ düzeyinde dışsal, deneysel şemaları kullananlar ve boş bırakanlar ile zihinsel süreç boyutu arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Analitik şemalar için ise Z değeri -1,877 ve anlamlılık düzeyi de 0,049 olarak bulunmuştur. Bu da gösteriyor ki kanıt konusunda zihinsel süreci yüksek olan katılımcılar ile yazılı sınavda problemleri çözerken analitik şemaları kullanan katılımcılar arasında $p < .05$ düzeyinde anlamlı bir fark bulunmaktadır. Diğer bir ifadeyle yazılı sınavda zihinsel süreci yüksek olan katılımcılar problemleri daha çok analitik şemaları kullanarak çözmüşlerdir. Ayrıca klinik görüşmeye katılan katılımcıların kullandıkları şemalar ile zihinsel süreç boyutu arasında anlamlı bir fark bulunmamaktadır. Fakat klinik görüşmelerde ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanan 4 katılımcıdan 2'sinin kanıta yönelik zihinsel süreçleri diğer şemaları kullanan bazı katılımcılara göre daha düşüktür.

# 4.TARTIŞMA

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemalarını ve kanıta bakış açılarını belirlemeyi amaçlayan bu çalışmada yapılan uygulamalar ve elde edilen bulgular önceki bölümlerde sunulmuştur. Bu bölümde ise, çalışmanın her bir alt problemi ile ilgili bulguların ayrıntılı tartışmalarına yer verilmiştir. Elde edilen bulguların olası yorumlarının tartışılması ile birlikte, bulguların birbiri ile ilişkisi ve literatürde yer alan diğer çalışmaların bulguları ile örtüşüp örtüşmediği karşılaştırmalı olarak yorumlanacaktır.

## 4.1. Farklı Sınıf Seviyelerindeki İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel Kanıta Yönelik Görüşlerine Ait Bulguların Tartışılması

Çalışmada kullanılan "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" zihinsel süreç, güven, özdeğerlendirme ve tutum-inanç olmak üzere dört faktör içermektedir. Ölçeğin bütün sınıflar bazında genel ortalaması gösteriyor ki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıta yönelik görüşleri olumlu yöndedir. Çalışmanın sonuçları Lee'nin (1999) yaptığı çalışma ile tutarlılık göstermektedir. Fakat Türkiye'de Moralı vd.'nin (2006) ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmeni adayları ile yaptıkları çalışmanın sonuçları ile paralellik göstermemektedir. Çünkü Moralı vd. (2006) yaptıkları çalışmada öğretmen adaylarının kanıt yapmaya yönelik istenen düzeyde olmadıklarını ortaya koymuşlardır. Yani bu çalışmaya göre öğretmen adaylarının kanıt yapmaya yönelik görüşlerinin tam olarak oluşmadığı görülmektedir (Moralı vd., 2006). Bunun en önemli nedeni ise iki çalışmada kullanılan ölçeklerin farklı faktörler içeriyor olması olabilir.

Çalışmadaki ilk faktör olan kanıt yapmaya yönelik zihinsel sürecin genel ortalaması katılımcıların kanıta zihinsel olarak olumlu yaklaştıklarını göstermektedir. Diğer bir ifadeyle katılımcılar kanıta dair zihinsel süreçlerini sık sık kullanmaktadırlar. Bu çalışmanın sonuçları Lee'nin (1999) çalışması ile paralellik göstermektedir. Ayrı ayrı sınıf seviyeleri bazında ortalamalara bakıldığında bütün düzeylerde zihinsel süreçlerin kanıtta sık sık kullanıldığı görülmektedir ve farklı sınıfların ortalamaları birbirine yakın değerlerdedir. Bu da gösteriyor ki bütün sınıf seviyelerinden katılımcılar matematiksel kanıt yapmak için tanım ve teoremlere gereksinim duymaktadırlar. Zihinsel süreçte katılımcıların yarısından fazlası kanıt yaparken tanımları sık sık kullandıklarını dile getirirken kanıt yaparken kanıt süreçlerini hatırlayıp ilgili teoremleri sık sık kullananlar da katılımcıların yarısıdır. Bunun yanı sıra katılımcıların çoğu kanıt oluşturuken önceki bilgilerin önemli olduğunu düşünmektedir. Fakat zihinsel süreçte en düşük ortalamaya dördüncü sınıflar sahipken en yüksek ortalamaya da birinci sınıfların sahip olduğu görülmektedir. Bunun en önemli nedeni ise birinci sınıfların kanıt yapmak için başka bir yol bilmedikleri için sadece tanım ve teoremlerin kullanılması gerektiğini düşünmeleri olabilir. Bunun yanı sıra "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği"nde yer alan faktörlere yönelik olarak hangi sınıflar arasında farklılık olduğunu görmek için yapılan istatistiki test sonucu zihinsel süreç ile sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık olduğu görülmüştür. Test sonuçlarına bakıldığında ise zihinsel süreçte birinci sınıflar ile dördüncü sınıflar arasında ve yine ikinci sınıflar ile dördüncü sınıflar arasında (.009) anlamlı bir farklılık olduğu görülmektedir.

Ölçekte yer alan diğer faktör ise güvendir. Ölçeği yanıtlandıran katılımcıların genel ortalaması katılımcıların genelinin kanıt konusunda bazen kendilerine güvendiklerini göstermektedir. Farklı sınıf seviyelerindeki katılımcılar kanıt konusunda kendilerine Lee'nin (1999) çalışmasındaki gibi bazen güvenmektedirler. Ortalamalar birbirine çok yakın olmasına rağmen kanıt konusunda güveni en yüksek olanlar dördüncü sınıflar iken kanıt konusunda güveni en düşük olanlar da ikinci sınıflardır.Dördüncü sınıfların diğer sınıf seviyelerine göre güvenlerinin yüksek olmasında lisans düzeyinde aldıkları dersler etkili olmuş olabilir. Fakat yapılan istatistiki test sonucu farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır. Ayrıca ölçekte birinci madde olarak "Kanıt yapmak zordur." cümlesi yer almaktadır ve bu madde de katılımcıların çoğunluğu bazen zor olduğunu belirtmişlerdir. Madde 12 bireylerin kanıtı kendi başlarına yapıp yapamayacakları ile ilgili bir maddedir. Katılımcılardan çok azı kanıtı her zaman kendi başına yapacağına inanırken yarısı bazen yapabileceğine inanmaktadır. Bunun yanı sıra katılımcıların bir kısmı madde 20'ye herzaman yanıtını vererek matematiksel kanıt yapmayı sevdiklerini belirtirken diğer bir kısmı da bazen kanıt yapmayı sevmektedirler.

Ölçekteki bir diğer faktör bireylerin kanıt konusunda kendilerini değerlendirmelerine ve yaptıklarına tekrar dönüp baklamalarına yönelik olarak özdeğerlendirmedir. Bütün katılımcıların kanıt konusunda özdeğerlendirme yapma ortalamaları gösteriyor ki katılımcılar kanıt yaparken sık sık kendilerini değerlendiriyor ve yaptıklarını tekrar gözden geçiriyorlar. Bu bulgular Lee'nin (1999) yapmış olduğu çalışma ile paralellik göstermektedir. Farklı sınıf seviyelerinden katılımcıların özdeğerlendirme ortalamaları ise birbirine son derece yakındır ve farklı sınıf seviyesindeki katılımcılar kanıt yaparken sık sık özdeğerlendirme yapmaktadırlar. Fakat yapılan istatistiki test sonucu farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır. Bunun yanı sıraölçekte yer alan 9. madde katılımcılara"Kanıt yapmaya başladıktan sonra zorlanırsam farklı yolları düşünmek için kendime zaman tanırım." biçiminde katılımcılara yöneltilmiştir. Kanıt yapmakta zorlandığında kendine sık sık zaman tanıyanlar hemen hemen katılımcıların yarısıdır. Madde 15'e her zaman yanıtını veren katılımcılar kanıt yapmanın mantıksal düşünmelerini geliştirdiğini düşünmektedirler.

Ölçekteki son faktör ise tutum-inançdır. Farklı sınıf seviyelerinden çalışmaya katılan öğretmen adaylarının kanıta dair tutum-inanç konusundaki genel ortalamaları gösteriyor ki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt konusundaki tutum ve inançları olumludur. Yani diğer bir ifadeyle öğretmen adaylarının kanıta yönelik olarak tutum-inançları sık sık olumludur. Bütün sınıfların ortalamalarına tek tek bakıldığında bütün sınıf seviyelerinde katılımcıların kanıta yönelik tutum-inançlarının yüksek olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra sınıfların ortalamaları birbirine son derece yakın olmasına rağmen en yüksek ortalamaya birinci sınıflar sahipken en düşük ortalamaya da dördüncü sınıflar sahiptir. Bu sonuçlar yapılan diğer çalışmalar ile tutarlılık göstermektedir (Senk, 1985; Harel ve Sowder, 1998; Lee, 1999; Üzel ve Özdemir, 2009). Sınıf seviyesi arttıkça kanıta yönelik tutum-inanç boyutundaki düşmenin nedeni ise kanıt ile yeni karşılaşan birinci sınıfların kanıt yapmaya daha istekli olmaları olabilir. Fakat sınıf seviyesi arttıkça öğretmen adayları kapsamlı teoremlerin kanıtları ile karşılaşmaktadırlar. Bu nedenle de kanıt yapmakta zorlanmaktadırlar. Buna bağlı olarak da kanıta yönelik tutum ve inançları düşüş göstermektedir. Fakat yapılan istatistiki test sonucu farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır.

Özetle; ölçekte yer alan faktörlerden sadece zihinsel süreç ile sınıflar arasında anlamlı bir farklılık bulunurken diğer faktörler arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır. Bu farklılık ise birinci sınıflar ile dördüncü sınıflar ve ikinci sınıflar ile dördüncü sınıflar arasında anlamlıdır. Oysa ki Almeida'nın (2000) üniversite 1, 2, 3 ve 4. sınıflar ile yaptığı çalışmada birinci ve ikinci sınıf öğrencilerinin kanıtı algılamaları arasında anlamlı bir farklılık ortaya çıkarken diğer sınıf seviyeleri arasında bir farklılık ortaya çıkmamıştır.

Ayrıca ölçekte 27 tane 5'li likert tarzı maddenin yanı sıra 3 tane de açık uçlu soru bulunmaktadır. Bu sorular ile katılımcıların matematiksel kanıtın matematik öğrenmedeki rolü hakkında ne düşündükleri, hangi durumlarda matematiksel kanıt yaptıkları ve matematiksel kanıt yaparken nelere ihtiyaç duydukları görülmeyi çalışılmıştır. Bu sorulardan ilki öğretmen adaylarının matematiksel kanıtın matematik öğrenmedeki rolüne ilişkin görüşleri ile ilgilidir. Bu tema altında bütün sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarının en çok ifade ettikleri matematiksel kanıtın kalıcı, anlamlı ve etkili öğrenme sağladığıdır. Bunun yanı sıra öğrenmeyi kolaylaştırdığını, matematiksel düşünmeyi sağladığını, ezberlememeyi sağladığını ve matematiksel kavramlar arasında ilişki kurmayı sağladığını vurgulamışlardır. Ayrıca nasıl, neden, niçin sorularını yanıtladığını ve işlenenlerin nasıl ve neden yapıldığını anlamayı sağladığını belirtmişlerdir. Bu ifadeler ise aynı zamanda öğretmen adaylarının kanıt tanımları hakkında da ipuçları vermektedir.

Öğretmen adayları matematiksel kanıt yapmaya en çok derste, sınava hazırlanırken ve sınavda, doğru ya da yanlış olduğundan emin olunmayan durumlarda, anlaşılmayan durumlarda, konularda ve kural, formül, özellik vs. unutunca gereksinim duymaktadırlar.

Öğretmen adaylarının matematiksel kanıt yaparken en çok tanım, teorem, aksiyom, kanıt yöntemleri, önceki bilgiler, önceki kanıtlar, verilenler-istenenler ve özellikler, kurallar, formüller vs. ihtiyaç duydukları ortaya çıkmıştır. Matematiksel kanıt yaparken farklı sınıf seviyelerinin ihtiyaç duydukları sınıflara göre büyük bir farklılık göstermemekle birlikte bazı değişiklikler de yer almaktadır. Örneğin birinci ve ikinci sınıflar bu görüşlere ek olarak uygun çalışma ortamına ve uygun psikolojiye ihtiyaçları olduğunu belirtirken üçüncü ve dördüncü sınıflar böyle bir görüş belirtmemişlerdir. Bunun yanı sıra birinci sınıflar konuyla ilgili bilgiye ihtiyaç duymazken diğer sınıf seviyeleri ve özellikle de ikinci sınıflar gerek duymaktadırlar. Bu bulgular katılımcıların ölçekte yer alan zihinsel sürece yönelik ortalamalarının da neden yüksek olduğunu ortaya koymaktadır. Çünkü ölçekte bulunan zihinsel süreç maddelerinde tanımlara ya da teoremlere ihtiyaç duyulduğunu belirten ifadeler yer almaktadır.

### 4.2. İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kullandıkları Kanıt Şemalarına Yönelik Bulguların Tartışılması

Kanıt (savunma) şemaları, bir düşünme biçimi olarak bireylerin tespitlerini ve ikna etme yöntemlerini birlikte tanımlamaktadır. Bu süreçte kanıt şemaları kanıtlama ile işbirliği içindedir (URL-1, 2006). Bu nedenle de kanıt şemaları öğrencilerin kanıt kavramlarının bir taksonomisidir (Harel ve Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 1998; Harel, 1999; Harel, 2001). Bir bireyin kanıt şeması araştırma yaparken ve kendisini ikna etmeye çalışırken oluşmaktadır (Harel ve Sowder, 1998; Harel, 2001). Fakat kanıt şemaları bir hiyerarşi göstermemektedir. Bu nedenle de bir birey aynı zamanda farklı içeriklerde farklı kanıt şemaları kullanabilmektedir (Harel ve Sowder, 1998; Nardi ve Iannone, 2008**).** Bunun için kanıt şemalarının hepsi gerçek öğrenciler ile yapılan araştırmalarda öğrencilerin eylemlerinden türetilmiştir (Harel ve Sowder, 1998; Harel, 2001). Farklı sınıf seviyelerinde yapılan araştırmalar sonucunda da şemalar belirlenmiştir.

Sowder ve Harel (1998) üniversite öğrencilerinin matematik problemlerine ürettikleri çözümleri savunurken kullandıkları şemaları dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç ana şemaya ve bazı alt şemalara ayırmışlardır. Bu araştırmanın bulguları da yapılan diğer araştırmalarla tutarlılık göstermektedir (Sowder ve Harel, 1998; Flores, 2002; Aydoğdu vd., 2003; Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Flores, 2006; Baki vd., 2009). Çünkü araştırmaya katılan farklı sınıf seviyelerinden ilköğretim matematik öğretmeni adayları da hem yazılı sınavda ve hem de klinik görüşmede yöneltilen problemleri dışsal, deneysel ya da analitik şemaları ve bu şemaların alt şemalarını kullanarak doğrulamaya veya savunmaya çalışmışlardır.

Yazılı sınava katılan öğretmen adayları problemleri doğrulama sürecinde kanıt şemalarının her üçünü de kullanmışlar ve bazı problemleri de çözemeyerek boş bırakmışlardır (bkz. Tablo 17.). Bu süreçte bazı problemlerde ağırlıklı olarak dışsal, bazı problemlerde deneysel ve diğer bazı problemlerde de analitik şemalar kullanılırken diğer bazı problemlerde ağırlıklı olarak boş bırakılmıştır. Ayrıca bazı problemlerde, bazı sınıf seviyeleri şemalardan bazılarını hiç kullanmazken diğer sınıf seviyeleri kullanmıştır.

Yazılı sınavda genel duruma bakıldığında farklı sınıf seviyelerinden araştırmaya katılan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının en fazla kullandıkları şemanın analitik şemalar olduğu görülmektedir. Ayrıca katılımcılar problemlerin 4’de birini de boş bırakmışlardır. Sonuç olarak yazılı sınavda problemlerde en çok kullanılan şema analitik olurken en az kullanılan da deneysel olmuştur. Öğrenciler diğer araştırmalarda (Sowder ve Harel, 1998) genellikle dışsal ve deneysel şemaları kullanmışlardır. Bunların yanı sıra kanıtlamada son nokta olarak görülen analitik şemalar diğer şemalara göre daha az kullanılmıştır. Fakat bu çalışmadaki sonuçlar yapılan diğer çalışmalar ile tutarlılık göstermemektedir (Martin ve Harel, 1989). Çünkü yapılan diğer çalışmalarda üniversite öğrencileri genellikle deneysel ve dışsal şemaları kullanırken bu çalışmada genellikle analitik şemaları kullanmışlardır. Analitik şemaların kullanılmış olmasındaki en önemli neden katılımcılara yöneltilen problemlerin içerdiği konu ve problemlerin soruluş biçiminin yanı sıra öğretmen adaylarının bilgi birikimleri ile de ilgili olabilir. Çünkü elde edilen bulgular gösteriyor ki öğretmen adayları fonksiyon kavramı hakkında yeterli düzeyde bilgiye sahiptirler (Dede vd., 2010). Bunun yanı sıra Sowder ve Harel'in (2003) yaptıkları çalışmada da bazı üniversite öğrencilerinin dönüştürülebilen kanıt şemasına sahip oldukları, diğer bazılarının da sınırlı düzeyde kullandıkları ve üniversiteden bu şekilde mezun oldukları ortaya konulmuştur. Bunlara ek olarak aynı çalışmada öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun dışsal ve deneysel şemaları kullandıkları da dile getirilmiştir (Sowder ve Harel, 2003).

Bütün problemler ve bütün sınıf seviyeleri göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adaylarının problemlerin doğrulanmasında yazılı sınavda dışsal şemaları bazı problemlerde hiç ve bazı problemlerde de büyük oranda kullandıkları görülmektedir (bkz. Tablo 19.). Bunun yanı sıra Dede, Bayazit ve Soybaş (2010) yaptıkları çalışmada matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar ile ilgili kavramsal bilgilerinin eksik olduğunu ortaya koymuşlardır (Dede vd., 2010). Fonksiyonlar konusundaki kavramsal bilgi eksikliği de katılımcıların çalışmada dışsal şemaları kullanmasına neden olmuş olabilir. Bu süreçte dışsal şemalar bütün sınıf seviyelerinde en fazla birinci problemde kullanılırken en az da üçüncü problemde kullanılmıştır. Ayrıca 2, 3 ve 4. sınıflar üçüncü problemde dışsal şemaları hiç kullanmazken birinci sınıfların çok az bir kısmı kullanmıştır. Fakat genel olarak bakıldığında bütün problem durumlarında katılımcıların kullandıkları dışsal şemaların yüzde değerleri birbirine yakındır. Birinci ve üçüncü problemlerdeki başarı seviyelerine bakıldığında Carlson (1995) ve LeVeque'nin (2003) çalışmasında da son derece düşük olduğu görülmektedir. Bu süreçte dışsal şemaların en fazla kullanıldığı birinci problem fonksiyonun tanımına yönelik iken dışsal şemaların en az kullanıldığı üçüncü problem daha kavramsal bir problemdir (Carlson, 1995; LeVeque, 2003). Burada en fazla birinci problemde dışsal şemaların kullanılmasındaki en önemli neden problemin çözümünde doğrudan ezberlenmiş olan fonksiyon tanımının kullanılması olabilir. Çünkü yapılan klinik görüşmelerde de öğretmen adayları bu problemi çözerken fonksiyon tanımını yanlış ya da eksik vermişlerdir. Karataş ve Güven'in (2003) yaptıkları çalışmada da matematik öğretmenliği öğrencilerinin fonksiyonu matematiksel ifadelerle ve örneklerle gösterme eğiliminde oldukları ve fonksiyonların cebirsel gösterimini belirlemede zorluk çektikleri ortaya çıkmıştır (Karataş ve Güven, 2003). Bu çalışmada da dışsal şemaları kullanan öğretmen adayları fonksiyonları cebirsel olarak göstermekte zorluk yaşamışlardır. Bunun yanı sıra birinci problemde katılımcılar zaman zaman birebirlik tanımını fonksiyon tanımı olarak vermişlerdir. Ayrıca diğer bazı öğretmen adayları da problem cebirsel olarak ifade edilmediğinden yani özel olarak adlandırılmadığındanfonksiyon olarak kabul etmemişlerdir. Bu bulgular Vinner'ın (1983) çalışması ile paralellik göstermektedir. Vinner (1983) öğrencilerin fonksiyonlarla ilgili kavram görüntülerini incelemiş ve fonksiyon tanımını birebir olma ile karıştırma, her fonksiyon birebirdir, cebirsel olarak ifade edilmeyen fonksiyonları, özel olarak adlandırılmadıkları takdirde, fonksiyon olarak kabul etmemek gibi kavram görüntülerini gözlemlemiştir (akt. Akkoç, 2006). Öğretmen adaylarının fonksiyon tanımındaki eksikliklerin bir diğer nedeni de öğretmen olabilir. Çünkü öğretmen adaylarının yanı sıra öğretmenlerin de fonksiyon kavramında yetersiz anlamalara ve yanılgılara sahip oldukları söylenebilir (Şandır vd., 2005). Dışsal şemaların kullanımında farklı sınıflar arasında ise anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır.

Yazılı sınavda deneysel şemalar bazı problemlerde hiç kullanılmazken diğer bazı problemlerde de katılımcıların yarıdan fazlasının kullandığı görülmektedir (bkz. Tablo 19.). Karataş ve Güven (2003) matematik öğretmeni adayları ile yaptıkları çalışmada katılımcıların fonksiyonları örnekler ile gösterme eğiliminde olduklarını ortaya koymuşlardır (Karataş ve Güven, 2003). Bir durumun örnekler ile gösterilmesi ise deneysel şemaların kullanıldığına dair bir delil oluşturmaktadır. Bu süreçte deneysel şemalar bütün sınıf seviyelerinde en az birinci problemde kullanılırken en fazla da üçüncü problemde kullanılmıştır. Birinci problem doğrudan tanımın kullanılmasına yönelik bir problem olduğundan dolayı deneysel şemalar çok az kullanılmış olabilir. Katılımcıların üçüncü problemi çözebilmeleri için ise ikinci dereceden bir fonksiyon tanımlamaları gerekmektedir. Bu süreçte de katılımcıların çoğu ikinci dereceden fonksiyonun genel formunu yazmak yerine sıradan bir ikinci dereceden fonksiyon tanımlayarak problemi çözmüşlerdir. Bu da deneysel şemaları kullandıklarını göstermektedir. Bunun yanı sıra deneysel şemaların kullanımı sınıf seviyelerine göre de anlamlı bir farklılık göstermektedir. Bu süreçte deneysel şemaları en fazla birinci sınıflar kullanırken en az da dördüncü sınıflar kullanmıştır. Bunun nedeni katılımcıların deneysel doğrulamaları kanıt olarak algılamalarından kaynaklanıyor olabilir. Çünkü Gholamazad, Liljedahl ve Zazkis (2004) sınıf öğretmeni adayları ile yaptıkları çalışmada katılımcıların deneysel doğrulamaları kanıt olarak kabul ettiklerini ve bu kanıtlarından onlar için geçerli olduğunu ortaya koymuşlardır (Gholamazad vd., 2004).

Analitik şemaların kullanımı farklı sınıf seviyesine ve yazılı sınavda öğretmen adaylarına yöneltilen problemlere göre farklılıklar göstermektedir. Bütün sınıf seviyelerinde ise bazı problemlerde hiç kullanılmazken diğer bazı problemlerde de büyük oranda kullanıldığı görülmektedir (bkz. Tablo 19.). Harel ve Sowder'ın (1998) aksine McCrone ve Martin (2004) yaptıkları çalışmada öğrencilerin geometri dersinde analitik şemalardan aksiyomatik şemaları kullanmaya başladıklarını ortaya koymuşlardır. Bu çalışmada da öğretmen adayları analitik şemaları kullanmışlardır. Bu süreçte analitik şemalar en az birinci problemde kullanılırken en fazla da onuncu problemde kullanılmıştır. Onuncu problem logaritmik fonksiyonların doğrudan uygulamasına yönelik bir problem olduğu için katılımcılar ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmış olabilirler. Bunun yanı sıra analitik şemaların kullanımı sınıf seviyelerine göre de anlamlı bir farklılık göstermektedir. Bu süreçte analitik şemaları en fazla üçüncü sınıflar kullanırken en az da birinci sınıflar kullanmıştır.

Dışsal, deneysel ve analitik şemaların kullanılmasının yanı sıra bazı sınıf seviyelerinde bazı problemlerdeboş bırakılmıştır (bkz. Tablo 19.). Farklı sınıf seviyelerinde problemlerin bazıları hiç boş bırakılmazken diğer bazı problemlerde de katılımcıların hemen hemen yarısı problemi boş bırakmıştır. Bazı problemlerde farklı sınıf seviyelerinden katılımcıların problemi boş bırakma yüzdeleri birbirine çok yakın olmasına rağmen diğer bazı problemlerde farklılıklar göstermektedir. Bunlara ek olarak en çok boş bırakılan problemlerden biri de dördüncü problemdir. Katılımcılar tarafından en çok boş bırakılan dördüncü problem ikinci dereceden denklemlere yönelik bir problemdir. Öğretmen adayları önceden bildikleri bir kuralı doğrulayamayarak boş bırakmayı tercih etmişlerdir. Bunun bir nedeni ise bir çözüm yolu bulamamaları olabilir. Fakat farklı sınıflar arasında problemi boş bırakmada anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır.

Bunun yanı sıra yapılan diğer çalışmalar üniversite öğrencilerinin ağırlıklı olarak dışsal ve deneysel şemaları kullandıklarını göstermektedir (Harel ve Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 1998; Harel ve Sowder, 2007). Fakat bu çalışmada öğretmen adayları genellikle analitik şemaları kullanmışlardır. Olsker'in (2007) yaptığı çalışma bu çalışmanın sonuçları ile uyumluluk göstermektedir. Çünkü Olsker (2007) altı farklı üniversitenin matematik bölümünde analize giriş, real analize giriş, topoloji, sayılar teorisi ve analiz gibi farklı dersleri bir yıl boyunca yürütmüştür. Bu süreçte dönemin başında ve sonunda öğrencilerin kanıt şemalarında bir gelişim olduğunu görmüştür. Örneğin; dönemin başında deneysel şemaları yeterli bulan öğrenciler dönem sonunda bunları yeterli bulmamışlar, aksiyomatik kanıt şemalarını daha geçerli bulmuşlardır. Çünkü öğrenciler aksiyomatik şemaların daha ikna edici olduğunu dile getirmişlerdir (Olsker, 2007). Bunun yanı sıra sınıf seviyesi arttıkça analitik şemaların kullanımındaki artışın en önemli sebebi öğretmen adaylarının bilgi birikimleri ve öğrendikleri kanıt yöntemleri ile ilgili olabilir. Çünkü Weber (2001) yaptığı çalışmada soyut cebir dersinde doktora öğrencilerinin lisans öğrencilerine göre daha güçlü kanıt teknikleri bildiklerini ve kullandıklarını ortaya koymuştur (Weber, 2001). Bu da öğrenim seviyesi arttıkça bilinen ve kullanılan kanıt teknikleri daha güçlü olduğu için kanıt şemalarında da bir gelişime neden olabilmektedir.

Öğretmen adayları yazılı sınavda fonksiyonlar konusu ile ilgili 1, 2, 5 ve 7. problemlerde genellikle dışsal şemaları kullanmışlardır. Bu araştırmada öğretmen adayları diğer araştırmalardaki gibi dışsal şemalardan da çoğunlukla otoriteyi kullanmışlardır (Harel, 2001; Aydoğdu vd., 2002). Yani yaptıkları işlemlerin doğruluğunu gösterirken öğretmen, kitap ve çevrelerinde kendilerinden büyük insanlar ile ezberledikleri kuralları kanıt olarak göstermişlerdir. Öğrenciler problemleri çözmek için kuralları kullandıklarında kendi çözümlerini üretmek yerine başarıyı garantilemek için ezberlemeye başlayabilmektedirler. Diğer bir ifadeyle öğrenciler kendi zihinsel yapılarını oluşturmaktan ziyade ezberleme yoluna gidebilmektedirler. Bu da öğretmenin sınıfta kuralları ve genellemeleri öğrencilere doğrudan vermesinden kaynaklanıyor olabilir. Öğretmen bilginin tek kaynağı olduğu zaman da öğrenciler matematikte kendi bilgilerine güvenemeyebilirler. Bunun sonucunda da öğrenciler otoritesiz kendilerini çaresiz hissedebilirler (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003). Öğretmen adayları bu problemlerde de açıklama getiremedikleri için veya bu konularda kendi zihinsel yapılarını oluşturamadıkları için genellikle dışsal (otorite) şemaları kullanmış olabilirler. Ayrıca bu süreçte ezberledikleri bazı kavramların tanımlarını da birbirine karıştırmış olabilirler. Buna ek olarak anımsayamadıkları kavramlarda olmuş olabilir. Öğrenci sınıfta doğrudan verilen kuralları ezberlediği için verilen kuralı yanlış olarak anımsamış olabilir. Oysa öğrenci kuralları öğretmenin doğrudan vermesi yerine, kendi akıl yürütmeleri yoluyla oluşturmuş olsaydı kuralı doğru olarak anımsamak öğrenci için daha kolay olabilirdi. Bunun yanı sıra bu konuları ortaöğretimdeki öğretmenleri veya üniversitede öğretim üyesi sınıfta anlatırken herhangi bir kalıba sokarak ve prosedürü kullanarak anlatmış olabilir. Çünkü bu konuları herhangi bir kalıp kullanarak anlatmak öğretmenlere veya öğretim üyelerine daha kolay geliyor olabilir. Öğretmen adayları da kendi zihinsel yapılarını oluşturamadıkları için bu kalıpları ezberlemiş olabilirler.

Yazılı sınavda üçüncü ve dördüncü problemlerde öğretmen adayları genellikle deneysel şemaları kullanmışlardır. Ayrıca öğretmen adayları deneysel şemalardan da genellikle temel örnekleri kullanmışlardır. Bunun sebeplerinden birisi buldukları değeri problemde yerine koyarak doğrulamanın öğrencilere kolay geliyor olması olabilir. Çünkü bazı öğretmen adayları örnekler yardımıyla problemde verilen ifadenin doğru olduğunu göstermenin daha kolay ve somut bir yol olduğunu dile getirmişlerdir. Ayrıca diğer bazı öğretmen adayları da deneme yaptığını veya sağlamasını yaptığını dile getirmişlerdir. Flores'in (2006) de yaptığı çalışmada dile getirdiği gibi problemlerin doğruluğunu tek bir örneğin sağlaması öğretmen adayları için de yeterli olmuştur.

Öğretmen adayları yazılı sınavda 6, 8, 9 ve 10. problemlerde ise genellikle analitik şemalardan aksiyomatik şemaları kullanmışlardır. Analitik şemalar daha üst düzey becerileri gerektiren bir şemadır. Bu problemler birim fonksiyon, bileşke fonksiyon, bir fonksiyonun tersi ve logaritmik fonksiyon kavramlarını içeren problemlerdir. Öğretmen adaylarının bu problemlerde analitik şema kullanmalarındaki en önemli nedenlerden biri katılımcıların bu kavramlarla ilgili bilgi birikimleri ve tecrübeleri olabilir. Bu kavramlar ile ilgili problemlerde ağırlıklı olarak analitik şemaların kullanılması katılımcıların bu kavramları ezberlemeden zihinlerinde kendilerinin oluşturduklarının ve düşünme sürecine girdiklerinin bir göstergesi olabilir. Bunun yanı sıra bazı problemlerde yazılı sınavda ağırlıklı olarak kullanılan şemalar ile klinik görüşmede kullanılanlar aynı iken diğer bazı problemlerde de farklılaşmaktadır.

Lisans düzeyinde çalışmaya katılan 16 katılımcının klinik görüşmelerde kullandıkları şemalara bakıldığında en çok kullanılan şemanın analitik ve en az kullanılan şemanın da dışsal şema olduğu görülmektedir. Oysa ki yazılı sınavın tamamı göz önüne alındığında en az kullanılan şema deneysel şema olurken en fazla kullanılan şema da analitik şemalar olmuştur.

Klinik görüşmelerde dışsal şemaların en çok kullanıldığı problem birinci problem olurken onuncu problemde hiç kullanılmamıştır. Deneysel şemalar ise 2, 3, 4,7 ve 9. Problemde kullanılırken onuncu problemde hiç kullanılmamıştır. Ayrıca analitik şemaları en çok kullanıldığı problem de onuncu problem olurken en az da birinci problemde kullanılmıştır. Bunun yanı sıra klinik görüşmeye katılan örneklemdeki öğretmen adayları buldukları sonuçların doğruluğunu gösterirken farklı problemlerde farklı şemalar kullanmışlardır. Bu da gösteriyor ki bir öğretmen adayı her zaman aynı şemayı kullanmamaktadır. Bunun sebebi öğretmen adayının önceki bilgileri ve tecrübeleri ile ilgili olabilir. Ayrıca öğretmen adayına verilmiş olan problemin ifadesi veya problemin içerdiği konu ile de ilgili olabilir.

### 4.3. Farklı Sınıf Seviyelerindeki İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kullandıkları Kanıt Şemalarına Yönelik Bulguların Tartışılması

Yazılı sınavların sonuçlarına bakıldığında problemleri çözme sürecinde birinci sınıfların dışsal, deneysel ve analitik şemaları kullandıkları görülmektedir (bkz. 19, Şekil 3.). Bunun yanı sıra problemlerin hemen hemen dörtte biri de yazılı sınavda boş bırakılmıştır. Bu süreçte birinci sınıfların en fazla deneysel şemaları kullandıkları görülmektedir. Bu sonuç Finlow-Bates'in (1994) yaptığı çalışma ile tutarlılık göstermektedir. Çünkü Finlow-Bates'in yaptığı çalışmada üniversite birinci sınıf öğrencilerinin kanıtlarında örneklerin önemli bir yere sahip olduğu ortaya çıkmıştır (Finlow-Bates, 1994). Bunun en önemli nedeni ise öğrencilerin kanıtlama ve formal matematikle ilk defa üniversitede karşılaşmaları olabilir. Bu durum da matematiksel dile alışmaları, daha soyut ve üst düzey düşünmeleri, formal matematiği anlamaları konusunda güçlük yaşamalarına neden olmaktadır (Sarı vd., 2007). Ayrıca Knapp ve Zandieh'de (2004) üniversite öğrencileri için örneklerin kanıt şemalarında önemli bir yeri olduğunu ortaya koymuşlardır. Yapılan bu çalışmada da birinci sınıfa devam etmekte olan öğretmen adayları kanıtlarında genellikle örnekleri kullanmışlardır (Knapp ve Zandieh, 2004). Bunun yanı sıra yazılı sınavda 2, 3 ve 4. sınıflar ise ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmışlardır.

Yazılı sınavda farklı sınıf seviyelerinin kullandıkları dışsal şemalara bakıldığında kullanım yüzdelerinin birbirine son derece yakın olduğu görülmektedir. İkinci ve üçüncü sınıfların deneysel şemaları kullanma oranları birbirine çok yakındır. Fakat deneysel şemaları en çok kullananlar birinci sınıflar olurken en az kullananlar da dördüncü sınıflar olmuştur. Analitik şemaların kullanımına bakıldığında üçüncü ve dördüncü sınıfların hemen hemen aynı oranda kullandıkları görülmektedir. Ayrıca analitik şemalar en fazla üçüncü sınıflar tarafından kullanılırken bunu dördüncü sınıflar takip etmektedir. Analitik şemaları en az kullananlar ise birinci sınıflar olmuştur. Problemleri en fazla ikinci sınıflar boş bırakırken birinci sınıfların boş bırakma oranı da ikinci sınıflara oldukça yakındır.

Problemleri en az boş bırakanlar ise üçüncü sınıflar olmuştur. Yazılı sınavda genellikle 2, 3 ve 4. sınıfların kullandıkları her bir kanıt şemasının yüzdeleri birbirine yakındır. Buradan görülüyor ki dışsal şemaları en fazla 2. sınıflar, deneysel şemaları 1. sınıflar ve analitik şemaları 3. sınıflar kullanırken problemi boş bırakma oranı da en fazla 2. sınıflardadır. Bunun yanı sıra yazılı sınavda analitik şemaların kullanımı sınıf seviyesi arttıkça artmaktadır. Yapılan diğer çalışmalarda da sınıf seviyesi arttıkça analitik şemaların kullanımında bir artış meydana gelmiştir (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003). Yalnız dördüncü sınıfların analitik şemaları kullanım oranları üçüncü sınıflara göre ufak bir düşüş göstermektedir. Bunun bir nedeni çalışmaya katılan öğretmen adaylarından 1, 2 ve 3. sınıfların 2006-2007 eğitim öğretim yılında değişen üniversite sınav sistemi ile üniversiteye gelmiş olmaları olabilir. Çünkü yeni sınav sisteminde fonksiyonlar konusu sınava dahil iken eski sınav sisteminde dahil değildi. Ayrıca ilköğretim matematik öğretmenliğinde öğrenimlerine devam etmekte olan öğretmen adaylarının sınıf seviyesi arttıkça öğretmen adaylarının gördükleri bölüm derslerinin sayısında da bir artış olmaktadır. Genel Matematik, Soyut Matematik, Geometri, Analiz 1-2-3, Lineer cebir 1-2, Diferansiyel Denklemler, Analitik Geometri 1-2, Cebire Giriş ve Elementer Sayı Kuramı gibi derslerde öğretmen adayları kanıt yapmayı, kanıt yapma yöntemlerini ve kanıtın nasıl yapılacağını öğrenmelerinin yanı sıra alan bilgilerini de geliştirmektedirler. Bölüm dersleri ise en fazla üçüncü sınıfta bulunmaktadır ve dördüncü sınıfa gelindiğinde bölüm dersleri yerini öğretmenlik uygulaması gibi derslere bırakmasının yanı sıra adaylar artık KPSS sınavına odaklanmış olmaktadırlar. Bunun sonucunda da KPSS sınavına odaklanan öğretmen adayları formülleri veya kuralları ezberleyerek test sorularını çözmenin daha pratik olduğunu düşünüyor olabilirler.

Sonuç olarak yazılı sınavda bütün katılımcıların kullandıkları şemalar göz önünde bulundurulduğunda farklı sınıf seviyelerine göre dışsal şemaların kullanımı ile boş bırakma oranları arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır. Fakat kullanılan deneysel ve analitik şemalar ile sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmaktadır. Deneysel şemalar herhangi bir hiyerarşi göstermemekle birlikte analitik şemaların kullanımı sınıf seviyesi arttıkça artmaktadır.

Yazılı sınavda farklı sınıf seviyelerinden herbir öğretmen adayına 10'ar tane problem yöneltilmiştir. Bazı problemlerde kullanılan şemalar ile sınıf seviyesi arasında anlamlı bir fark olmasının yanı sıra bazı problemlerde de kullanılan şemalar arasında anlamlı farklılıklar ortaya çıkmıştır. Bu problemlerden birincisinde öğretmen adayları yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanmışlar ve gerçekleştirilen istatistikitest sonucunda farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Fakat kullanılan şemalar arasında anlamlı farklılık ortaya çıkmıştır. Bu süreçte klinik görüşmeye katılan öğretmen adayları da çoğunlukla dışsal şemaları kullanmışlardır. İkinci problemde kullanılan kanıt şemaları ile farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir fark olup-olmadığını görmek üzere gerçekleştirilen istatistikitest sonucunda farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır. Sınıflara göre kullanılan kanıt şemalarının yanı sıra şemalar arasında da anlamlı bir farklılık ortaya çıkmıştır. İkinci problemde katılımcılar yazılı sınavda genellikle dışsal şemaları kullanırken klinik görüşmede katılımcıların yarısı deneysel şemaları kullanmışlardır. Yazılı sınavda üçüncü problemde ağırlıklı olarak deneysel şemalar kullanılırken istatistikitest sonucunda farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Fakat kullanılan şemalar bazında anlamlı bir farklılık ortaya çıkmıştır. Üçüncü problemde yazılı sınavda olduğu gibi klinik görüşmede de öğretmen adayları ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanmışlardır. Dördüncü problemde hem yazılı ve hem de klinik görüşmede ağırlıklı olarak deneysel şemalar kullanılmıştır. Fakat klinik görüşme dışsal şemalar ile deneysel şemaları kullananların sayısı birbirine son derece yakın olmasına rağmen yazılı sınavda dışsal ve deneysel şemalar arasında büyük bir farklılık bulunmaktadır. Ayrıca dördüncü problemi katılımcıların yarıya yakını da boş bırakmışlardır. Bunun sonucunda da farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır. Bunun yanı sıra kullanılan kanıt şemalarında da anlamlı bir farklılık ortaya çıkmıştır. Beşinci problem için sınıflar arasındaki kanıt şeması kullanım farklarını görmek üzere gerçekleştirilen istatistikitest sonucunda farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmasının yanı sıra kullanılan kanıt şemaları arasında da anlamlı bir farklılık ortaya çıkmıştır. Bu problemde yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemalar kullanılmasına rağmen klinik görüşmede bütün şemalar eşit sayıda katılımcı tarafından kullanılmıştır. Altıncı problemde yazılı sınavda ve klinik görüşmede ağırlıklı olarak analitik şemalar kullanılmıştır. Yazılı sınav sonuçlarına bakıldığında farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemaları arasında da anlamlı bir fark bulunmaktadır. Yedinci problem için sınıf farklarını görmek üzere gerçekleştirilen istatistiki test sonucunda farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır. Fakat kullanılan kanıt şemaları arasında anlamlı bir fark ortaya çıkmamıştır. Katılımcılar yazılı sınavda ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanmalarına rağmen boş bırakılma oranı dışsal şemaların kullanımından da fazladır. Klinik görüşmede ise katılımcıların kullandıkları şemaların oranları birbirine yakındır. Sekizinci problemde farklı sınıf seviyeleri yazılı sınavda ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken istatistikitest sonucunda sınıf seviyeleri ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır. Bunun yanı sıra kullanılan kanıt şemaları arasında da anlamlı bir fark oluşmuştur. Klinik görüşmede ise ağırlıklı olarak analitik şemalar kullanılmıştır. Dokuzuncu problem için sınıf farklarını görmek üzere gerçekleştirilen istatistikitest sonucunda farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmış ve kullanılan kanıt şemaları arasında da anlamlı bir farklılık ortaya çıkmıştır. Ayrıca yazılı sınavda ağırlıklı olarak analitik şemaların kullanıldığı görülmüştür. Klinik görüşmede ise deneysel ve analitik şemalar eşit oranda kullanılmıştır. Son problem olan onuncu problemde yazılı sınavda ve klinik görüşmelerde son derece yüksek oranlarda analitik şemalar kullanılmıştır. Buna bağlı olarak da yapılan istatistikitest sonucunda ilköğretim matematik öğretmeni adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Fakat kullanılan kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır. Ayrıca yedinci problem, problemler içinde öğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farklılık olmayan tek problemdir. Katılımcılara yöneltilen bu problem sadece fonksiyon kavramını değil bileşke fonksiyon ve ters fonksiyonu da içermektedir. Bunun yanı sıra çalışmada birebirlik ve örtenlik kavramlarının birbirine karıştırılan kavramlar olduğu ortaya çıkmıştır. Güveli ve Güveli'de (2002) lise birinci sınıflar ile yaptıkları çalışmada öğrencilerin birebirlik ve örtenlik arasında bir ilişki olduğunu düşündüklerini ortaya koymuşlardır. Ayrıca çalışmaya katılan öğrencilerin %18'inin birebir fonksiyonun örten olduğunu ancak örten fonksiyonların birebir olmak zorunda olmadıkları biçiminde bir düşünceye sahip olduklarını görmüşlerdir (Güveli ve Güveli, 2002). Sonuç olarak yedinci problem dışında diğer problemlerde farklı sınıf seviyelerinin kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farklılık bulunmaktadır. Bu da öğretmen adaylarının sınıf seviyesine ve problemin ifadesine göre farklı şemalar kullandıklarını göstermektedir. Zaten bir bireyin kanıt şeması da konudan konuya ve problemden probleme farklılık gösterebilmektedir (Harel ve Sowder, 1998).

Bunun yanı sıra klinik görüşmede de bütün sınıf seviyelerinde her üç kanıt şemasının kullanılmış ve bazı problemlerde boş bırakılmıştır. Sonuç olarak klinik görüşmelerde 2 ve 3. sınıflar tüm problemleri yanıtlarken 1. sınıflar 1 ve 4. sınıflar da 3 problemi boş bırakmışlardır. Bunun yanı sıra analitik şemaları en fazla dördüncü sınıflar kullanırken deneysel şemaları da en az dördüncü sınıflar kullanmıştır. Bunlar dışında farklı sınıf seviyelerinden öğretmen adayları diğer şemaları hemen hemen aynı oranlarda kullanmışlardır. Oysa ki yazılı sınavlarının tamamında kullanılan kanıt şemalarına bakıldığında bazı şemaların kullanımında sınıflar arasında farklılıklar ortaya çıkmıştır. Fakat klinik görüşmelerde 1, 2 ve 3. sınıfların dışsal, deneysel ve analitik şema kullanımları birbirine son derece yakındır. Fakat dördüncü sınıfların şemaları kullanımı bu sınıf seviyelerinden daha farklıdır. Dördüncü sınıfların kullandığı dışsal şemalar diğer sınıf seviyeleri ile birbirine yakındır. Ancak deneysel şemaları diğer sınıf seviyelerinden daha az kullanırken analitik şemaları da daha fazla kullanmışlardır. Bu da dördüncü sınıfların bilgi birikimleri ve öğrendikleri kanıt yöntemlerinden kaynaklanıyor olabilir (Weber, 2001). Ayrıca öğretmen adayları fonksiyon kavramı hakkında yeterli düzeyde bilgiye sahip (Dede vd., 2010) oldukları için bunu öğrendikleri kanıt yöntemleri ile birleştirerek analitik şemaları kullanmış olabilirler.

Ayrıca klinik görüşmeye katılan katılımcıların klinik görüşme ve yazılı sınav sonuçları birlikte ele alındığında katılımcılar 16 problemi boş bıraktıkları için 160 problemden 144'ü geçerli olarak alınmıştır. Katılımcılar bu 144 problemden de 113 problemde hem yazılı ve hem de klinik görüşmede aynı kanıt şemasını kullanırken 31 problemde şemalar değişiklik göstermiştir. Bunun sonucunda yazılı sınav ve klinik görüşmede katılımcıların kullandıkları kanıt şemalarının %78,5 uyumlu olduğu görülmektedir. Fakat bu çalışmada hem yazılı sınav ve hem de klinik görüşmeye katılan katılımcıların klinik görüşmede kullandıkları şemalar temel alınmaktadır. Çünkü bireylerin problemleri doğrulama sürecinde kullandıkları şemaları belirleme sürecinde klinik görüşmeler kullanılmaktadır (Sowder ve Harel, 1998; Flores, 2002; Aydoğdu vd., 2003; Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Flores, 2006; Sarı vd., 2007; Baki vd., 2009).

Çalışmada yer alan problemlerde kullanılan kanıt şemaları problemden probleme ve sınıf seviyesine göre bazı farklılıklar göstermektedir. Her bir sınıf seviyesi için kullanılan kanıt şemalarını ortaya koyan bu kısımda öğretmen adaylarının kullandıkları şemalar sırasıyla sınıflara ve probleme göre literatür destekli olarak tartışılmıştır.

### 4.3.1. Birinci Sınıfa Devam Eden İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kullandıkları Kanıt Şemaları

İlköğretim matematik öğretmenliğinde öğrenimlerine devam etmekte olan birinci sınıf öğretmen adayları fonksiyonlar konusunu ortaöğretimde öğrenmişler ve üniversitede de genel matematik dersinde görmüşlerdir. Genel Matematik dersinde fonksiyon kavramına, rasyonel fonksiyonlara, trigonometrik fonksiyonlara, hiperbolik fonksiyonlara, üstel ve logaritmik fonksiyonlar ile bunların terslerinden oluşan elemanter fonksiyonlara ve fonksiyonların grafiklerine değinilmektedir. Yani genel matematik dersinde fonksiyonlar konusu genel özellikleriyle öğretmen adaylarına tekrar anımsatılmaktadır. Lisans düzeyinde fonksiyonlar konusu birinci sınıfta soyut matematik dersinde de yer almasına rağmen uygulamaların yapıldığı süreçte henüz konu işlenmemiştir. Bu nedenle birinci sınıf öğretmen adayları çalışmada ağırlıklı olarak ortaöğretimde ve genel matematik dersindeki bilgilerini kullanmaktadırlar. Bunu zaman zaman görüşmeler sırasında da dile getirdikleri olmuştur.

Birinci sınıfa devam etmekte olan katılımcılar yazılı sınavlar süresince ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanırken daha az kullandıkları dışsal ve analitik şemaları hemen hemen aynı oranda kullanmışlardır. Fakat yine kullanılan her üç şemanın yüzde değerleri de birbirine son derece yakındır. Yapılan farklı çalışmalarda da ağırlıklı olarak deneysel şemaların kullanıldığı ortaya konulmuştur (Coe ve Ruthven, 1994; Galbraith, 1995; Galindo, 1998; Rodriguez, 2006). Bu çalışmada deneysel şemaların ağırlıklı olarak kullanılmasının nedenlerinden biri ise henüz birinci sınıf olan öğretmen adaylarının matematiksel kanıt yöntemlerinden haberdar olmamaları olabilir. Çünkü matematiksel kanıt yöntemleri Soyut Matematik dersinde açıklanmaktadır. Ayrıca Sowder ve Harel'in (2003) yaptıkları çalışmada da üniversite öğrencilerinin genellikle dışsal ve deneysel şemaları kullandıkları ortaya konulmuştur (Sowder ve Harel, 2003). Bu çalışmanın sonuçları da diğer çalışmalar ile paralellik göstermektedir (Coe ve Ruthven, 1994; Galbraith, 1995; Galindo, 1998; Sowder ve Harel, 2003; Rodriguez, 2006). Ayrıca yapılan çalışmada katılımcıların ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanmalarındaki bir diğer neden de liseden kalma alışkanlıkları ile ilgili olabilir. Çünkü Özer ve Arıkan (2002) yaptıkları çalışmada lise öğrencilerine bir ifade verip doğruluğunu göstermelerini istediklerinde öğrencilerin sayısal değerler vererek ya da tümevarım yöntemini kullanarak ifadenin doğruluğunu gösterdiklerini ortaya koymuşlardır (Özer ve Arıkan, 2002). Ayrıca bunun bir diğer nedeni de öğretmen adaylarının ortaöğretimde mevcut yapı içerisinde çok fazla kanıt yapma fırsatı verilmemesi de olabilir (Güven vd., 2005). Bunun yanı sıra katılımcıların yaklaşık olarak beşte biri de yazılı sınavda problemleri boş bırakırken sadece bir problem de görüşmede boş bırakılmıştır.

Sowder ve Harel (1998)'in üniversite öğrencileri ile yaptıkları çalışmada öğrencilerin ağırlıklı olarak deneysel kanıt şemalarını kullandıkları ortaya çıkmıştır (Sowder ve Harel, 1998). Bunun nedenlerinden biri öğretmen adaylarına göre problemde eşitliği sağlayan veya sonucu doğrulayan bir veya birkaç tane örnek bulmalarının bu eşitliğin doğruluğunu kabul etmeleri için yeterli olması olabilir. Bunun yanı sıra bu yöntemi tercih etme nedenleri arasında öğretmen adaylarına daha basit ve sonuçlandırılması kolay geliyor olabilir. Ayrıca doğrulamayı daha somut olarak gördükleri için daha güvenilir de geliyor olabilir. Bu nedenlerin sonucunda da deneysel şemaları daha fazla kullanmış olabilirler. Bunlara ek olarak öğretmenlerin çoğu da öğrencilerinin birçoğunun bir tahminin doğruluğuna birilerini ikna etmekte örnekleri kullanacaklarına inanmaktadırlar. Çok az öğretmen ise öğrencilerin yüksek düzeyde akıl yürütmeyi kullanacaklarını düşünmektedirler (Bergqvist, 2005). Bu bakış açısı ise öğrencilerin kullandıkları kanıt şemalarını etkilemiş olabilir. Çünkü bilindiği üzere öğretmenlerin bakış açıları da öğrencilerin kullandıkları şemaları etkilemektedir.

Birinci sınıftan klinik görüşmeye katılan öğretmen adayları ise ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken bunu deneysel ve dışsal şemalar takip etmiştir. Ayrıca sadece bir tane problemde boş bırakılmıştır. Yazılı sınav sonuçlarında şemaların kullanımı birbirine yakın olmasına rağmen klinik görüşmede deneysel ve analitik şemaların kullanımı birbirine yakın iken dışsal şemalar bunlardan daha az kullanılmıştır. Klinik görüşmenin sonucunda katılımcılardan birisi ağırlıklı olarak dışsal, ikisi ağırlıklı olarak deneysel ve birisi de ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmışlardır. Bu katılımcıların kullandıkları şemalar problemden probleme ise farklılık göstermiştir. Bu katılımcılardan sadece ÖA1A kodlu katılımcı deneysel şemaları hiç kullanmazken diğer katılımcılar farklı problemlerde farklı üç şemayı da kullanmışlardır.

Dışsal şemaları kullanan birinci sınıf öğretmen adayları genellikle otorite kanıt şemasını kullanmışlardır. Görüşmeler sırasında birinci sınıfların problemleri çözerken dışsal şemaları en çok kullanıldıkları problemlerden biri ise birinci problemdir. Yazılı sınavda da görüşmeye katılan öğretmen adaylarının tamamı dışsal şemaları kullanmışlardır. Birinci problemi çözen katılımcıların tamamı önce verilen ifadenin bir fonksiyon olmadığını dile getirmişlerdir. Çünkü problem rutin olmayan bir problemdir ve verilen ifade cebirsel olarak ifade edilmeyerek özel olarak adlandırılmamıştır. Bu da öğretmen adaylarının fonksiyon olarak tanımlamalarını zorlaştırmış olabilir. Çünkü Vinner (1993) yaptığı çalışmada cebirsel olarak ifade edilmeyen fonksiyonların yani özel olarak adlandırılmadıkları sürece fonksiyon olarak kabul edilmediğini ortaya koymuştur (akt. Akkoç, 2006). Bunun yanı sıra Akkoç ve Tall (2005) yaptıkları çalışmada da öğrencilerin çok azının farklı görünüşteki fonksiyonlara, fonksiyon kavramının tanımsal özellikleriyle odaklandıklarını görmüşlerdir (Akkoç ve Tall, 2005). Bunun yanı sıra dışsal şemaları kullanan katılımcılar fonksiyon tanımını verirken ya eksik vermişler veyahut da birebirlik tanımı ile karıştırmışlardır. Vinner'da (1993) yaptığı çalışmada öğrencilerin fonksiyon tanımını birebir olma ile karıştırdıklarını ortaya koymuştur (akt. Akkoç, 2006). Bunun yanı sıra birinci sınıf katılımcıları neyi tanım ve neyi görüntü kümesi olarak alacakları konusunda da sıkıntılar yaşamışlardır. Birinci problemde dışsal şemaları kullanan birinci sınıf öğretmen adaylarının tamamı otorite kanıt şemasını kullanmışlardır. Bunu yaparken de genellikle yanlış anımsadıkları fonksiyon tanımını dile getirmişlerdir. Bu da öğretmen adaylarının genellikle fonksiyon tanımını ezberlediklerini ve bu tanımla ilgili bir zihinsel sürece girmediklerini göstermektedir.

Bunun yanı sıra birinci sınıfların görüşmeler sırasında birebirlik ve örtenlik kavramlarını birbirine karıştırdıkları görülmüştür. Dışsal şemaları kullanan katılımcılardan ÖA1A beşinci problemde örtenlik kavramını doğru biçimde kullanarak g bileşke f fonksiyonunun örten olduğunu göstermiştir. Fakat katılımcı birebirlik ile ilgili olan ikinci problemi de tıpkı beşinci problem gibi çözmüştür. Bu da katılımcının birebirlik ve örtenlik kavramını birbirine karıştırdığını veya bu kavramları zihninde kendisinin oluşturmadığına, ezberlediğine dair bir işaret olmasının yanı sıra katılımcılar birebirlik ile örtenlik arasında bir ilişki olduğunu düşünmüş olabilirler. Çünkü Güveli ve Güveli'nin (2002) lise birinci sınıflar ile fonksiyonlar konusunda yaptıkları çalışmada belirledikleri kavram yanılgılardan biri öğrencilerin birebirlik ve örtenlik arasında bir ilişki olduğunu zannetmeleridir. Ayrıca çalışmaya katılan öğrencilerin %18'inin her birebir fonksiyonun örten olduğunu ancak örten fonksiyonların birebir olmak zorunda olmadıkları biçiminde bir düşünceye sahip olduklarını da görmüşlerdir (Güveli ve Güveli, 2002).

Bu katılımcılardan ÖA1A klinik görüşmede açıklamasını yaparken ilk olarak deneysel şemalardan sezgisel şemaları kullanıyor gibi görünmektedir. Fakat görüşmenin devamında öğretmen adayı birebirliğin tanımını sözel olarak doğru biçimde ifade etmiştir. Ancak bu tanımı g bileşke f fonksiyonuna transfer etmekte sorun yaşamıştır. Katılımcıya göre A kümesindeki bir elemanın C kümesinde görüntüsünün olması ifadenin birebir olması için yeterlidir. Bu da gösteriyor ki katılımcı birebirliğin tanımını ezberlemiş fakat içselleştirememiştir. Çünkü öğretmen adayının kendisinin yapmış olduğu birebirlik tanımı ile g bileşke f'in birebirliğini göstermekte kullandığı ifadeler örtüşmemektedir. Oysa ki verilen ifadenin sadece A'dan C'ye tanımlı olması ifadenin birebir olması için yeterli değildir. Aslında g bileşke f'in birebirliğini gösterirken yaptığı açıklama öğretmen adayının aynı zamanda yanlış bir fonksiyon kavramına da sahip olduğunu göstermektedir. Çünkü bir ifadenin birebir fonksiyon olması için aynı zamanda fonksiyon da olması gerekmektedir. Oysa bir ifadenin fonksiyon olması için sadece tanım ve görüntü kümesinin olması da yeterli değildir.

Klinik görüşmelerde dışsal şemalardan otoriteyi kullanan bazı katılımcılar ise bazı problemlerde geçen ifadelerin kanıtını sınıfta yaptıklarını belirtmişlerdir. Bu katılımcılardan ÖA1C açıklamasını "Şöyle bir şey aklımda kalmıştı ilk dönem biz bunun ispatını yapmıştık genel matematikte. Şimdi aslında çok hoşuma gitmişti ispat. Bu b kare falan ekliyoduk, öyle aklımda kalmıştı. Bunları hangi, ne eklediğimiz aklıma gelmedi ama neden eklediğim." şeklinde dile getirmiştir. Katılımcı ifadeyi doğrulamak için ekleme yapması gerektiğini dersten anımsamasına rağmen neden ekleme yapması gerektiğini bilmemektedir. Bu da gösteriyor ki katılımcı bu problemde verilen ifadeyi doğrularken tamamen dersten ezbere anımsadığı bir yöntemi kullanmakta ve bu problemi doğrulama ile ilgili herhangi bir zihinsel sürece girmemektedir. Oysa önemli olan katılımcının ezbere çözmesinden ziyade zihinsel sürece girerek kendi oluşturduğu yapıları kullanması ve yaptıklarının nedenini de bilmesi ve açıklayabilmesidir.

Dışsal şemaları kullanan katılımcılar zaman zaman sınıfta gördükleri eşitlikleri problemlere uygulayamamışlardır. Bu katılımcılardan ÖA1A $(fog)^{-1}$'in tersini almakta herhangi bir sorun yaşamamış fakat $g^{-1}of^{-1}$ ifadesinin tersini almakta zorlanmış ve doğru biçimde tersini alamamıştır. Çünkü okullarda fonksiyonlar konusunda $f(x)=y$ ifadesinin tersi her zaman $f^{-1}(y)=x$ olarak verilmektedir. Fakat burada katılımcıdan $f^{-1}(y)=x$ ifadesinden $f(x)=y$'ye ulaşması beklenmektedir. Buda katılımcının bir fonksiyonun tersini alma kuralını alışılagelmişin dışında tersten düşünmesini gerektirmektedir. Fakat bu tür örneklerle çok fazla karşılaşmadıkları için de çözüm yaparken zorlanmaktadırlar. Bu aynı zamanda bir fonksiyonun tersini alma kuralını içselleştiremediği için farklı bir duruma transfer edemediğine de bir delil oluşturmaktadır. Bunun yanı sıra dışsal şemaları kullanan bazı katılımcılar ise ezberledikleri ama yanlış anımsadıkları kuralları anlamsız bir biçimde kullanarak problemlerdeki ifadeyi savunmaya çalışmışlardır. Eğer öğretmen adayları problemin çözümünde kullandıkları kuralların ne anlama geldiğini bilseler problemi çözerken yanlış kuralları kullanmayabilirlerdi.

Deneysel kanıt şemalarını kullanan birinci sınıf öğretmen adayları genellikle temel örnekleri kullanmışlardır. Deneysel şemaları kullanan katılımcılar ise seçtikleri örnek fonksiyonlarla eşitliğin doğruluğunu gösterirken örneklerle doğrulamanın kolay olduğunu ve kesin sonucu verdiğini dile getirmişlerdir. Hem yazılı sınavda ve hem de klinik görüşmede birinci sınıf katılımcılarının çoğunluğu deneysel şemaları kullanmışlardır. Çünkü örnekler öğretmen adayları için daha somut ve istenen ifadenin doğruluğunu örneklerle göstermek daha kolay olmaktadır. Bunu klinik görüşmeye katılan ÖA1B kodlu katılımcı da "Genelleme yapınca aklım karışıyor, o yüzden örnek verince daha somut oluyor. Daha somut bir şeyle göstermiş oluyorum gibi geliyor o yüzden örnek vermeyi tercih ediyorum." şeklinde dile getirmiştir. Bu da katılımcı için yeterli olmasına rağmen her zaman veya her problem durumunda kullanabileceği bir yöntem olmayabilir. Buda gösteriyor ki henüz birinci sınıfta öğrenimlerine devam etmekte olan öğretmen adayları henüz üniversiteye yeni başladıkları için liseden gelen bazı alışkanlıklarını devam ettirmektedirler.

Deneysel şemaları kullanan bazı katılımcılar tanımladıkları kümeleri venn şeması ile göstererek problemde verilen ifadeyi temel örnekler ile açıklamışlardır. Bunun sebeplerinden biri ise sınıfta uygulanan öğretim yöntemleri ve fonksiyonlar konusunun sunuluş biçimi olabilir. Çünkü Şandır, Argün ve Bulut (2005) fen lisesinde görev yapan öğretmenler ile yaptıkları çalışmanın sonucunda, katılımcıların yarısından fazlasının küme kavramı ile fonksiyon kavramını ilişkilendirdiklerini ortaya koymuşlardır (Şandır vd., 2005). Bu da öğretmenlerin öğretim yöntemini etkileyerek öğrencilerin de aynı düşünceye sahip olmalarına neden oluyor olabilir. Bunun yanı sıra fonksiyonlar konusunun yer aldığı eski programa ait ortaöğretim 9. sınıf ders kitaplarına bakıldığında fonksiyonlar konusunda sıkça küme ile gösterimlerin kullanıldığı görülmektedir (Aydın ve Asma, 2001). Ayrıca yeni programa göre hazırlanmış ders kitaplarında da fonksiyonlar konusunun yer aldığı bölümde küme ile gösterimlere sık sık yer verilmektedir (Edt. Alkan, 2006).

Deneysel şemaları kullanan katılımcıların bazıları ise kendi seçtikleri bir örneği problemde verilen ifadede yerine yazarak doğruluğunu göstermeye çalışmışlardır. Örneğin ÖA1D ve ÖA1B üçüncü problemde verilen ifadede F(x) fonksiyonunu ikinci dereceden bir fonksiyon olan $ax^2+bx+c$ olarak tanımlamalarına rağmen F(y) fonksiyonunu ÖA1D, dy+e ve ÖA1B'de by olarak tanımlamıştır. Oysa probleme göre F(y)'de ikinci dereceden bir fonksiyondur. Fakat her iki katılımcı da F(y) fonksiyonu yerine seçtikleri farklı bir fonksiyonu kullanmayı tercih etmişlerdir. Bunun en önemli nedeni katılımcıların değişkeni x olan bir fonksiyonu değişkeni y olan bir fonksiyon olarak yazmakta zorluk yaşamaları ile ilgili olabilir. Çünkü ÖA1D açıklamasında "Olur ama $ay^2+by+c$ gibi katsayıları eşit (F(x) ile) olamaz. Ne kadar x ve y'ler farklı olsa da, o yüzden biz 1. dereceden varsayalım, dy+e olsun, 1. dereceden bir fonksiyon, 2. dereceden de olabilirdi, sonuç aynı olurdu ama. Sonuç aynı olur. F(y)'yi yazalım o zaman, dy+e." şeklinde yapmıştır. Katılımcı burada F(x) ile F(y)'nin katsayılarının eşit olamayacağını düşünmektedir. Oysa ki problemde her iki fonksiyonun katsayıları eşit, sadece değişkenleri farklıdır. Fakat buna rağmen katılımcılar birinci dereceden fonksiyonlardan seçtikleri örnekleri kullanmışlardır. Bu da fonksiyon kavramındaki eksikliklerin bir göstergesi olabilir. Klinik görüşmelerde deneysel şemaları kullanan katılımcılardan ise sadece birisi hiçbir işlem yapmayarak sadece verilen ifadenin doğru olduğunu hissettiğini dile getirerek sezgisel şemaları kullanmıştır.

Deneysel şemaları kullanan katılımcılar genellikle seçtikleri bir örnek ile ifadenin doğruluğunu sağlayarak temel örnekleri kullanmışlardır. Birçok öğrenci için bir örneğin bir durumu sağlaması öğrencilere göre bir delil oluşturmaktadır. Bunun sonucunda da örneklere güvenmektedirler (Harel, 2007). Oysa ki her durumu bazen bir örneğin sağlaması yeterli olmamaktadır. Benzer biçimde Özer ve Arıkan'da (2002) çalışmalarında lise 2 öğrencilerinin matematik derslerinde kanıt yapabilme becerilerini tespit ederek öğrencilerin kanıt düzeylerini incelemişlerdir. Bu süreçte öğrenciler verilen bir ifadenin doğruluğunu gösterebilmek için özel sayısal değerler vermişler ve böylece de bu ifadenin doğruluğunu gösterdiklerine inanmışlardır (Özer ve Arıkan, 2002).

Analitik kanıt şemalarını kullanan birinci sınıf katılımcıları genellikle aksiyomatik kanıt şemalarını kullanmışlardır. Örneğin; sekizinci problemde katılımcıların çözümü yapabilmeleri için logaritma konusuna ve dolayısıyla da üslü sayılar konusuna hakim olmaları gerekmektedir. Hem logaritma ve hem de üslü sayılar konusu genellikle kurallara dayanan konulardır. Bu nedenle de katılımcılar bu konulara ait kuralları ve formülleri iyi bildikleri için genellikle analitik şemaları kullanmış olabilirler. Bunun yanı sıra birinci sınıflar üniversite sınavına girdiklerinde logaritma konusu da sınava dâhil olan konulardan biriydi. Bunun yanı sıra klinik görüşmede onuncu problemde katılımcıların tamamı analitik şemaları kullanarak problemi sonuçlandırmışlardır. Bunun en önemli nedenlerinden biri problemin soruluş biçimi olabilir. Çünkü son problem olan onuncu problem logaritmik fonksiyonların uygulanmasına yönelik bir problemdir. Ayrıca bu problemi çözmek için logaritma ile ilgili kullanılacak olan kural sekizinci problemde bulunmaktadır. Klinik görüşmeye katılan katılımcılarda bunu dile getirmişlerdir.

Bu süreçte ÖA1C ise birinci problemi çözerken zihinsel operasyonları kullanarak analitik kanıt şemalarından dönüştürülebilen kanıt şemasını kullanmıştır. Öğretmen adayı burada içselleştirdiği fonksiyon tanımı yardımıyla problemi çözmüş ve sonuçlandırmıştır.

Özetle; birinci sınıf katılımcıları yazılı sınavda genellikle deneysel şemaları kullanmalarına rağmen klinik görüşmelerde analitik şemaları kullanmışlardır. Oysa ki Sowder ve Harel'in (2003) yaptığı çalışmada üniversite öğrencileri genellikle deneysel ve dışsal şemaları kullanmışlardır. Bu süreçte dışsal şemaları kullanan birinci sınıf öğretmen adayları problemleri çözerken genellikle otorite kanıt şemasını kullanmışlardır. Bu süreçte de zaman zaman yaptıkları savunmaları sınıfta gördüklerini dile getirirken zaman zaman da öğrendikleri veya ezberledikleri kuralları ya yanlış anımsayarak problemleri çözmüşler veya da bu kuralları, tanımları yeni bir duruma transfer edememişlerdir. Bunun yanı sıra problemleri çözerken farklı kavramları birbirine karıştıran katılımcılar da olmuştur. Deneysel şemaları kullanan katılımcılar ise genellikle temel örnekleri kullanmışlardır. Bu süreçte katılımcılar şekil çizme, deneme yapma ve sayısal değer verme gibi yöntemler kullanmışlardır. Analitik şemaları kullanan katılımcılar ise dönüştürülebilen şemaları kullanmışlardır. analitik şemalardan ise genellikle aksiyomatik şemalar kullanılmıştır. Aksiyomatik şemaları kullanan katılımcılar tanımları ve kuralları kullanırken dönüştürülebilen şemayı kullananlar da zihinsel operasyonları kullanmışlardır.

### 4.3.2. İkinci Sınıfa Devam Eden İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kullandıkları Kanıt Şemaları

İlköğretim matematik öğretmenliğinde öğrenimlerine devam etmekte olan ikinci sınıf öğretmen adayları fonksiyonlar konusunu ortaöğretimde öğrenmişler ve üniversitede de birinci sınıfta Genel Matematik ve Soyut Matematik dersinde, ikinci sınıfta ise Analiz 1-2 ve Lineer Cebir 1-2 gibi dersler görmüşlerdir. Genel matematik dersinde fonksiyonlar konusu genel özellikleriyle öğretmen adaylarına sadece anımsatılırken soyut matematik dersinde matematiksel kanıt yöntemlerinin açıklanmasının yanı sıra fonksiyon kavramı, içine, örten, bire-bir, sabit, birim fonksiyonlar, fonksiyonların bileşkesi, ters fonksiyonlar ve fonksiyonlar ile ilgili uygulamalar yer almaktadır. Ayrıca Analiz 1 dersinde tek değişkenli fonksiyonlarda limit kavramı ve uygulamaları, tek değişkenli fonksiyonlarda süreklilik ve uygulamaları, tek değişkenli fonksiyonlarda türev kavramı ve türev alma kurallarının yanı sıra trigonometrik, logaritmik, üstel, hiperbolik fonksiyonlar ve bunların tersleri ile kapalı fonksiyonların türevleri yer almaktadır. Analiz 2 dersinde ise çok değişkenli fonksiyon kavramı, fonksiyon tanım ve değer kümeleri, fonksiyon çizimleri, iki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramı ve uygulamaları ile iki değişkenli fonksiyonlarda kısmi türev gibi konular bulunmaktadır. Lineer Cebir 1-2 derslerinde de doğrudan fonksiyonlar konusu işlenmemiş sadece Lineer Cebir 2'de uzaklı fonksiyonu yer almaktadır. Bu nedenle ikinci sınıf öğretmen adayları çalışmada ağırlıklı olarak ortaöğretim bilgileri ile Genel Matematik, Soyut Matematik ve Analiz 1-2 dersindeki bilgilerini kullanmaktadırlar. Bunu zaman zaman görüşmeler sırasında da dile getirdikleri olmuştur.

İkinci sınıfa devam etmekte olan katılımcılar yazılı sınavlar süresince her üç kanıt şemasını da kullanmışlardır. Bu süreçte ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken, dışsal şemalar daha az ve en az da deneysel şemaları kullanmışlardır. Bunun yanı sıra katılımcıların yaklaşık olarak dörtte biri de problemleri boş bırakmışlardır. İkinci sınıftan katılımcılar yazılı sınavda özellikle bazı problemlerde çok fazla boş bırakmışlardır. Zaten yazılı sınavın genel sonuçlarına da bakıldığında en çok boş bırakanların ikinci sınıflar olduğu görülmektedir. Özellikle altıncı ve yedinci problemi katılımcıların bazıları boş bırakmışlardır. Bu problemlerin her ikisinde de bileşke fonksiyon yer almaktadır. Bileşke fonksiyon içeren ikinci ve beşinci problemde de ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullandıkları görülmektedir. İkinci sınıftan klinik görüşmeye katılan öğretmen adayları ise ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanırken bunu analitik ve dışsal şemalar takip etmiştir. Ayrıca boş bırakılan problemde olmamıştır. Klinik görüşmede deneysel ve analitik şemaların kullanımı birbirine yakın iken dışsal şemalar bunlardan daha az kullanılmıştır. Klinik görüşmenin sonucunda katılımcılardan ikisi ağırlıklı olarak deneysel ve birisi de ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken bir katılımcı da dışsal ve deneysel şemaları eşit olarak kullanmıştır. Bu katılımcıların kullandıkları şemalar problemden probleme ise farklılık göstermiş ve katılımcılar farklı problemlerde farklı üç şemayı da kullanmışlardır.

Dışsal şemaları kullanan ikinci sınıf katılımcıları genellikle otorite kanıt şemasını kullanmışlardır. Bu süreçte Birinci problemi çözerken dışsal şemaları kullanan ikinci sınıf katılımcıları her fonksiyonun birebir olduğu tanımdan yola çıkarak eksik tanımlama yapmış olabilirler. Çünkü dışsal şemaları kullanan katılımcılardan biri açıklamasını "Şimdi bir yandan herhangi bir değer verelim. Şurda mesela 1 verdiğimiz zaman farklı bişey çıkıyo, 2 verdiğimiz zaman farklı bişey çıkıyo. 3 verdiğimiz zaman farklı, her seferinde farklı bi sonuç çıkıyo. Yani her bi değer için farklı bi değer geliyo. Fonksiyondur." biçiminde yapmıştır. Aslında katılımcının burada yaptığı açıklama birebirliğin tanımıdır. Öğretmen adayı bu açıklamayı her fonksiyonun birebir olduğu düşüncesiyle de yapmış olabilir. Çünkü Vinner (1983) yaptığı çalışmada öğrencilerin fonksiyonlar ile ilgili kavram görüntülerinden birinin "Her fonksiyon birebirdir." şeklinde olduğunu ortaya koymuştur (akt. Akkoç, 2006).

Bunun yanı sıra görüşmeye katılan öğretmen adaylarının bazıları problemlerde sorulan ifadelerin kanıtını daha önce sınıfta yaptıklarını dile getirerek dışsal şemalardan otoriteyi kullanmışlardır. Bu katılımcıların bazıları ise yazılı sınavda analitik şemaları kullanmışlardır. Yazılı sınavda da analitik şemaları kullanan katılımcılardan bazıları problemdeki ifadeyi daha önce sınıfta yapıldığı için anımsayarak yapmış olabilirler. Fakat bu durum ancak o öğretmen adayları ile görüşme yapılarak ortaya çıkabilecektir. Fakat diğer sınıf seviyelerinde öğretmen adaylarının dördüncü problemde analitik şemaları kullanarak yaptıkları çözümlerin aslında dışsal şema olduğu görüşmelerde ortaya çıkmıştır. Çünkü görüşmelerde öğretmen adayı yaptığı çözümü sınıfta yaptıklarını dile getirmiştir.

Dışsal şemaları kullanan katılımcılar genellikle birebirlik ve örtenlik tanımlarını birbirine karıştırmışlardır. Güveli ve Güveli'nin (2002) yaptıkları çalışmada da lise 1 öğrencileri fonksiyonlarda birebirlik ve örtenlik arasında bir ilişki olduğunu düşünmektedirler. Bu çalışmada da öğretmen adayları liseden kalan bazı yanılgıları sonucu birebirlik ve örtenliği birbirine karıştırmış olabilirler.

Deneysel şemaları kullanan katılımcılar ise genellikle temel örnekleri kullanmışlardır. Bu süreçte bazı katılımcılar hem klinik görüşmede ve hem de yazılı sınavda deneysel şemaları kullanan öğretmen adayları problemde sorulan ifadeyi kümeler ile göstermişlerdir. Bu da Karataş ve Güven'in (2003) yaptığı çalışma ile paralellik göstermektedir. Çünkü araştırmacılar da yaptıkları çalışmanın sonucunda Lise 1 ve Lise 2 öğrencilerinin fonksiyonun formal tanımını küme olarak gösterme eğiliminde olduklarını, matematik öğretmenliği öğrencilerinin ise örneklerle verme eğiliminde olduklarını ortaya çıkarmışlardır (Karataş ve Güven, 2003). Bu da gösteriyor ki öğretmen adayları üniversiteye geldiklerinde de liseden kalma alışkanlıklarını bırakamayarak küme olarak örnekleri kullanmayı birebirlik, örtenlik gibi bazı kavramlara da uygulamışlardır. Örneklerle göstermenin yeterli olduğunu katılımcılardan ÖA2D "Yeterli, yanlışlık kesin bi yargı yani. Hani bu hangi değerler için doğrudur, hangi değerler için yanlıştır belli değildir deseydi ben bunu kesinlikle kullanamazdım. Burada sormuş doğru mudur? Ben bi tane yanlış örnek verdiğimde yanlıştır bu." açıklaması ile dile getirmiştir. Burada katılımcı için seçtiği bir örneğin ifadeyi sağlamaması yanlış olduğunu göstermek için yeterli olmuştur.

Deneysel şemaları kullanan katılımcılar ise genellikle venn şemasını kullanarak problemi çözmüşlerdir. Şandır, Argün ve Bulut (2005) da yaptıkları çalışmada fen lisesindeki matematik öğretmenlerinin fonksiyon kavramı ile küme kavramını ilişkilendirdiklerini ortaya koymuşlardır. Buna bağlı olarak da öğretmen adayları lisede öğretmenlerinden öğrendiklerinden yola çıkarak deneysel şemaları kullanan katılımcılar da örtenliği venn şeması yardımıyla göstermiş olabilirler.

Deneysel şemaları kullanarak çözen katılımcılardan birisi ise seçtiği bir örnek ile ifadenin doğruluğunu sağladıktan sonra "Başka deneyebilirim ama hepsinin doğruluğunu gösteremem." açıklamasını yapmıştır. Bu da gösteriyor ki katılımcı problemde verilen ifadenin doğruluğunu deneme yanılma yöntemiyle göstermeye çalışmıştır. Flores'de (2006) çalışmasında birçok öğrencinin deneysel bir yaklaşım sergilediklerini ortaya koymuştur. Ayrıca birçok öğrenci için matematiksel bir durumun doğruluğunu göstermek için bir tek örnek kullanmak yeterli olmaktadır (Flores, 2006).

Deneysel şemaları kullanan katılımcıların hepsi de örneklere yer vermişlerdir. Çünkü öğrenciler örnekleri genellikle öğrendikleri fikirleri anlamakta ya da kontrol etmekte kullanmaktadırlar (Flores, 2002). Flores'in (2002, 2006) yaptığı çalışmaların yanı sıra Sowder ve Harel'in (1998) de yaptığı çalışmada öğrenciler genellikle deneysel şemaları kullanmışlardır. Bunun yanı sıra Özer ve Arıkan'ın (2002) çalışmasında da öğrenciler verilen bir ifadenin doğruluğunu gösterebilmek için özel sayısal değerler vermişler ve böylece de bu ifadenin doğruluğunu gösterdiklerine inanmışlardır (Özer ve Arıkan, 2002). Oysa öğrencilerin matematiksel durumlar için gösterdikleri örnekler sayısal durumlar için doğru olurken her durum için doğru olmayabilmektedir (Sowder ve Harel, 1998). Bu nedenle her zaman seçilmiş bir örneğe güvenmek yerine daha fazla örnek üzerinde gösterip genelleme yoluna gidilmesi daha uygun olabilir.

Analitik şemaları kullanan ikinci sınıf öğretmen adayları ise genellikle aksiyomatik şemayı kullanmışlardır. Analitik şemaları kullanan katılımcılar genellikle zihinlerinde oluşturdukları tanımları formal olarak vererek problemleri çözmüşlerdir. Bunun bir nedeni katılımcıların Soyut Matematik'in yanı sıra Analiz 1-2 derslerini de almış olmaları olabilir. Çünkü uygulamanın olduğu dönem aldıkları Analiz 2 dersinin içeriğinde çok değişkenli fonksiyon kavramı, fonksiyon tanım ve değer kümeleri bulunmaktadır. Bu da öğretmen adaylarının bu konuları tekrar anımsamalarına neden olduğu için bilgileri daha yenidir. Buna bağlı olarak da analitik şemaları kullanmış olabilirler. Bunun yanı sıra doğrudan uygulamaya yönelik olan onuncu problemi çözmek için öğretmen adaylarının kullanmaları gereken kural sekizinci problemde yer aldığından dolayı hiçbir katılımcı problemde bir zorluk yaşamayarak kuralı kullanmışlar ve çözümlerini yapmışlardır.

Sowder ve Harel'in (2003) yaptığı çalışmada üniversite öğrencileri genellikle deneysel ve dışsal şemaları kullanmış olmalarına rağmen bu çalışmada ikinci sınıf öğretmen adayları yazılı sınavda ağırlıklı olarak analitik ve görüşmede de deneysel şemaları kullanmışlardır. Fakat görüşmelerde deneysel ve analitik şemaların kullanımını birbirine son derece yakındır. Bunun yanı sıra dışsal şemaları kullananlar genellikle bildikleri tanımları yeni bir duruma transfer edemezken diğer bazıları da problemde verilen ifadenin doğruluğunu daha önce sınıfta gösterdiklerini belirtmişlerdir. Deneysel şemalarda ise öğretmen adaylarının tercih ettikleri problemde verilen ifadeyi seçtikleri küme yardımıyla örneklemek olmuştur. Bunun yanı sıra sağlamasını yapan veya sayısal değer veren katılımcılar da olmuştur. Analitik şemaları kullanan katılımcılar ise tanımları ve kuralları kullanmışlardır.

### 4.3.3. Üçüncü Sınıfa Devam Eden İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kullandıkları Kanıt Şemaları

İlköğretim matematik öğretmenliğinde öğrenimlerine devam etmekte olan üçüncü sınıf öğretmen adayları fonksiyonlar konusunu ortaöğretimde öğrenmiş olmalarının yanı sıra üniversitede birinci sınıfta Genel Matematik ve Soyut Matematik dersinde, ikinci sınıfta Analiz 1-2 ve Lineer Cebir 1-2, üçüncü sınıfta ise Analiz 3 gibi dersler de görmüşlerdir. Genel matematik dersinde fonksiyonlar konusu genel özellikleriyle öğretmen adaylarına sadece anımsatılırken soyut matematik dersinde matematiksel kanıt yöntemlerinin açıklanmasının yanı sıra fonksiyon kavramı, içine, örten, bire-bir, sabit, birim fonksiyonlar, fonksiyonların bileşkesi, ters fonksiyonlar ve fonksiyonlar ile ilgili uygulamalar yer almaktadır. Ayrıca Analiz 1 dersinde tek değişkenli fonksiyonlarda limit kavramı ve uygulamaları, tek değişkenli fonksiyonlarda süreklilik ve uygulamaları, tek değişkenli fonksiyonlarda türev kavramı ve türev alma kurallarının yanı sıra trigonometrik, logaritmik, üstel, hiperbolik fonksiyonlar ve bunların tersleri ile kapalı fonksiyonların türevleri yer almaktadır. Analiz 2 dersinde ise çok değişkenli fonksiyon kavramı, fonksiyon tanım ve değer kümeleri, fonksiyon çizimleri, iki değişkenli fonksiyonlarda limit kavramı ve uygulamaları ile iki değişkenli fonksiyonlarda kısmi türev gibi konular bulunmaktadır. Analiz 3 dersinde fonksiyon serilerinin uygulamalarına yer verilmektedir. Lineer Cebir 1-2 derslerinde de doğrudan fonksiyonlar konusu işlenmemiş sadece Lineer Cebir 2'de uzaklı fonksiyonu yer almaktadır. Bu nedenle üçüncü sınıf öğretmen adayları çalışmada ortaöğretim bilgilerinin yanı sıra Genel Matematik, Soyut Matematik ve Analiz 1-2-3 dersindeki bilgilerini de kullanmaktadırlar. Bunu zaman zaman görüşmeler sırasında da dile getirdikleri olmuştur.

Üçüncü sınıfa devam etmekte olan katılımcılar yazılı sınavlar süresince ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken dışsal ve deneysel şemalar analitik şemalara göre oldukça az kullanılmıştır. Üçüncü sınıftan klinik görüşmeye katılan öğretmen adayları da ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken bunu deneysel ve dışsal şemalar takip etmiştir. Yazılı sınav sonuçlarında şemaların kullanımı birbirine çok yakın olmamasına rağmen klinik görüşmede deneysel ve analitik şemaların kullanımı birbirine yakın iken dışsal şemalar bunlardan daha az kullanılmıştır. Klinik görüşmenin sonucunda katılımcılardan birisi ağırlıklı olarak dışsal, birisi ağırlıklı olarak deneysel ve birisi de ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken bir katılımcıda bütün şemaları eşit kullanmıştır. Bu katılımcıların kullandıkları şemalar problemden probleme farklılık göstermiş ve katılımcılar farklı problemlerde farklı üç şemayı da kullanmışlardır.

Üçüncü sınıflar yazılı sınavda analitik şemaları en çok kullanan sınıf seviyesi olmuşlardır. Bunun en önemli nedeni üçüncü sınıfların alan derslerinin hemen hemen tamamını görmüş olmaları olabilir. Çünkü dördüncü sınıflar üçüncü sınıflara ek olarak sadece bir tane alan dersi almaktadırlar. Bu nedenle de üçüncü sınıflar fonksiyonlar konusuna hakim olmalarının yanı sıra kanıtlama yöntemlerine dair de bilgi sahibidirler. Ayrıca derslerde sıkça formal kanıtlar yaptıkları için problemlerde verilen ifadeleri kanıtlamada herhangi bir zorluk yaşamamış olabilirler.

Dışsal şemaları kullanan katılımcıların çoğu otorite kanıt şemasını kullanmışlardır. Bu süreçte birinci problemde hem yazılı sınavda ve hem de görüşmelerde katılımcıların ağırlıklı olarak kullandıkları şema da dışsal şemadır. Dışsal şemayı kullanan öğretmen adaylarından ise ikisi fonksiyon tanımını Şandır, Argün ve Bulut'un (2005) çalışmasındaki matematik öğretmenleri gibi eksik olarak vermişlerdir. Bu da öğretmen adaylarının ezberledikleri tanımı tam olarak anımsayamadıklarını ortaya koymaktadır. Dışsal şema kullanan diğer katılımcı ise verilen ifadenin değer kümesi olmadığı için fonksiyon olmadığını dile getirmiştir. Bu öğretmen adayı da Vinner'in (1983) çalışmasındaki gibi cebirsel olarak ifade edilmeyen fonksiyonları, fonksiyon olarak kabul etmeyen bireylerdendir (akt. Akkoç, 2006).

Dışsal şemaları kullanan bazı katılımcılar ezberledikleri ama ya yanlış anımsadıkları ya da farklı durumlara transfer edemedikleri kuralları, tanımları kullanmışlardır. Bu süreçte bazı katılımcılar ezberledikleri birebirlik ve örtenlik gibi tanımları birbirine karıştırmışlardır. Katılımcılardan birisi tanımları ezberlediği için birebirliğin tanımını sözel olarak doğru biçimde vermesine rağmen g bileşke f(x)'i bulurken örtenliği kullanmıştır.Bazı katılımcılarda ezberledikleri tanım ve kurallar sonucu yanlış genellemelere ulaşarak problemleri sonuçlandırmışlardır. Örneğin; dokuzuncu problemi çözerken bir katılımcı f(x) ile $(f^{-1})^{-1}(x)$'in tanım ve değer kümelerinin aynı olduğunu göstermiştir. Oysa verilen ifadenin eşit olması için tanım ve değer kümelerinin birbirine eşit olması yetmemektedir. Bu ifadenin eşit olduğunu değil sadece tanım ve değer kümelerinin eşit olduğunu gösterir. Oysa ki tanım ve değer kümeleri birbirine eşit olan farklı fonksiyonlar yazılabilir.

Klinik görüşmede dışsal şemaları kullanan bazı öğretmen adayları ise problemleri doğrulamak için daha önce derste gördükleri kanıtı yaparak otoriteyi kullanmışlardır. Çalışmada yer alan yedinci problem de bir kuraldır ve katılımcılarda bu kuralı derslerden anımsamaktadırlar. Çünkü görüşmede dışsal şemaları kullanan öğretmen adaylarından birisi bu kuralı liseden anımsadığını dile getirirken diğeri de ifadenin doğruluğunu göstermek için yanlış anımsadığı farklı bir kuralı kullanmaya çalışmıştır. Üçüncü sınıfların bu problemde ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanmalarının bir diğer nedeni ise bileşke fonksiyonun tersini almakta zorlanmaları olabilir. Çünkü görüşmelerde ÖA3A $(fog)^{-1}(x)$ ve $g^{-1}of^{-1}(x)$'i a gibi bir değişkene eşitleyerek tersini almak istediğinde bunu yapamamıştır. Bunun nedeni ise öğrencilere fonksiyonlar konusunda her zaman f(x)=y olarak verilmekte ve tersini almaları istenmektedir. Oysa bu problemde ifade bileşke fonksiyonun tersidir ve öğretmen adayı tekrar tersini alamamıştır.

Deneysel şemaları kullanan katılımcılar çoğunlukla temel örnekleri kullanmışlardır. Deneysel şemaları kullanan katılımcıların hepsi de temel örnekleri kullanmışlardır. Flores'de (2006) çalışmasında birçok öğrencinin deneysel bir yaklaşım sergilediklerini ortaya koymuştur. Ayrıca birçok öğrenci için matematiksel bir durumun doğruluğunu göstermekte için bir tek örnek kullanmak yeterli olmaktadır (Flores, 2006). Bunun yanı sıra sayısal değerler vererek problemdeki ifadeyi doğrulayan öğretmen adayları da olmuştur. Benzer biçimde Özer ve Arıkan'da (2002) öğrencilerin verilen bir ifadenin doğruluğunu gösterebilmek için özel sayısal değerler verdiklerini ve böylece de bu ifadenin doğruluğunu gösterdiklerine inandıklarını ortaya koymuşlardır (Özer ve Arıkan, 2002).

Temel örnekleri kullanan öğretmen adayları ise farklı biçimlerde örneklendirmeler veya denemeler yapmaktadırlar. Bu süreçte kullandıkları bir örnek yöntemi ise venn şeması ile örnek bir küme tanımlayarak problemde sorulan ifadeyi doğrulamaktır. Şandır, Argün ve Bulut'un (2005) yaptıkları çalışmada da öğretmenlerin %58,2'si fonksiyonların bir küme olduğunu belirtmişlerdir. Burada da venn şeması kullanan katılımcılar fonksiyonları bir küme olarak düşünüyor olabilir. Bunun yanı sıra bazı problemlerde de katılımcılar kendilerinin seçtikleri bir fonksiyon ifadesi ile problemde verilen eşitliği sağlayarak doğruluğunu göstermişlerdir. Bu süreçte deneysel şemaları kullanan katılımcılar ise seçtikleri örnek bir fonksiyon yardımı ile ifadenin doğruluğunu göstermişlerdir.

Dördüncü problemde deneysel şemaları kullanan iki katılımcı ise kökleri denklemde yerine yazarak köklerin denkleme ait olduğunu göstermeye çalışmışlardır. Bu katılımcılardan ÖA3A ise bunu "Şu değeri denklemde yerine koyarsam eğer yine sıfıra eşit oluyorsa bunu sağlıyordur demek. Kökün zaten denklemi sağlaması lazım. O zaman x yerine bunu yazarsam denklemi elde etmiş olurum ama." şeklinde ifade etmiştir. Aydoğdu İskenderoğlu'nun (2003) yaptığı çalışmada da deneysel şemaları kullanan öğrencilerin bir ifadenin doğruluğunu göstermek için sık sık kullandıkları yollardan biridir.

Analitik şemaları yazılı sınavda en çok kullanan sınıf seviyesi üçüncü sınıflar olmuştur. Klinik görüşmelerde de en çok kullandıkları şema analitik şema olmasına rağmen deneysel ve analitik şemaları hemen hemen aynı oranda kullanmışlardır. Analitik şemaların ağırlıklı olarak kullanılmasının nedenlerinden biri katılımcıların bu konularda bilgi birikimlerinin yeterli olması olabilir. Üçüncü sınıflar alan derslerinin hemen hemen hepsini gördükleri için analitik şemaları diğer şemalardan daha fazla kullanmış olabilirler. Üçüncü sınıflarda analitik şemalardan genellikle aksiyomatik şemaları kullanmışlardır.

Sowder ve Harel'in (2003) yaptığı çalışmada üniversite öğrencileri genellikle deneysel ve dışsal şemaları kullanmış olmalarına rağmen bu çalışmada üçüncü sınıf öğretmen adayları yazılı sınavda ve klinik görüşmede ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmışlardır. Fakat görüşmelerde deneysel ve analitik şemaların kullanımını birbirine son derece yakındır. Bunun yanı sıra dışsal şemaları kullananlar genellikle bildikleri tanımları yeni bir duruma transfer edemezken diğer bazıları da problemde verilen ifadenin doğruluğunu daha önce sınıfta gördüklerini belirtmişlerdir. Bunun yanı sıra bu katılımcılardan kuralları anlamsız bir biçimde kullananları da olmuştur. Deneysel şemalarda ise öğretmen adaylarının tercih ettikleri yöntem problemde verilen ifadeyi seçtikleri küme yardımıyla örneklemek olmuştur. Bunun yanı sıra sağlamasını yapan katılımcılar da olmuştur. Ayrıca deneysel şemaları kullanırken deneme yanılma yolunu kullanan veya sayısal değerlerle problemdeki ifadeyi doğrulayan katılımcılar da olmuştur. Analitik şemaları kullanan katılımcılar ise tanımları ve kuralları kullanmışlardır.

### 4.3.4. Dördüncü Sınıfa Devam Eden İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kullandıkları Kanıt Şemaları

İlköğretim matematik öğretmenliğinde öğrenimlerine devam etmekte olan üçüncü sınıf öğretmen adayları fonksiyonlar konusunu ortaöğretimin yanı sıra üniversitede birinci sınıfta Genel Matematik ve Soyut Matematik dersinde, ikinci sınıfta Analiz 1-2 ve Lineer Cebir 1-2, üçüncü sınıfta Analiz 3 ve dördüncü sınıfta da Elementer Sayı Kuramı dersinde görmüşlerdir. Elemanter Sayı Kuramı dersinde sayılar teorisinde önemli fonksiyonlara değinilmektedir.

Dördüncü sınıfa devam etmekte olan katılımcılar yazılı sınavlar süresince ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken bunu dışsal ve çok az kullanılan deneysel şemalar takip etmiştir. Bunun yanı sıra katılımcıların dörtte biri de problemleri boş bırakmışlardır. Dördüncü sınıftan klinik görüşmeye katılan öğretmen adayları da ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken bunu dışsal ve deneysel şemalar takip etmiştir. Ayrıca üç tane problemde boş bırakılmıştır. Yazılı sınav ve görüşmede deneysel şemalar diğerlerine göre oldukça az kullanılmıştır. Klinik görüşmenin sonucunda ise katılımcılardan birisi ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken katılımcılardan birisi bütün şemaları eşit oranda ve ikisi de dışsal ve analitik şemaları eşit oranda kullanmışlardır. Bu katılımcıların kullandıkları şemalar problemden probleme farklılık göstermiş ve katılımcılar farklı problemlerde farklı şemaları da kullanmışlardır.

Yazılı sınavda analitik şemaları en çok kullananlar üçüncü sınıflar olmasına rağmen dördüncü sınıflarda çok az bir düşüş bulunmaktadır. Fakat üçüncü ve dördüncü sınıflar hemen hemen aynı oranda kullanmışlardır. Bu küçük düşüşün nedeni ise dördüncü sınıf öğretmen adaylarının KPSS sınavına odaklanmış olmaları olabilir. Çünkü görüşmeler mayıs ve haziran aylarında yapılmıştır ve KPSS sınavına da çok az bir süre kalmıştır. Katılımcılarda artık KPSS sınavına odaklandıklarını görüşmeler sırasında dile getirmişlerdir. Dördüncü sınıfların ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmalarındaki en önemli neden ise alan derslerinin tamamını görmüş olmaları olabilir. Bu nedenle de dördüncü sınıflar fonksiyonlar konusuna hakim olmalarının yanı sıra kanıtlama yöntemlerine dair de bilgi sahibidirler. Ayrıca derslerde sıkça formal kanıtlar yaptıkları için problemlerde verilen ifadeleri kanıtlamada herhangi bir zorluk yaşamamış olabilirler. Ayrıca yazılı sınavla paralele olarak dördüncü sınıflar görüşmeler sırasında da ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmışlardır.

Dördüncü sınıflardan dışsal şemaları kullanan öğretmen adaylarının en çok kullandıkları otorite kanıt şeması olmuştur. Görüşmede dışsal şemaları kullanan öğretmen adayları fonksiyon kavramını tanımlarken farklı kavramlar kullanmışlardır. Bunu katılımcılardan ÖA4B ve ÖA4D "Fonksiyon olabilmesi için öncelikle birebir ve örten olması lazım. Öğretmenlerden faydalandığım bir bilgi bu. Birebir ve örten olduğunu öğretmenlerimiz sadece söylemişti bize. Ama 1. sınıfta soyut matematikte bunun üzerinde çok uğraştık. Şu an 4. sınıfız tamamıyla unutmuş bir haldeyiz." şeklinde belirtmişlerdir. Katılımcılara göre bir ifadenin fonksiyon olabilmesi için birebir ve örten olması gerekmektedir. Bunun bir nedeni katılımcıların daha önce öğrendikleri ve muhtemelen ezberledikleri bilgiler yardımıyla fonksiyonu tanımlamaya çalışmış olmaları olabilir. Bir diğer nedeni ise katılımcıların her fonksiyonun birebir olduğunu düşünmeleri olabilir. Çünkü Vinner'ın (1983) çalışmasının sonuçlarına göre öğrenciler her fonksiyonun birebir olduğunu düşünmektedirler (akt. Akkoç, 2006).

Dışsal şemaları kullanan dördüncü sınıf öğretmen adayları birebirlik ve örtenlik kavramlarını birbirine karıştırmışlardır. Çünkü çalışmaya katılan dördüncü sınıf öğretmen adaylarından birisi sözel olarak birebirlik tanımını doğru vermiş fakat matematiksel olarak g bileşke f'in birebirliğini gösterirken örtenlik şeklinde yapmıştır. Bu da katılımcıların birebirlik ve örtenliğin matematiksel gösterimlerini birbirine karıştırdıklarını göstermektedir. Bir diğer nedeni ise birebirlik ve örtenlik arasında bir ilişki olduğunu zannetmeleri olabilir. Çünkü Güveli ve Güveli (2002) yaptıkları çalışmada öğrencilerin birebirlik ve örtenlik arasında bir ilişki olduğunu düşündüklerini ortaya koymuşlardır. Bunun yanı sıra katılımcılardan bazıları bazı problemin kanıtını daha önce derste gördüklerini veya yazılı sınavdan sonra arkadaşlarından öğrendiklerini dile getirmişlerdir.

Deneysel şemaları kullanan katılımcılar diğer sınıf seviyelerinde de olduğu gibi genellikle temel örnekleri kullanmışlardır. Bu süreçte dördüncü sınıfların en çok kullandıkları yöntem f ve g yerine birer fonksiyon tanımlayarak verilen ifadenin eşitliğini göstermek olmuştur. Çünkü öğrenciler için bir durumun doğruluğunu bir örneğin sağlaması yeterli olmaktadır (Flores, 2006). Bunun yanı sıra bazı çalışmalarda örnekler ile göstermenin öğrencilere daha anlaşılır ve somut geldiği de ortaya konulmuştur (Martin ve Harel, 1989; Harel ve Sowder, 2007). Burada katılımcıların deneysel şemaları kullanmalarının nedenlerinden biri problemin ifadesi ile de ilgili olabilir. Çünkü Aydoğdu İskenderoğlu'nun (2003) yaptığı çalışmada problemin ifadesinin kullanılan şemayı etkilediği ortaya konulmuştur. Deneysel şemaları kullanan katılımcılardan bazıları ise problemleri deneme yanılma yöntemi ile çözmeye çalışmışlardır.

Dördüncü sınıf öğretmen adaylarının hem yazılı sınavda ve hem de görüşmeler sırasında ağırlıklı olarak kullandıkları şema analitik şemalar olmuştur. Diğer sınıf seviyelerinde olduğu gibi dördüncü sınıflarda analitik şemalardan genellikle aksiyomatik şemaları kullanmışlardır. Bu da katılımcıların bilgi birikimlerinin bir sonucu olabilir. Çünkü bir bireyin analitik şemaları kullanabilmesi için o konuya ait tanımları, terimleri, kuralları vs. bilmesi gerekmektedir (Sowder ve Harel, 1998). Analitik şemaları kullanan dördüncü sınıf öğretmen adayları ise problemlerde tanımları, kuralları kullanmışlardır.

Sowder ve Harel'in (2003) yaptığı çalışmada üniversite öğrencileri genellikle deneysel ve dışsal şemaları kullanmış olmalarına rağmen bu çalışmada dördüncü sınıf öğretmen adayları yazılı sınavda ve klinik görüşmede ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmışlardır. Fakat görüşmelerde analitik şemaların kullanımını dışsal şemalar takip etmektedir. Bunun en önemli nedeni ise KPSS sınavına odaklanmış olan katılımcıların sürekli teste dayalı çalışmaya başlamış olmaları olabilir. Bunun yanı sıra dışsal şemaları kullananlar genellikle bildikleri tanımları yeni bir duruma transfer edemezken diğer bazıları da problemde verilen ifadenin doğruluğunu daha önce sınıfta gördüklerini belirtmişlerdir. Ayrıca bu katılımcılardan kuralları anlamsız bir biçimde kullananları ve ezberledikleri tanımları, kuralları yanlış anımsayanları da olmuştur. Deneysel şemalarda ise öğretmen adaylarının tercih ettikleri yöntem problemde verilen ifadeyi seçtikleri küme yardımıyla örneklemek olmuştur. Bunun yanı sıra sağlamasını yapan veya sayısal değer veren katılımcılar da olmuştur. Ayrıca deneysel şemaları kullanırken deneme yanılma yolunu kullanan veya yerine koyma yöntemi ile problemdeki ifadeyi doğrulayan katılımcılar da olmuştur. Analitik şemaları kullanan katılımcılar ise tanımları ve kuralları kullanmışlardır.

Yazılı sınavda ve görüşmede katılımcılar genellikle analitik şemaları kullanırken yazılı sınavda problemleri boş bırakanların oranı da oldukça yüksektir. Problemin boş bırakılmasının bir nedeni katılımcıların fonksiyonlar konusundaki eksiklikleri olabilir. Çünkü görüşmelerde boş bırakan katılımcılardan fonksiyonlar konusunu üniversitede görmediklerini veya çok az gördüklerini belirtenler olmuştur.

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları kanıtları ilköğretim ve ortaöğretimdeki öğretmenlerinin yanı sıra üniversitedeki öğretim üyeleri de etkilemiş olabilir. Çünkü öğretmenlerin kanıta bakış açıları ve sınıf içindeki kullanımları öğrencilerin kanıta bakış açılarını ve kullanımlarını etkilemektedir. Knuth (2002b) yaptığı çalışmada öğretmenlerin matematik için kanıtı anlamalarını (kavrayışlarını) incelemiştir. Bu süreçte bazı öğretmenlerin öğrencilerine kanıtı, matematik çalışmak için bir araç olarak görmekten ziyade çalışmak için bir başlık olarak önerdiklerini ve lisede birçok öğrenci için uygun olmadığını düşündüklerini ortaya koymuştur. Bunun sonucunda da araştırmasında öğretmenlerin bir kısmının kanıtı yüksek düzeyde yani ileriki sınıflardaki öğrenciler için kullanılmasını uygun görerek tavsiye ettiklerini görmüştür. Öğretmenlerin birçoğu kanıtı alt sınıflardaki öğrenciler için uygun bulmadıklarını ve alt sınıflar için informal kanıtları uygun bulduklarını ortaya koymuştur (Knuth, 2002b). Bunu da "İnformal kanıtlar ilkokulda incelenebilir ve formal kanıtlarda lisede incelenebilir. Çünkü her ikisini aynı anda öğretmek benim için zor oluyor" şeklinde açıklayan öğretmenler vardır (Galbraith, 1995). Bunun yanı sıra informal kanıtların ilerde kullanacakları formal kanıtları geliştirmekte bir basamak olduğunu düşünen öğretmenler de bulunmaktadır (Knuth, 2002b). Fakat bazı öğretmenler bu düşüncelere rağmen formal, cebirsel kanıtları tercih etmektedirler (Healy ve Hoyles, 2000).

Kısaca; kanıtlamada kullanılan çok çeşitli stratejiler ve farklı yollar bulunmaktadır. Aynı teorem için birçok kanıt bulunabilir. Hatta iki kişi aynı kanıta ulaşsalar bile kanıtı elde etmek için kullandıkları akıl yürütme yolları çok çeşitli olabilir (Raman, 2003).

Öğrenciler de kimi zaman kanıtlarken tek bir düşünme biçimine veya tek bir yaklaşıma, tek bir yola bağlı kalmamaktadırlar. Harel ve Sowder'da (1998) bir kişinin her zaman tek bir kanıt şemasına sahip olmadığını bazı durumlarda kişinin aynı anda farklı şemaları kullanarak kanıtlayabileceğini söylemişlerdir. Raman'ın (2003) çalışması da bu görüşü doğrulamaktadır. Benzer şekilde, Aydoğdu, Olkun ve Toluk (2003) bazı öğrencilerin farklı problemlerde tek bir şemayı kullanırken, bazı öğrencilerin de farklı problemlerde farklı şemalar kullandıklarını gözlemişlerdir. Rodriguez (2006) ise çalışmasında, matematik öğretmenlerinin dinamik ortamda Cabri kullanarak kanıtlamalarını gözlemiş ve öğretmenlerin birkaç kanıt şemasının özelliklerini gösterdiklerini belirlemiştir (Rodriguez, 2006). Yapılan bu çalışmada da sadece bir öğretmen adayı klinik görüşmelerde dışsal ve analitik şemaları kullanıp deneysel şemaları kullanmazken diğer katılımcılar klinik görüşmelerde farklı problemlerde farklı üç şemayı da kullanmışlardır.

Ayrıca bütün sınıf seviyelerinde dışsal şemalardan ağırlıklı olarak otorite, deneysel şemalardan temel örnekler ve analitik şemalardan da aksiyomatik kullanılmıştır. Bu süreçte yazılı sınavda sadece birinci sınıflar ağırlıklı olarak dışsal şemaları kullanırken diğer sınıf seviyeleri analitik şemaları kullanmışlardır. Fakat klinik görüşmelerde sadece ikinci sınıflar ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanırken diğer sınıf seviyeleri analitik şemaları kullanmışlardır. Bu süreçte ise 1, 2 ve 3. sınıfların deneysel ve analitik şemaları kullanımı birbirine son derece yakın iken dördüncü sınıflarda analitik şemaların ardından en çok kullanılan şema dışsal şemalar olmuştur. Bütün sınıf seviyelerinde kullanılan dışsal şemalarda ezberlenmiş kurallar, tanımlar kullanılmış veya bunlar yanlış olarak anımsanmıştır. Bunun yanı sıra bazı katılımcılar kaynak olarak öğretmen, arkadaş veya dersi göstermişlerdir. Ayrıca kuralları anlamsız olarak kullanan katılımcıların yanı sıra problemde kullanılması gereken kavramı doğru biçimde tanımlayıp yeni duruma transfer edemeyen katılımcılarda olmuştur. Deneysel şemalarda ise katılımcıların en çok kullandıkları yöntem şekil çizme, yerine koyma, deneme yapma, sağlamasını yapma, sayısal değer verme ve bir örnek ile problem durumunu doğrulama olmuştur. Analitik şemalarda katılımcılar genellikle içselleştirdikleri tanımları, kavramları veya kuralları yeni duruma da transfer ederek matematiksel olarak problemleri savunmuşlardır.

### 4.4. Farklı Sınıf Seviyelerindeki İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel Kanıta Yönelik Görüşleri ile Kullandıkları Kanıt Şemaları Arasındaki İlişkiye Ait Bulguların Tartışılması

Çalışmanın bu kısmında farklı sınıf seviyelerinden öğretmen adaylarının ölçekte yer alan faktörler ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir fark olup olmadığına ve nedenlerine yer verilecektir.

Ölçekte yer alan güven boyutu ile dışsal, deneysel, analitik kullanan ve boş bırakan katılımcılar arasında anlamlı bir fark olup olmadığına Mann-Whitney U testi ile bakılmıştır. Bu yapılırken de kanıta yönelik güveni düşük ve yüksek olan katılımcıların kullandıkları şemalar karşılaştırılmıştır. Bu süreçte dışsal, deneysel ve analitik şemaları kullananlar ile güven boyutu arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Fakat kanıt konusunda güveni düşük olan katılımcılar ile problemleri çözemeyerek boş bırakan katılımcıların arasında anlamlı bir fark bulunmaktadır. Diğer bir ifadeyle güveni düşük olan katılımcılar problemleri çözemeyerek daha çok boş bırakmışlardır. Bunun nedeni ise katılımcıların kendilerine güvenmedikleri için problemi nasıl çözeceklerine karar verememeleri olabilir. Ayrıca bir diğer nedeni de katılımcıların boş bıraktıkları problemlerin içerdiği kavramın ne olduğunu bilmemelerinden kaynaklanıyor olabilir. Bir diğer nedeni ise katılımcıların kanıt yapmayı zor bulması veya matematiksel kanıt yapmayı sevmemsi olabilir. Bunun yanı sıra klinik görüşmeye katılan katılımcıların kullandıkları şemalar ile güven boyutu arasında anlamlı bir fark bulunmamaktadır. Fakat klinik görüşmelerde ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanan 4 katılımcıdan 2'sinin kanıta yönelik güvenleri diğer şemaları kullanan bazı katılımcılara göre daha düşüktür.

Ölçekte yer alan özdeğerlendirme boyutu ile dışsal, deneysel, analitik kullanan ve boş bırakan katılımcılar arasında anlamlı bir fark olup olmadığına Mann-Whitney U testi ile bakılmıştır. Bu yapılırken de kanıta yönelik özdeğerlendirmesi düşük ve yüksek olan katılımcıların kullandıkları şemalar karşılaştırılmıştır. Bu süreçte dışsal, deneysel ve analitik şemalar ile özdeğerlendirme arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Bunun yanı sıra problemi boş bırakma ile özdeğerlendirme arasında da bir farka rastlanmamıştır. Ayrıca klinik görüşmeye katılan katılımcıların kullandıkları şemalar ile özdeğerlendirme faktörü arasında anlamlı bir fark bulunmamaktadır. Fakat klinik görüşmelerde ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanan 4 katılımcıdan 3'ünün kanıta yönelik özdeğerlendirmeleri diğer şemaları kullanan bazı katılımcılara göre daha düşüktür.

Ölçekte yer alan tutum-inanç boyutu ile dışsal, deneysel, analitik kullanan ve boş bırakan katılımcılar arasında anlamlı bir fark olup olmadığına Mann-Whitney U testi ile bakılmıştır. Bu yapılırken de kanıta yönelik tutum-inancı düşük ve yüksek olan katılımcıların kullandıkları şemalar karşılaştırılmıştır. Bu süreçte dışsal, deneysel ve analitik şemaları kullananlar ile tutum-inanç boyutu arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Problemleri çözemeyerek boş bırakanlar ile kanıt konusunda tutum ve inancı düşük olan katılımcılar arasında anlamlı bir fark bulunmaktadır. Diğer bir ifadeyle kanıta yönelik tutum ve inancı düşük olan katılımcılar problemleri çözemeyerek daha çok boş bırakmışlardır. Bunun nedeni kanıta yönelik tutumu ve inancı düşük olduğu için bireyin kanıtı nasıl yapacağına karar verememesi veya kanıta nasıl başlayacağını bilememesi olabilir. Bunun yanı sıra klinik görüşmeye katılan katılımcıların kullandıkları şemalar ile tutum-inanç boyutu arasında anlamlı bir fark bulunmamaktadır. Fakat klinik görüşmelerde ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanan 4 katılımcıdan 2'sinin kanıta yönelik tutum ve inançları diğer şemaları kullanan bazı katılımcılara göre daha düşüktür.

Ölçekte yer alan zihinsel süreç boyutu ile dışsal, deneysel, analitik kullanan ve boş bırakan katılımcılar arasında anlamlı bir fark olup olmadığına Mann-Whitney U testi ile bakılmıştır. Bu yapılırken de kanıta yönelik zihinsel süreci düşük ve yüksek olan katılımcıların kullandıkları şemalar karşılaştırılmıştır. Bu süreçte dışsal, deneysel şemaları kullananlar ve boş bırakanlar ile zihinsel süreç boyutu arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Fakat kanıt konusunda zihinsel süreci yüksek olan katılımcılar ile problemleri çözerken analitik şemaları kullanan katılımcılar arasında anlamlı bir fark bulunmaktadır. Diğer bir ifadeyle zihinsel süreci yüksek olan katılımcılar problemleri daha çok analitik şemaları kullanarak çözmüşlerdir. Ölçekte zihinsel süreç boyutunda yer alan maddelerde kanıt yaparken tanımları, teoremleri, önceki bilgileri vs. kullanırım gibi ifadeler bulunmaktadır. Bu çalışmada da analitik şemaları kullanan katılımcılar genellikle aksiyomatik şemaları kullanmışlardır. Aksiyomatik şemalar ise tanım ve teoremlerin kullanılmasını içermektedir. Ölçekte de katılımcıların bu ifadeleri içeren maddelere genellikle "sık sık" yanıtını verdikleri görülmektedir. Bunun yanı sıra ölçekte yer alan "Matematiksel kanıt yaparken neye/nelere gereksinim duyarsınız?" sorusuna da katılımcıların çoğu tanımlara, teoremlere, önceki bilgilerime gibi yanıtlar vermişlerdir. Bunun yanı sıra klinik görüşmeye katılan katılımcıların kullandıkları şemalar ile zihinsel süreç faktörü arasında anlamlı bir fark bulunmamaktadır. Fakat klinik görüşmelerde ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanan 4 katılımcıdan 2'sinin kanıta yönelik zihinsel süreçleri diğer şemaları kullanan bazı katılımcılara göre daha düşüktür.

Özetle; yazılı sınavda dışsal, deneysel ve analitik şemaları kullananlar ile güven, özdeğerlendirme ve tutum-inanç boyutu arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Fakat kanıtı yönelik güveni ve tutum-inancı düşük olanlar ile problemi çözemeyerek boş bırakanlar arasında anlamlı bir farklılık bulunmaktadır. Diğer bir ifadeyle güveni düşük olan katılımcılar problemleri çözemeyerek daha çok boş bırakmışlar ve kanıta yönelik tutum ve inancı düşük olan katılımcılar problemleri çözemeyerek daha çok boş bırakmışlardır. Bunun yanı sıra problemi boş bırakma ile özdeğerlendirme arasında bir farka rastlanmamıştır. Ayrıca dışsal, deneysel şemaları kullananlar ve boş bırakanlar ile zihinsel süreç boyutu arasında anlamlı bir farka rastlanmamış fakat analitik şema kullananlar ile zihinsel süreç arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır. Diğer bir ifadeyle zihinsel süreci yüksek olan katılımcılar problemleri daha çok analitik şemaları kullanarak çözmüşlerdir. Bunlara ek olarak klinik görüşmelere katılan katılımcıların kullandıkları şemalar ve boş bırakma ile kanıta yönelik güven, özdeğerlendirme, tutum-inanç ve zihinsel süreç arasında da anlamlı bir fark ortaya çıkmamıştır. Fakat klinik görüşmelerde ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanan bazı katılımcıların kanıta yönelik zihinsel süreçleri, güvenleri, tutum-inançları ve özdeğerlendirmeleri diğer şemaları kullanan bazı katılımcılara göre daha düşüktür.

## 5. SONUÇLAR

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıta ilişkin görüşlerini ve fonksiyonlar konusunda farklı sınıf düzeylerinde ne tür kanıt şemaları kullandıklarını tespit etmeyi amaçlayan bu çalışmada, öğretmen adaylarının kanıta ilişkin görüşlerini tespit etmek için "Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği" kullanılmış, kullandıkları kanıt şemalarını ortaya çıkarmak için ise yazılı sınavın yanı sıra klinik görüşmeler yapılarak farklı sınıflar arasındaki değişimler de açığa çıkarılmıştır. Bu amaç doğrultusunda yazılı sınav kâğıtları ile klinik görüşmelerden elde edilen veriler karakterizasyon tabloları yardımıyla analiz edilmiştir. Bulgulardan elde edilen benzer ve farklı durumları yansıtan veriler yorumlanarak tartışıldıktan sonra aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

### 5.1. Farklı Sınıf Seviyelerindeki İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel Kanıta Yönelik Görüşleri Genellikle Olumludur

Çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıta yönelik görüşleri zihinsel süreç, güven, özdeğerlendirme ve tutum-inanç olmak üzere dört boyutşeklinde değerlendirilmiştir.

- Öğretmen adaylarının kanıta yönelik görüşleri olumlu yöndedir.

Ölçeğin bütün sınıflar bazında genel ortalaması gösteriyor ki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıta yönelik görüşleri olumlu yöndedir.

- Öğretmen adaylarımatematiksel kanıt yaparken zihinsel süreçlerini sık sık kullanmaktadırlar.

Çalışmada yer alan ölçekteki faktörlerden biri zihinsel süreçtir. Katılımcıların kanıt yapmaya yönelik zihinsel süreç içeren maddelerdeki genel ortalamaları katılımcıların kanıta zihinsel olarak olumlu yaklaştıklarını göstermektedir. Diğer bir ifadeyle katılımcılar kanıta dair zihinsel süreçlerini sık sık kullanmaktadırlar.

- Zihinsel süreç faktörü ile farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmaktadır.

Ortalamalara bakıldığında bütün sınıf seviyelerinde zihinsel süreçlerin kanıtta sık sık kullanıldığı görülmektedir ve farklı sınıf seviyelerinin ortalamaları birbirine yakın değerlerdedir. Bu da gösteriyor ki bütün sınıf seviyelerinden katılımcılar matematiksel kanıt yapmak için tanım ve teoremlere gereksinim duymaktadırlar. Zihinsel süreçte en düşük ortalamaya dördüncü sınıflar sahipken en yüksek ortalamaya da birinci sınıfların sahip olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra ölçekte yer alan zihinsel süreç ile sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık olduğu görülmüştür. Test sonuçlarına göre ise zihinsel süreç boyutunda birinci ile dördüncü sınıflar arasında ve yine ikinci ile dördüncü sınıflar arasında anlamlı bir farklılık olduğu ortaya çıkmıştır.

- Katılımcılar kanıt yapma konusunda kendilerine bazen güvenmektedirler.

Ölçekte yer alan diğer faktör ise güvendir. Ölçeği yanıtlandıran katılımcıların genel ortalaması göz önünde bulundurulduğunda katılımcıların genelinin kanıt konusunda bazen kendilerine güvendikleri görülmektedir.

- Güven faktörü ile farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır.

Ortalamalar birbirine çok yakın olmasına rağmen kanıt konusunda güveni en yüksek olanlar dördüncü sınıflar iken kanıt konusunda güveni en düşük olanlar da ikinci sınıflardır. Fakat yapılan istatistiki test sonucu farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır.

- Öğretmen adayları kanıt yaparken sık sık özdeğerlendirme yapmaktadırlar.

Ölçekteki bir diğer faktör bireylerin kanıt konusunda kendilerini değerlendirmelerine ve yaptıklarına tekrar dönüp bakmalarına yönelik olarak özdeğerlendirmedir. Bütün katılımcıların kanıt konusunda özdeğerlendirme yapma ortalamaları gösteriyor ki katılımcılar kanıt yaparken sık sık kendilerini değerlendirmekte ve yaptıklarını tekrar gözden geçirmektedirler.

- Özdeğerlendirme faktörü ile farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır.

Farklı sınıf seviyelerinin özdeğerlendirme ortalamaları birbirine son derece yakındır ve bütün sınıf seviyelerinde katılımcıların kanıta dair sık sık özdeğerlendirme yaptıkları ortaya çıkmıştır. Fakat yapılan istatistiki test sonuçlarına göre farklı sınıf seviyeleri ile özdeğerlendirme arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır.

- Öğretmen adaylarının ölçekte yer alan tutum-inanç boyutuna dair görüşleri olumludur.

Ölçekteki son faktör ise tutum-inançdır. Farklı sınıf seviyelerinden çalışmaya katılan öğretmen adaylarının kanıta dair tutum-inanç konusundaki genel ortalamaları gösteriyor ki ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt konusundaki tutum ve inançları olumlu yöndedir.

- Tutum-inanç faktörü ile farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır.

Bütün sınıfların ortalamalarına tek tek bakıldığında farklı sınıf seviyelerinde kanıta yönelik tutum-inançlarının yüksek olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra sınıfların ortalamaları birbirine son derece yakın olmasına rağmen en yüksek ortalamaya birinci sınıflar sahipken en düşük ortalamaya da dördüncü sınıflar sahiptir. Fakat yapılan istatistiki test sonucu farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır.

Özetle; ölçekte yer alan faktörlerden sadece zihinsel süreç ile sınıflar arasında anlamlı bir farklılık bulunurken diğer faktörler arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır. Bu farklılık ise birinci sınıflar ile dördüncü sınıflar ve ikinci sınıflar ile dördüncü sınıflar arasında anlamlıdır.

- Öğretmen adaylarına göre matematiksel kanıt kalıcı, anlamlı ve etkili öğrenme sağlar.

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel kanıtın matematik öğrenmedeki rolüne ilişkin farklı görüşleri bulunmaktadır. Bunlardan bütün sınıf seviyelerindeki öğretmen adaylarının en çok ifade ettikleri matematiksel kanıtın kalıcı, anlamlı ve etkili öğrenme sağladığıdır. Bunun yanı sıra öğretmen adayları matematiksel kanıtın öğrenmeyi kolaylaştırdığını, matematiksel düşünmeyi sağladığını, ezberlememeyi sağladığını ve matematiksel kavramlar arasında ilişki kurmayı sağladığını vurgulamışlardır. Ayrıca nasıl ve neden sorularını yanıtladığını ve işlenenlerin nasıl ve neden yapıldığını anlamayı sağladığını belirtmişlerdir.

- Öğretmen adayları derste ve sınava hazırlanırken matematiksel kanıt yapmaya gerek duymaktadırlar.

Öğretmen adayları matematiksel kanıt yapmaya en çok derste, sınava hazırlanırken ve sınavda, doğru ya da yanlış olduğundan emin olunmayan durumlarda, anlaşılmayan durumlarda ve konularda, kural, formül, özellik vs. unutunca gereksinim duymaktadırlar.

- Öğretmen adayları matematiksel kanıt yaparken tanım, teorem, aksiyom ve kanıt yöntemlerine ihtiyaç duymaktadırlar.

Öğretmen adaylarının matematiksel kanıt yaparken en çok tanım, teorem, aksiyom, kanıt yöntemleri, önceki bilgiler, önceki kanıtlar, verilenler-istenenler ve özellikler, kurallar, formüller vs. ihtiyaç duydukları ortaya çıkmıştır. Matematiksel kanıt yaparken farklı sınıf seviyelerinin ihtiyaçları sınıflara göre büyük bir farklılık göstermemekle birlikte bazı değişiklikler de yer almaktadır. Örneğin; birinci ve ikinci sınıflar bu görüşlere ek olarak uygun çalışma ortamına ve uygun psikolojiye ihtiyaçları olduğunu belirtirken üçüncü ve dördüncü sınıflar böyle bir görüş belirtmemişlerdir. Bunun yanı sıra birinci sınıflar konuyla ilgili bilgiye ihtiyaç duymazken diğer sınıf seviyeleri ve özellikle de ikinci sınıflar gerek duymaktadırlar.

### 5.2. Katılımcılar Her Üç Kanıt Şemasını da Kullanmaktadırlar

Araştırmaya katılan farklı sınıf seviyelerinden ilköğretim matematik öğretmeni adayları çalışmada yöneltilen problemleri dışsal, deneysel ya da analitik şemaları kullanarak doğrulamaya veya savunmaya çalışmalarının yanı sıra bazı problemleri de boş bırakmışlardır. Bu süreçte bazı problemlerde ağırlıklı olarak dışsal, bazı problemlerde deneysel ve diğer bazı problemlerde de analitik şemalar kullanılırken diğer bazı problemlerde ağırlıklı olarak boş bırakılmıştır. Ayrıca bazı problemlerde, bazı sınıf seviyeleri şemalardan bazılarını hiç kullanmazken diğer sınıf seviyeleri kullanmıştır.

- Yazılı sınavın tamamı göz önüne alındığında en fazla kullanılan şema analitik ve en az kullanılan da deneysel kanıt şemaları olmuştur.

Yazılı sınavda genel duruma bakıldığında farklı sınıf seviyelerinden araştırmaya katılan ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının her üç kanıt şemasını da kullandıkları görülmektedir. Bu süreçte en fazla kullandıkları şemanın ise analitik kanıt şemalar olduğu görülmektedir. Bunu dışsal şemalar izlerken en az kullanılan şema da deneysel kanıt şemaları olmuştur. Ayrıca katılımcılar problemlerin 4'de birini de boş bırakmışlardır. Sonuç olarak yazılı sınavda problemlerde en çok kullanılan şema analitik olurken en az kullanılan da deneysel olmuştur.

- Yazılı sınavda öğretmen adayları farklı problemlerde ağırlıklı olarak farklı şemaları kullanmışlardır.

Yazılı sınava katılan örneklemdeki öğretmen adayları buldukları sonuçların doğruluğunu gösterirken farklı problemlerde farklı şemalar kullanmışlardır. Bu da gösteriyor ki bir öğretmen adayı her zaman aynı şemayı kullanmamaktadır. Öğretmen adayları yazılı sınavda fonksiyonlar konusu ile ilgili 1, 2, 5 ve 7. problemlerde genellikle dışsal şemaları kullanmışlardır. Bu araştırmada öğretmen adayları dışsal şemalardan da çoğunlukla otoriteyi kullanmışlardır. Yazılı sınavda üçüncü ve dördüncü problemlerde öğretmen adayları genellikle deneysel şemaları kullanmışlardır. Ayrıca öğretmen adayları deneysel şemalardan da genellikle temel örnekleri kullanmışlardır. Yazılı sınavda 6, 8, 9 ve 10. problemlerde ise genellikle analitik şemalardan aksiyomatik şemaları kullanmışlardır. Analitik şemalar ise daha üst düzey becerileri gerektiren bir şemadır.

- Klinik görüşmelerde en çok kullanılan şema analitik ve en az kullanılan şema da dışsal kanıt şemaları olmuştur.

Farklı sınıf seviyelerinden çalışmaya katılan 16 öğretmen adayının klinik görüşmelerde en az kullandıkları şema dışsal şemalar iken bunu deneysel şemalar takip etmektedir. Bu süreçte en fazla kullanılan şemanın ise analitik kanıt şemaları olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra problemlerin çok az bir bölümü de boş bırakılmıştır. Bakıldığında klinik görüşmede en çok kullanılan şemanın analitik ve en az kullanılan şemanın da dışsal şema olduğu görülmektedir.

- Klinik görüşmede öğretmen adayları farklı problemlerde ağırlıklı olarak farklı şemaları kullanmışlardır.

Klinik görüşmeye katılan örneklemdeki öğretmen adayları buldukları sonuçların doğruluğunu gösterirken farklı problemlerde farklı şemalar kullanmışlardır. Bu da gösteriyor ki bir öğretmen adayı her zaman aynı şemayı kullanmamaktadır. Klinik görüşmelerde dışsal şemaların en çok kullanıldığı problem birinci problem olurken onuncu problemde hiç kullanılmamıştır. Deneysel şemalar ise 2, 3, 4, 7 ve 9. problemde kullanılırken onuncu problemde hiç kullanılmamıştır. Ayrıca analitik şemaların en çok kullanıldığı problemde onuncu problem olurken en az da birinci problemde kullanılmıştır.Bunun yanı sıra klinik görüşmelerde sadece bir öğretmen adayı deneysel şemaları kullanmayarak dışsal ve analitik şemaları kullanırken diğer bütün katılımcılar her üç kanıt şemasını da kullanmışlardır.

- Klinik görüşmeye katılan öğretmen adayları bazı şemaları ağırlıklı olarak kullanmışlardır.

Klinik görüşmeye katılan 16 öğretmen adayından 2’si ağırlıklı olarak dışsal, 5’i ağırlıklı olarak deneysel ve 4’ü de ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmışlardır. Bunun yanı sıra 2 katılımcı bütün şemaları eşit oranda kullanırken 2 katılımcı eşit oranda dışsal ile analitik şemaları ve 1 kişi de eşit oranda dışsal ile deneysel şemaları kullanmıştır. Bunlardan da dışsal şemaları ağırlıklı olarak kullanan katılımcılardan birisi birinci ve birisi de üçüncü sınıfa devam etmektedir. Ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullananların ise ikisi birinci, ikisi ikinci ve birisi de üçüncü sınıfa devam etmektedir. Dördüncü sınıflardan ise ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanan katılımcı olmamıştır. Analitik şemaları ağırlıklı olarak kullananların birisi birinci, birisi ikinci, birisi üçüncü ve birisi de dördüncü sınıfta öğrenimlerine devam etmekte olan katılımcılardandır. Bütün şemaları eşit oranda kullanan katılımcıların birisi üçüncü ve birisi de dördüncü sınıfa devam eden öğretmen adayıdır. Ayrıca dışsal ve analitik şemaları eşit oranda kullanan iki katılımcı da dördüncü sınıfa devam etmekte iken dışsal ve deneysel şemaları eşit oranda kullanan katılımcı da ikinci sınıfa devam etmektedir.

### 5.3. Farklı Sınıf Seviyelerindeki İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kullandıkları Kanıt Şemaları Değişim Göstermektedir

Yazılı sınava katılan öğretmen adayları problemleri doğrulama sürecinde kanıt şemalarının her üçünü de kullanmışlar ve bazı problemleri de çözemeyerek boş bırakmışlardır. Bu süreçte bazı problemlerde ağırlıklı olarak dışsal, bazı problemlerde deneysel ve diğer bazı problemlerde de analitik şemalar kullanılırken diğer bazı problemlerde boş bırakılmıştır. Ayrıca bazı problemlerde, bazı sınıf seviyeleri şemalardan bazılarını hiç kullanmazken diğer sınıf seviyeleri kullanmıştır.

- Yazılı sınavda bütün problemler bazında kullanılan dışsal kanıt şeması ile sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır.

Bütün problemler ve bütün sınıf seviyeleri göz önünde bulundurulduğunda öğretmen adaylarının problemlerin doğrulanmasında yazılı sınavda dışsal şemaları bazı problemlerde hiç ve bazı problemlerde de son derece fazla kullandıkları görülmektedir. Bu süreçte dışsal şemalar bütün sınıf seviyelerinde en fazla birinci problemde kullanılırken en az da üçüncü problemde kullanılmıştır. Ayrıca 2, 3 ve 4. sınıflar üçüncü problemde dışsal şemaları hiç kullanmazken birinci sınıfların da çok az bir kısmı kullanmıştır. Fakat genel olarak bakıldığında yazılı sınavda bütün problem durumlarında katılımcıların kullandıkları dışsal şemaların yüzde değerleri birbirine son derece yakındır. Dışsal şemaların kullanımında farklı sınıflar arasında ise anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır.

- Yazılı sınavda bütün problemler bazında kullanılan deneysel kanıt şeması ile sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmaktadır.

Yazılı sınavda deneysel şemalar bazı problemlerde hiç kullanılmazken diğer bazı problemlerde de katılımcıların yarıdan fazlası kullanmıştır. Bütün sınıf seviyeleri göz önünde bulundurulduğunda ise deneysel şemaların bazı problemlerde kullanılmadığı ve diğer bazı problemlerde de kullanıldığı görülmektedir. Bu süreçte deneysel şemalar bütün sınıf seviyelerinde en az birinci problemde kullanılırken en fazla da üçüncü problemde kullanılmıştır. Bunun yanı sıra deneysel şemaların kullanımı sınıf seviyelerine göre de anlamlı bir farklılık göstermektedir. Bu süreçte deneysel şemaları en fazla birinci sınıflar kullanırken en az da dördüncü sınıflar kullanmıştır.

- Yazılı sınavda bütün problemler bazında kullanılan analitik kanıt şeması ile sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmaktadır.

Analitik şemaların kullanımı farklı sınıf seviyesine ve öğretmen adaylarına yöneltilen problemlere göre farklılıklar göstermektedir. Bütün sınıf seviyelerinde ise bazı problemlerde kullanılmazken diğer bazı problemler de kullanım oranı yüksektir. Bu süreçte analitik şemalar en az birinci problemde kullanılırken en fazla da onuncu problemde kullanılmıştır. Bunun yanı sıra analitik şemaların kullanımı sınıf seviyelerine göre de anlamlı bir farklılık göstermektedir. Bu süreçte analitik şemaları en fazla üçüncü sınıflar kullanırken en az da birinci sınıflar kullanmıştır.

- Yazılı sınavda bütün problemler bazında problemin boş bırakılması ile sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır.

Dışsal, deneysel ve analitik şemaların kullanılmasının yanı sıra bazı sınıf seviyelerinde bazı problemlerde boş bırakılmıştır. Farklı sınıf seviyelerinde problemlerin bazıları boş bırakılmazken bazılarının da hemen hemen yarısı boş bırakılmıştır. Bazı problemlerde farklı sınıf seviyelerinden katılımcıların problemi boş bırakma yüzdeleri birbirine çok yakın olmasına rağmen diğer bazı problemlerde farklılıklar göstermektedir. Bunlara ek olarak en çok boş bırakılan problemlerden biri de dördüncü problemdir. Fakat farklı sınıflar arasında problemi boş bırakma oranları arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır.

- Yazılı sınavda dışsal şemaları en fazla 2. sınıflar, deneysel şemaları 1. sınıflar ve analitik şemaları 3. sınıflar kullanırken problemi boş bırakma oranı da en fazla 2. sınıflardadır.

Yazılı sınavda birinci sınıflar ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanırken 2, 3 ve 4. sınıflar ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmışlardır. Yazılı sınavda farklı sınıf seviyelerinin kullandıkları dışsal şemalara bakıldığında kullanım yüzdelerinin birbirine son derece yakın olduğu görülmektedir. İkinci ve üçüncü sınıfların deneysel şemaları kullanma oranları birbirine çok yakındır. Fakat deneysel şemaları en çok kullananlar birinci sınıflar olurken en az kullananlar da dördüncü sınıflar olmuştur. Analitik şemaların kullanımına bakıldığında üçüncü ve dördüncü sınıfların hemen hemen aynı oranda kullandıkları görülmektedir. Ayrıca analitik şemalar en fazla üçüncü sınıflar tarafından kullanılırken bunu dördüncü sınıflar takip etmektedir. Analitik şemaları en az kullananlar ise birinci sınıflar olmuştur. Problemleri en fazla ikinci sınıflar boş bırakırken birinci sınıfların boş bırakma oranı da ikinci sınıflara oldukça yakındır. Problemleri en az boş bırakanlar ise üçüncü sınıflar olmuştur. Yazılı sınavda genellikle 2, 3 ve 4. sınıfların kullandıkları her bir kanıt şemasının yüzdeleri birbirine yakındır. Buradan görülüyor ki dışsal şemaları en fazla 2. sınıflar, deneysel şemaları 1. sınıflar ve analitik şemaları 3. sınıflar kullanırken problemi boş bırakma oranı da en fazla 2. sınıflardadır. Bunun yanı sıra yazılı sınavda analitik şemaların kullanımı sınıf seviyesi arttıkça artmaktadır.

- Klinik görüşmelerde analitik şemaları en çok kullananlar dördüncü sınıflar olmuştur.

Klinik görüşmede birinci ve üçüncü sınıflar ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken en az kullandıkları şema da dışsal kanıt şemaları olmuştur. İkinci sıflar ise ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanırken bunu analitik ve dışsal kanıt şemaları izlemiştir. Son olarak dördüncü sınıflar ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken bunu dışsal ve deneysel kanıt şemaları takip etmiştir.

Sonuç olarak klinik görüşmelerde 2 ve 3. sınıflar tüm problemleri yanıtlarken 1. sınıflar 1 ve 4. sınıflar da 3 problemi boş bırakmışlardır. Bunun yanı sıra analitik şemaları en fazla dördüncü sınıflar kullanırken deneysel şemaları da en az dördüncü sınıflar kullanmıştır. Bunlar dışında farklı sınıf seviyelerinden öğretmen adayları diğer şemaları hemen hemen aynı oranlarda kullanmışlardır. Oysa ki yazılı sınavların tamamında kullanılan kanıt şemalarına bakıldığında bazı şemaların kullanımında sınıflar arasında farklılıklar ortaya çıkmıştır. Fakat klinik görüşmelerde 1, 2 ve 3. sınıfların dışsal, deneysel ve analitik şema kullanımları birbirine son derece yakındır. Ayrıca dördüncü sınıfların şemaları kullanımı bu sınıf seviyelerinden daha farklıdır. Dördüncü sınıfların kullandığı dışsal şemalar diğer sınıf seviyeleri ile birbirine yakındır. Ancak deneysel şemaları diğer sınıf seviyelerinden daha az kullanırken analitik şemaları da daha fazla kullanmışlardır.

- Yazılı sınav ve klinik görüşmede katılımcıların kullandıkları kanıt şemaları %78,5 uyumludur.

Klinik görüşmeye katılan katılımcıların klinik görüşme ve yazılı sınav sonuçları birlikte ele alındığında katılımcılar 16 problemi boş bıraktıkları için 160 problemden 144'ü geçerli olarak alınmıştır. Katılımcılar bu 144 problemden de 113 problemde hem yazılı sınavda ve hem de klinik görüşmede aynı kanıt şemasını kullanırken 31 problemde şemalar değişiklik göstermiştir. Bunun sonucunda yazılı sınav ve klinik görüşmede katılımcıların kullandıkları kanıt şemalarının %78,5 uyumlu olduğu görülmektedir. Bu sonuç gösteriyor ki veri toplama araçları araştırmanın sonuçlarını etkilemektedir. Fakat çalışmada iki farklı veri toplama aracından elde edilenuyumluluk kullanılan veri toplama araçlarının uygun olduğunu ve öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemalarını belirlemek için hazırlanan problemlerin uygun olduklarını göstermektedir.

### 5.4. Bazı Problemlerde Kullanılan Kanıt Şemaları ile Sınıf Seviyeleri Arasında Anlamlı Bir Farklılık Bulunmaktadır

- Birinci, üçüncü ve onuncu problemlerde yazılı sınavda farklı sınıf seviyeleri ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır.

Birinci, üçüncü ve onuncu problemlerde kullanılan kanıt şemaları ile farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılığının olup olmadığını görmek üzere istatistiki test uygulanmıştır. Gerçekleştirilen test sonucunda farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Buna göre kullanılan kanıt şemaları farklı sınıf seviyelerine göre bir değişim göstermemektedir.

- İkinci, dördüncü, beşinci, altıncı, yedinci, sekizinci ve dokuzuncu problemde yazılı sınavda farklı sınıf seviyeleri ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farklılık bulunmaktadır.

İkinci,dördüncü, beşinci, altıncı, yedinci, sekizinci ve dokuzuncuproblemde kullanılan kanıt şemaları ile farklı sınıf seviyeleri arasında anlamlı bir farklılığının olup olmadığını görmek üzere istatistiki test uygulanmıştır. Gerçekleştirilen bu istatistiki test sonucunda farklı sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile kullandıkları kanıt şemaları arasında anlamlı bir farka rastlanmıştır. Diğer bir ifadeyle kullanılan kanıt şemaları sınıf seviyelerine göre farklılık göstermektedir.

- 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 ve 10. problemlerde kullanılan kanıt şemaları arasında anlamlı bir farklılık bulunmaktadır.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 ve 10. problemlerde kullanılan kanıt şemaları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığına istatistiki bir test ile bakılmıştır. Bunun sonucunda ise bu problemlerde kullanılan şemalar arasında anlamlı bir farklılık ortaya çıkmıştır. Diğer bir ifadeyle bu problemlerde kullanılan kanıt şemaları farklılık göstermektedir.

- Yedinci problemde kullanılan kanıtşemaları arasında anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır.

Yedinci problemde kullanılan kanıt şemaları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığına istatistiki bir test ile bakılmıştır. Bunun sonucunda ise bu problemde kullanılan şemalar arasında anlamlı bir farklılık ortaya çıkmamıştır. Diğer bir ifadeyle bu problemde kullanılan kanıt şemaları farklılık göstermemektedir. Yani bütün şemalar aynı düzeyde kullanılmıştır.

### 5.5. Farklı Sınıf Seviyelerindeki İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kullandıkları Kanıt Şemaları Bazı Farklılıklar Göstermektedir

- Birinci sınıfa devem etmekte olan öğretmen adayları yazılı sınavda ağırlıklı olarak deneysel kanıt şemalarını kullanırken klinik görüşmede analitik şemaları kullanmışlardır.

Birinci sınıfa devam etmekte olan katılımcılar yazılı sınavlar süresince ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanırken aynı oranda da dışsal ve analitik şemaları kullanmışlardır. Bunun yanı sıra katılımcıların yaklaşık olarak beşte biri de problemleri boş bırakmışlardır. Birinci sınıftan klinik görüşmeye katılan öğretmen adayları ise ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken bunu deneysel ve dışsal şemalar takip etmiş ve sadece bir problem boş bırakılmıştır. Yazılı sınav sonuçlarında şemaların kullanımı birbirine yakın olmasına rağmen klinik görüşmede deneysel ve analitik şemaların kullanımı birbirine yakın iken dışsal şemalar bunlardan daha az kullanılmıştır. Klinik görüşmenin sonucunda katılımcılardan birisi ağırlıklı olarak dışsal, ikisi ağırlıklı olarak deneysel ve birisi de ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmışlardır. Bu katılımcıların kullandıkları şemalar problemden probleme ise farklılık göstermiştir. Bunun yanı sıra sadece ÖA1A kodlu katılımcı hiçbir problemde deneysel şemaları kullanmazken diğer katılımcılar farklı problemlerde farklı üç şemayı da kullanmışlardır.

- İkinci sınıfa devam etmekte olan öğretmen adayları yazılı sınavda ağırlıklı olarak analitik kanıt şemalarını kullanırken klinik görüşmede deneysel şemaları kullanmışlardır.

İkinci sınıfa devam etmekte olan katılımcılar yazılı sınavlar süresince her üç kanıt şemasını da kullanmışlardır. Bu süreçte ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken, dışsal şemalar daha az ve en az da deneysel şemaları kullanmışlardır. Bunun yanı sıra katılımcıların yaklaşık olarak dörtte biri de problemleri boş bırakmışlardır. İkinci sınıftan katılımcıların yazılı sınavda bazı problemlerde boş bırakma oranları çok fazladır. Bunun sonucu olarak da yazılı sınav genel sonuçlarına bakıldığında da problemlerde en çok boş bırakanların ikinci sınıflar olduğu görülmektedir. İkinci sınıftan klinik görüşmeye katılan öğretmen adayları ise ağırlıklı olarak deneysel şemaları kullanırken bunu analitik ve dışsal şemalar takip etmiştir. Ayrıca boş bırakılan problemde olmamıştır. Klinik görüşmede deneysel ve analitik şemaların kullanımı birbirine yakın iken dışsal şemalar bunlardan daha az kullanılmıştır. Klinik görüşmenin sonucunda ise katılımcılardan birisi ağırlıklı olarak dışsal ile deneysel, ikisi ağırlıklı olarak deneysel ve birisi de ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanmışlardır. Bu katılımcıların kullandıkları şemalar problemden probleme farklılık göstermiş ve katılımcılar farklı problemlerde farklı üç şemayı da kullanmışlardır.

- Üçüncü sınıfa devem etmekte olan öğretmen adayları yazılı sınavda ve klinik görüşmelerde ağırlıklı olarak analitik kanıt şemalarını kullanmışlardır.

Üçüncü sınıfa devam etmekte olan katılımcılar yazılı sınavlar süresince ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken dışsal ve deneysel şemalar analitik şemalara göre oldukça az kullanılmıştır. Bunun yanı sıra üçüncü sınıflar yazılı sınavda analitik şemaları en çok kullanan sınıf seviyesidir. Üçüncü sınıftan klinik görüşmeye katılan öğretmen adayları da yazılı sınavda olduğu gibi ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken bunu deneysel ve dışsal şemalar takip etmiştir. Yazılı sınav sonuçlarında şemaların kullanımı birbirine çok yakın olmamasına rağmen klinik görüşmede deneysel ve analitik şemaların kullanımı birbirine yakın iken dışsal şemalar bunlardan daha az kullanılmıştır. Klinik görüşmenin sonucunda katılımcılardan birisi ağırlıklı olarak dışsal, birisi ağırlıklı olarak deneysel ve birisi de ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken bir katılımcı da bütün şemaları eşit oranda kullanmıştır. Bu katılımcıların kullandıkları şemalar problemden probleme farklılık göstermiş ve katılımcılar farklı problemlerde farklı üç şemayı da kullanmışlardır.

- Dördüncü sınıfa devem etmekte olan öğretmen adayları yazılı sınavda ve klinik görüşmelerde ağırlıklı olarak analitik kanıt şemalarını kullanmışlardır.

Dördüncü sınıfa devam etmekte olan katılımcılar yazılı sınavlar süresince ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken bunu dışsal ve çok az kullanılan deneysel şemalar takip etmiştir. Bunun yanı sıra katılımcıların dörtte biri de problemleri boş bırakmışlardır. Dördüncü sınıftan klinik görüşmeye katılan öğretmen adayları da ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanırken bunu dışsal ve deneysel şemalar takip ederken üç tane problemde boş bırakılmıştır. Yazılı sınav ve görüşmede deneysel şemalar diğerlerine göre oldukça az kullanılmıştır. Klinik görüşmenin sonucunda ise katılımcılardan birisi ağırlıklı olarak analitik şemaları ve birisi de bütün şemaları eşit oranda kullanırken katılımcılardan ikisi dışsal ile analitik şemaları eşit oranda kullanmışlardır. Bu katılımcıların kullandıkları şemalar problemden probleme farklılık göstermiş ve katılımcılar farklı problemlerde farklı şemaları kullanmışlardır.

- Analitik şemaları yazılı sınavda ağırlıklı olarak üçüncü sınıflar kullanırken klinik görüşmelerde dördüncü sınıflar kullanmışlardır.

Yazılı sınavda analitik şemaları en çok kullanan öğretmen adayları üçüncü sınıfta olmalarına rağmen dördüncü sınıflarda çok az bir düşüş bulunmaktadır. Fakat üçüncü ve dördüncü sınıflar yazılı sınavda hemen hemen aynı oranda kullanmışlardır ve bu fark anlamlı bir farklılık değildir. Bunun yanı sıra klinik görüşmede üçüncü sınıflardan 15 kişi analitik şemaları kullanırken dördüncü sınıflardan da 19 kişi kullanmıştır.

### 5.6. Farklı Sınıf Seviyelerindeki İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematiksel Kanıta Yönelik Görüşleri ile Kullandıkları Kanıt Şemaları veya Problemi Boş Bırakma Arasında Bir İlişki Bulunmaktadır

- Kanıt yapmaya dair güvenin düşük olması katılımcıların yazılı sınavda kullandıkları kanıt şemalarını etkilememekte fakat problemleri çözemeyerek boş bırakmalarına neden olmaktadır.

Matematiksel kanıt yapmaya yönelik güven boyutu ile katılımcıların problemlerde kullandıkları şemalar ve problemlerin boş bırakılması arasında anlamlı bir fark olup olmadığına bakılmıştır. Bunun için de kanıta yönelik güveni düşük ve yüksek olan katılımcıların kullandıkları şemalar karşılaştırılmıştır. Bu süreçte dışsal, deneysel ve analitik şemaları kullananlar ile güven boyutu arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Fakat kanıt konusunda güveni düşük olan katılımcılar ile problemleri boş bırakan katılımcılar arasında anlamlı bir fark bulunmaktadır. Diğer bir ifadeyle güveni düşük olan katılımcılar problemleri çözemeyerek diğer katılımcılara göre daha çok boş bırakmışlardır.

- Kanıt yapmaya yönelik özdeğerlendirmenin düşük veya yüksek olması katılımcıların yazılı sınavda kullandıkları kanıt şemalarını veya problemi çözemeyerek boş bırakmalarını etkilememektedir.

Matematiksel kanıt yaparken katılımcıların yaptıkları özdeğerlendirme ile dışsal, deneysel, analitik şemaları kullanan ve problemleri çözemeyerek boş bırakan katılımcılar arasında anlamlı bir fark olup olmadığına bakılmıştır. Bu yapılırken de kanıta yönelik özdeğerlendirmesi düşük ve yüksek olan katılımcılar ile kullandıkları şemalar ve problemin boş bırakılması karşılaştırılmıştır. Bu süreçte dışsal, deneysel ve analitik şemalar ile özdeğerlendirme arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Bunun yanı sıra problemi boş bırakma ile özdeğerlendirme arasında da anlamlı bir farka rastlanmamıştır.

- Kanıt yapmaya dair tutum ve inancın düşük olması katılımcıların yazılı sınavda kullandıkları kanıt şemalarını etkilememekte fakat problemleri çözemeyerek boş bırakmalarına neden olmaktadır.

Matematiksel kanıt yapmaya yönelik tutum-inanç boyutu ile dışsal, deneysel ve analitik şemaları kullanan ve problemi boş bırakan katılımcılar arasında anlamlı bir fark olup olmadığına bakılmıştır. Bunun içinde kanıta yönelik tutum-inancı düşük ve yüksek olan katılımcıların kullandıkları kanıt şemaları ve boş bıraktıkları problemler karşılaştırılmıştır. Bu süreçte dışsal, deneysel ve analitik şemaları kullananlar ile tutum-inanç boyutu arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Fakat kanıt konusunda tutum ve inancı düşük olan katılımcılar ile problemleri çözemeyerek boş bırakan katılımcılar arasında anlamlı bir fark bulunmaktadır. Diğer bir ifadeyle kanıta yönelik tutum ve inancı düşük olan katılımcılar problemleri çözemeyerek daha çok problemi boş bırakmışlardır.

- Kanıt yapmaya dair zihinsel sürecin düşük veya yüksek olması katılımcıların yazılı sınavda kullandıkları dışsal ve deneysel şemalar ile problemleri boş bırakmayı etkilememekte fakat zihinsel süreci yüksek olanların daha çok analitik şemaları kullanmalarına neden olmaktadır.

Matematiksel kanıt yaparken kullanılan zihinsel süreç boyutu ile dışsal, deneysel ve analitik şemaları kullananlar ile boş bırakan katılımcılar arasında anlamlı bir fark olup olmadığına bakılmıştır. Bu yapılırken de kanıta yönelik zihinsel süreci düşük ve yüksek olan katılımcıların kullandıkları kanıt şemaları karşılaştırılmıştır. Bu süreçte dışsal, deneysel şemaları kullananlar ve boş bırakanlar ile zihinsel süreç boyutu arasında anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Fakat kanıt konusunda zihinsel süreci yüksek olan katılımcılar ile problemleri çözerken analitik şemaları kullanan katılımcılar arasında anlamlı bir fark bulunmaktadır. Diğer bir ifadeyle zihinsel süreci yüksek olan katılımcılar problemleri daha çok analitik şemaları kullanarak çözmüşlerdir.

- Klinik görüşmelere katılan öğretmen adaylarının kullandıkları şemalar ve boş bırakma ile kanıta yönelik güven, özdeğerlendirme, tutum-inanç ve zihinsel süreç arasında da anlamlı bir fark ortaya çıkmamıştır.

Katılımcıların güven, özdeğerlendirme, tutum-inanç ve zihinsel süreç boyutları ile dışsal, deneysel, analitik şemaları kullananlar ve problemi çözemeyerek boş bırakanlar arasında anlamlı bir fark olup olmadığına bakılmıştır. Bu yapılırken klinik görüşmeye katılan öğretmen adaylarının her bir faktör için bakış açıları düşük ve yüksek olanlar karşılaştırılmıştır. Bu süreçte anlamlı bir farka rastlanmamıştır. Fakat klinik görüşmelerde ağırlıklı olarak analitik şemaları kullanan 4 katılımcıdan 2'sinin kanıta yönelik güvenleri, 4 katılımcıdan 3'ünün kanıta yönelik özdeğerlendirmeleri, 4 katılımcıdan 2'sinin kanıta yönelik tutum ve inançları, 4 katılımcıdan 2'sinin kanıta yönelik zihinsel süreçleri diğer şemaları kullanan bazı katılımcılara göre daha düşüktür

.

## 6.ÖNERİLER

İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemalarını incelemeyi amaçlayan bu çalışma sonucunda, sınıf düzeyi arttıkça analitik kanıt şemaların kullanımının olumlu yönde değiştiği görülmüştür. Ancak bu değişim problemden probleme ve buna bağlı olarak da sınıftan sınıfa farklılık göstermiştir. farklı öğrenim seviyeleri arasındaki bu değişim ve gelişim çok az olmuştur. Bu durum farklı öğrenim seviyelerindeki birçok öğrencinin aritmetikten cebire geçişi başaramadığı ve bu geçişte zorluklar yaşadığı anlamına gelmektedir.

### 6.1. Araştırmanın Sonuçlarına Yönelik Yapılan Öneriler

Keşfetme, araştırma duygusu, neden, niçin, nasıl gibi sorulara aranan yanıtlar bireyin dünyaya gelmesiyle başlar. Bebekler ve küçük çocuklar sürekli etraflarına bakar, bulundukları ortamı inceler ve merak ederler. Okul öncesi çocukları ise büyüklerine sürekli sorular sorarak yaşadıkları dünyayı öğrenmeye, ilişkileri anlamaya çalışırlar. Görüldüğü üzere insanoğlu doğumdan itibaren etrafında olan olayları anlamaya çalışan, aralarındaki ilişkileri bulmaya çabalayan yani düşünen bir varlıktır. Düşünebilme yapısı ise çevrenin etkisiyle daha etkili olarak gelişebilir. Olaylar arasındaki ilişkileri anlayabilmenin, akıl yürütmenin, sonuç çıkarmanın okul öncesi yıllarda oluşması beklenmektedir. Eğitim ve öğretimin doğasında olan insanlara olayları nedenleriyle açıklayabilme akıl yürütme yapısının gelişimini sağlama her alanda ortaktır.

Matematiksel kanıt ve akıl yürütme bu alanları içerisine alan bir kavramdır. Kanıt ve akıl yürütme insanın içgüdüsel olarak sahip olduğu bir yetenektir. Fakat bu yeteneğin gelişimi belirlenecek uygun stratejilere bağlıdır. Öyle ki bu stratejiler istenilen yapıda belirlenemezse insanda doğuştan var olan kanıt ve akıl yürütme yetenekleri zamanla yok olarak, ezberleme yolunu seçen, neden sonuç zincirini takip edemeyen bireyler yetişmiş olur. Eğer bu strateji uygun biçimde belirlenirse var olan kanıt ve akıl yürütme yapısı daha da ileriye taşınır. Burada bahsedilen strateji kavramı okullarda kanıt ve akıl yürütme yapısının gelişimiyle ilgili öğretim programlarıdır. Fakat bu kavramların öğretimi kolay değildir. Bunun nedenlerinden biri, bu aşamaların uygulanmasını sağlayan öğretmendir. Öğrenciye kanıt ve akıl yürütme becerisinin öğretimi ve gelişimi öğretmene bağlıdır. Eğer öğretmenler öğrencileri için geniş öğrenme yelpazesi sunarlar ve değişik kanıt yöntemlerini verirlerse, öğrencilerde matematiği ve mantıksal düşünceyi daha iyi anlayıp yaratıcılıklarını arttırabileceklerdir. Öğretmenler öğrencilerine konular üzerindeki fikirlerini açıklama ve tartışma fırsatı vermeli ve onları cesaretlendirmelidirler. Öğrenciler bir önermenin doğruluğunu nedenleriyle öğrenmek isterler. Eğer açıklayıcı kanıtlarla matematik öğrenimini sağlarsak onların daha iyi anlamalarını ve zevk almalarını sağlamış oluruz. Konunun öğretimiyle ilgili süreçler doğru olarak uygulandığında ezberlemeyen, kavramları nedenleriyle öğrenen, yaratıcı düşünen ve problemlere farklı açılardan çözüm üretebilen bireyler yetiştirmiş oluruz (Altıparmak ve Öziş, 2005). Bu nedenle ilerde öğretmen olacak öğretmen adaylarını yetiştirecek kurumlarda matematiksel düşünme, sorgulama, kanıt ve akıl yürütme gibi ileri düzey becerileri geliştirebilecekleri ve öğrencilerde bu becerileri nasıl geliştireceklerine dair derslere yer verilmelidir. Çünkü bu becerileri gelişen ve bu becerileri nasıl geliştireceğini bilen bir öğretmenin öğrencilerinde de bu becerileri geliştirmesi daha kolay olacaktır.

Öğretmenlerin matematiksel kanıt yapma yeterliliklerinin eksikliği, derslerinde kullanma sıklıklarını ve kullanma biçimlerini etkilemektedir. Bu nedenle öğretmen yetiştiren kurumlarda gerek alan derslerinde, gerekse matematik öğretimi derslerinde üzerinde durulması gereken bir konudur. Çünkü bu araştırmada, analitik şemaları kullandığı halde bazı katılımcıların matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüş ölçeğinde yer alan kanıta yönelik faktörleri diğer şemaları kullananlara göre daha düşüktür. Dolayısıyla öğretmen adaylarının kanıt yapma becerilerinin geliştirilmesinin yanı sıra, kanıt yapmanın yeni matematiksel düşüncelerin gelişimine ve matematiğin doğasını anlamaya olan katkılarına dikkat çekmek gerekmektedir.

Öğrenciler kanıtlama ve formal matematikle ilk kez üniversitede karşılaşmaktadırlar. Bu durum ise matematiksel dile alışmaları, daha soyut düşünmeleri, formal matematiği anlamaları ve üst düzey düşünmeleri konusunda güçlüklere neden olmaktadır. Yurtdışında bazı üniversitelerde, lisedeki sistemden gelip ileri matematiksel düşünceye alışmakta ve formal matematiği anlamakta zorlanan öğrencilere yönelik geçiş dersleri bulunmaktadır (Knapp, 2005). Bu derslerde öğrencilere matematiğin aksiyomatik yapısı, kanıtın ne olduğu ve kanıtlama yöntemleri verilerek ileri düzey matematik derslerine hazırlanmaları, geçmişteki eksikliklerini tamamlamaları sağlanmaktadır. Bu araştırmada da birinci sınıfta öğrenimlerine devam etmekte olan öğretmen adayları genellikle deneysel şemaları kullanmışlardır. Bu nedenle ülkemizde de böyle bir çalışma yapılarak üniversitelerde bu tür geçiş derslerinin konulması düşünülebilir.

Çalışmaya dördüncü sınıftan katılan öğretmen adaylarının ağırlıklı olarak kullandıkları şemalar analitik şemalardır. Fakat dördüncü sınıfların analitik şemaları kullanım oranı üçüncü sınıflara göre anlamlı olmasa da bir düşüş göstermektedir. Ayrıca dördüncü sınıflar kanıt şemalarında en alt basamak olan dışsal şemaları da deneysel şemalardan daha fazla kullanmışlardır. Bunun nedeni dördüncü sınıfta kanıt ve kanıt yapmaya yönelik bir derslerinin olmaması olabilir. Bu nedenle de dördüncü sınıftaki öğretmen adaylarının kanıt kullanacakları ve kanıt yapabilecekleri bir derse yer verilebilir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemasını ortaya çıkarmaya yönelik olarak fonksiyonlar konusu kullanılmıştır. Bu süreçte ise deneysel şemaları kullanan öğretmen adayları genellikle venn şeması ile kümeler tanımlayarak doğrulama yolunu seçmişlerdir. Ortaöğretim matematik ders kitaplarında fonksiyonların küme ile gösterimine çok yer verilmektedir. Bunun sonucunda da öğretmen adayları fonksiyonları küme ile ilişkilendirerek ve bunu sıkça kullanarak deneysel şemalar ile bir durumu doğrulamaktadırlar. Bu nedenle ortaöğretim ders kitaplarında fonksiyonların gösteriminde ağırlıklı olarak venn şemasının kullanılmaması uygun olabilir.

Çalışmanın sonucunda öğretmen adaylarının analitik şemaların ardından en çok kullandıkları şemanın dışsal şemalar olduğu ortaya konulmuştur. Bunun ortadan kalkması için ise bir öğrenci tahtaya kalkıp soru çözdüğünde öğretmen hemen doğru veya yanlış dememelidir. Sınıfa sorular sormalı ve sınıf içi tartışmaların sonucunda sınıf doğruyu bulmalıdır. Öğretmenin rolü ise öğrencilere rehberlik yapmaktır. Öğretmenler "Bu doğru mu? Nasıl biliyoruz? Bana bir örnek verebilir misiniz? Bir aksi örnek? Bir kanıt şeması?" sorularını sorarak öğrencilerin doğruyu bulmalarına yardım etmelidirler. Bunun yanı sıra öğrencilere nereden biliyorsun, nasıl biliyorsun gibi sorular da yöneltilmelidir. Bu süreçte doğru yanıtlar reddedilmemeli fakat doğru yanıtlarını da kanıtlamaları istenmelidir. Öğretmenler öğrencilere örnekleri sistematik bir biçimde vererek deseni görmelerini sağlayabilirler. Desenler çocukların tahmin etmelerini sağlar, daha sonra da tahminlerini doğrulamalarını sağlar. Aynı zamanda öğretmenler örneklerin bir durumun genel durumunu doğrulamak için yeterli olmadığını anlamalarında ve örneklerin tahminleri anlamakta ve test etmekte faydalı olduğunu anlamalarında yardımcı olmalıdırlar. Öğrencilerde kanıtlama becerisinin gelişmesi uzun zaman alabilmektedir. Bu süreçte önemli olan ise kuralları, genellemeleri ve desenleri öğretmenin öğrencilere doğrudan vermesinden ziyade bunları öğrencilerin oluşturabilecekleri öğretim ortamı hazırlamaktır. Bu süreçte ise öğretmen sınıfta bir rehber durumunda bulunmalıdır. Çünkü her şey öğrencilere hazır verildiğinde öğrenciler bunları ezberleyerek matematiği kurallar yığını olarak görmektedirler. Bunun sonucunda da matematik öğrenciler için korkulan bir ders olmakta ya da matematik öğrencilere güzellikten yoksun, zevksiz bir ders olarak gelmektedir. Öğretmenlerin bunu gerçekleştirebilmeleri için ise mevcut öğretmenlere bu yönde hizmet içi eğitim kursları verilebilir.

Fonksiyonlar konusu matematikte birçok konunun temelini oluşturan bir konudur. Fakat çalışmanın sonuçlarına bakıldığında öğretmen adaylarının fonksiyonlarda yer alan birebirlik ve örtenlik gibi kavramları birbirine karıştırdıkları belirlenmiştir. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının birçoğunun fonksiyonun tanımını doğru biçimde açıklayamadıkları görülmüştür. Bu tür eksikliklerin ortadan kalkarak giderilmesi için öğretmen yetiştiren kurumlara ait öğretim programları içine temel kavramlar ile ilgili dersler açılabilir.

Eğitimin her kademesinde öğrencilerin akıl yürütme yapabilme, kanıt yapabilme becerileriyle ve düzeyleriyle ilgili olarak çalışmalar yapılmalıdır. Öğrencilere ezbere dayalı verilen eğitim sonucu öğrencilerin akıl yürütme ve kanıt yapma fırsatlarının kısıtlandığı bir gerçektir. Bu sebepte öğrencilere bu fırsatları sağlayan düzenlemelerin yapılması gerekmektedir.

Kanıt yapma, ilköğretim ve orta öğretim matematik programlarında çok sınırlıda olsa yer almaktadır. Kanıtın öğrencilere kazandırdığı beceriler düşünüldüğünde kanıtların her düzeyde yer alması gerekmektedir. Bu nedenle öğretmenlerin kendilerini bu alanda geliştirerek, kanıt yapma merkezli matematik etkinliklerini geliştirebilecek duruma getirmeleri gerekmektedir. Öğrenciler, bu tarz etkinliklerle matematiksel bilgilerin ortaya çıkış yollarının farkına vararak, matematiğin tadına varacaklardır.

### 6.2. Benzer Araştırma Yapacaklara Yönelik Öneriler

Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda kullandıkları kanıt şemaları ve kanıta yönelik görüşleri üzerinde durularak görüşleri ile kanıt şemaları arasında anlamlı bir fark olup olmadığına bakılmıştır. Bu alanda ileride yapılacak olan çalışmalarda öğrencilerde matematiğin ve dolayısıyla kanıtların temelini oluşturan sınıf öğretmeni adayları ve hatta okul öncesi öğretmeni adayları ile çalışılarak daha genel konular yardımıyla kullandıkları kanıt şemaları ve kanıta yönelik görüşleri irdelenebilir.

Çalışmada öğretmen adaylarının kullandıkları kanıt şemalarını ortaya koymak için veri toplama aracı olarak yazılı sınav kâğıtları ve klinik görüşmelerden yararlanılmıştır. Bu yöntem ile çok fazla sayıda problem sormak mümkün olmadığından dolayı bu çalışmada fonksiyonlar ile ilgili on problem sorulmuştur. Bu nedenle farklı bir konuya odaklanılarak problemin ve örneklemin sayısı azaltılabilir veya çoğaltılabilir. Bu şekilde bu çalışmadan elde edilen verilerle karşılaştırmalar yapılabilir ve genelleme yapma fırsatı elde edilebilir.

Matematiksel kanıt yapma, kanıt şemaları ve matematiksel kanıta yönelik bakış açısı ile ilgili yapılan çalışmaların artırılması gerekmektedir. Bunun için de matematiksel kanıtın gerekliliği, matematiksel düşünmenin gelişimi üzerine etkileri araştırılarak ortaya konmalıdır. Fakat matematik öğretmenlerinin kanıt düzeyleri ve öğrencilerine bunu öğretme yolları üzerine sınırlı sayıda araştırma bulunmaktadır (Jones, 2000). İlerde yapılacak çalışmalarda öğretmenlerin ne tür kanıt şemaları kullandıklarının yanı sıra derslerinde kanıta zaman ayırmaları ile kavramsal öğrenmenin ne düzeyde gerçekleştiği ortaya konularak irdelenebilir. Bunun yanı sıra öğretmenlerin kullandıkları kanıt şemaları ile sınıf içi pratikleri arasında ilişki olup olmadığı gözlem ağırlıklı olarak çalışılabilir ve bu amaçla nitel tasarım yapılabilir.

Bu çalışmanın örneklemi ilköğretim matematik öğretmenliği 1-4. sınıf seviyelerindeki öğretmen adayları ile sınırlıdır. Yeni yapılacak çalışmalarda bu ara ve katılımcı sayısı artırılabilir veya azaltılabilir. Ayrıca bazı özel öğrenme alanlarının seçilmesinin yanı sıra orta öğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları kanıt şemaları da incelenilebilir.

Özellikle düşünme süreçlerini ortaya çıkarmayı amaçlayan araştırmalar genellikle nitel araştırmalardır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları kanıt şemalarını araştırmayı amaçlayan bu çalışmada gelişimci araştırmanın bir türü olan “enlemesine” yöntem kullanılmıştır. Bu çalışmada kullanılan “enlemesine” yöntem yerine “boylamasına” yöntem de kullanılabilir. Boylamasına yürütülen çalışmalarda, insan davranışları uzun süreli olarak incelenmekte ve incelenen zaman dilimleri arasındaki olası davranış farklılıkları ortaya çıkarılmaya çalışılmaktadır.

Bu çalışmanın veri analizinde fonksiyonlar konusu ile ilgili problemlere dair kullanılacak kanıt şemalarınının özelliklerini içeren karakterizasyon tabloları kullanılmıştır. Bu karakterizasyon tabloları oluşturulurken öğretmen adaylarının çözümlerinin yanı sıra kanıt şemalarının özellikleri ile araştırmacıların düşünceleri dikkate alınmıştır. Fakat bu alanla ilgili bundan sonraki çalışmalar irdelenerek karakterizasyon tabloları genişletilebilir. Ayrıca bu karakterizasyon tablolarındaki özellikler farklı çalışma yapmak isteyenler için önerilebilir.

Matematik öğretim programının yoğunluğu, bilgi eksikliği vb. sebeplerle öğretmenlerin akıl yürütme, sorgulama yapma, açıklama yapma ve kanıt yapma konusunda öğrencilere yeterli fırsatları vermedikleri düşünülürse, bu konuda çalışmaların yapılması gerekmektedir.

Okullara giriş sınavlarının öğrencilerin akıl yürütme ve kanıt yapabilme konusundaki etkileri (özellikle negatif etkileri) araştırılmalıdır.

Özellikle üniversitelerin matematiği yoğun şekilde kullanan bölümlerinin birinci sınıflarındaki öğrencilerin kanıt yapabilme düzeylerinin araştırılmasının önemli sonuçlar vereceği düşünülmektedir.

Bunun yanında belli bir bölgeden seçilen sınırlı sayıdaki örneklem grubu yerine belli ülke genelinden dağınık olarak seçilecek olan bir örneklem grubu ile aritmetikten cebire geçiş ile ilgili projeler yürütülebilir. Böylece öğrencilerin kullandıkları kanıtlarda ve kanıt şemaalrında öğretmenlerin etkileride ortaya konulabilir.

Son yıllarda bilgisayar teknolojilerindeki gelişmeler, öğrenme-öğretim sürecinde öğrencilerin kavrama düzeylerini artırıcı birçok yeni olanaklar sunmaktadır. Öğretmenlerin problemleri gerçek hayattan seçmeleri ve problemlerin çözümlerinde hesap makinesi ve bilgisayar kullanılmasına fırsat tanımaları öğrencilerde yüksek düzeyde sorgulamaya yardımcı olarak yüksek düzeyde düşünme becerisini geliştirmektedir (Nicely, 1989). Bu nedenle öğrencilerin yaptıkları kanıtlar ve kanıt şemaları teknoloji ile desteklenebilir ve bu desteğin etkisi incelenebilir. Ayrıca kanıt yapma sürecinde yaşanan zorlukları ve hataları giderici öğretim materyalleri hazırlanabilir.

Öğrencilerin kullandıkları kanıtlarda ve kanıt şemalarında öğretmenlerin önemli bir etkisinin olduğu düşünülerek ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenleriyle, farklı sınıf seviyelerindeki öğrencilerin kanıtlama sürecinde yaşadıkları değişimleri, zorlukları ve hataları içeren hizmet içi seminerler yürütülebilir ve bu öğretmenlerin de görüşleri alınarak bu süreç daha kapsamlı şekilde incelenebilir.

Bu çalışamada kullanılan ölçek sadece bir üniversitedeki öğretmen adaylarına uygulanarak kanıta bakış açıları belirlenmeye çalışılmıştır. Bu alanda ileride yapılacak olan çalışmalar, ülke çapında yapılarak öğretmen adaylarının kanıta yönelik bakış açıları belirlenebilir. Böylece, farklı bölge ya da illerdeki üniversiteler arasında öğretmen adaylarının kanıta bakışlarındaki değişim incelenebilir.

Öğrencilerin kanıta yönelik tutumlarında, kanıt yapmalarında ve kullandıkları kanıt şemalarında öğretmenlerin önemli bir yeri bulunmaktadır. Bu nedenle öğretmenlerin kavramsal anlamalarına yönelik olarak daha ayrıntılı çalışmalar daha detaylı sonuçların ortaya çıkmasını sağlayacaktır.

## 7.KAYNAKLAR


AAMT., Standars For Excellence in Teaching Mathematics in Australian Schools. http://www.aamt.edu.au 20.04.2003.

Akkoç, H. and Tall, D., 2005. A Mismatch Between Curriculum Design and Student Learning: The Case of the Function Concept, in D. Hewitt and A. Noyes (Eds), Proceedings of the Sixth British Congress of Mathematics Education, University of Warwick, 1-8.

Akkoç, H., 2006. Fonksiyon Kavramının Çoklu Temsillerinin Çağrıştırdığı Kavram Görüntüleri, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 30, 1–10.

Akyıldız, M., Faktör Analizi Tanıtımı ve Uygulanması. http//www.istatistik.gen.tr 12.05.2005.

Alkan, H. (Ed.), 2006. Ortaöğretim Matematik 9. Sınıf, Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları, Ankara.

Almeida, D., 1996. Justifying and Proving in The Mathematics Classroom, Philosophy of Mathematics Education Newsletter, 9.

Almeida, D. A., 2000. Survey of Mathematics Undergraduates' Interaction With Proof: Some Implications for Mathematics Education, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31, 6, 869-890.

Almeida, D., 2001. Pupils' Proof Potential, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32, 1, 53–60.

Almeida, D., 2003. Engendering Proof Attitudes: Can The Genesis of Mathematical Knowledge Teach Us Anything?, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34, 4, 479–488.

Altıparmak, K. ve Öziş, T., 2005. Matematiksel İspat ve Matematiksel Muhakemenin Gelişimi Üzerine Bir İnceleme, Ege Eğitim Dergisi, 6, 21, 25-37.

Altunışık, R., Coşkun, R., Bayraktaroğlu, S. ve Yıldırım, E., 2004. Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntemleri: SPSS Uygulamalı, Sakarya Kitabevi, İstanbul.

Arzarello, F., Robutti, O. ve Bazzini, L., 2005. Acting is Learning: Focus On the Construction of Mathematical Concepts, Cambridge Journal of Education, 35, 1, 55–67.

Avigad, J., 2005. Mathematical Method and Proof, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Aydın, N. ve Asma, N., 2001. Lise 1 Matematik Ders Kitabı, Aydın Yayınları, Ankara.

Aydoğdu, T., Olkun, S. ve Toluk, Z., 2002. İlköğretim 6, 7 ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematikte Çözdükleri Problemlerin Sonuçlarını Kanıtlama Süreçleri, XI. Eğitim Bilimleri Kongresi, Yakın Doğu Üniversitesi, Kuzey Kıbrıs Türk Cumhuriyeti.

Aydoğdu, T., Olkun, S. ve Toluk, Z., 2003. İlköğretim 6, 7 ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematik Problemlerine Ürettikleri Çözümleri Kanıtlama Süreçleri, Eğitim Araştırmaları, 4, 12, 64–74.

Aydoğdu İskenderoğlu, T., 2003. Farklı Sınıf Düzeylerindeki Öğrencilerin Matematik Problemlerini Kanıtlama Süreçleri, Yüksek Lisans Tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bolu.

Babbie, E., 2001. The Practice of Social Research (9th Edition),Wadsworth/Thomson Learning, Belmont, USA.

Baki, A., 1996. Okul Matematiğinde Ne Öğretelim Nasıl Öğretelim?, Milli Eğitim Dergisi, 130, 72-76.

Baki, A., 1999. Öğretmen Eğitimi Üzerine Düşünceler, Türk Yurdu, 19, 138, 4-9.

Baki, A., 2002. Öğrenen ve Öğretenler İçin Bilgisayar Destekli Matematik, Ceren Yayıncılık, İstanbul.

Baki, A., 2008. Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi, Harf Eğitim Yayıncılığı, Ankara.

Baki, A., İskenderoğlu, T. ve İskenderoğlu M., 2009. Classroom Teacher Candidates' Justifications' for Their Solutions to Function Problems in Mathematics, 2009 College Teaching and Learning Conference, June, Prague, Czech Republic.

Balcı, A., 2005. Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntem, Teknik ve İlkeler, 5. Baskı, Pegem Yayıncılık, Ankara.

Bell, A. W., 1976. A Study of Pupils' Proof-Explanations in Mathematical Situations, Educational Studies in Mathematics, 7, 23-40.

Bergqvist, T., 2005. How Students Verify Conjectures: Teachers' Expectations, Journal of Mathematics Teacher Education, 8, 171–191

Bishop, A. J., 2001. What Values Do You Teach When You Teach Mathematics?, Teaching Children Mathematics, 346–349.

Bogdan, R. C. ve Biklen, S. K.,1998. Qualitative Research for Education: An Introduction to Theory and Methods, Third Edition, Needham Heights, MA, Allyn and Bacon, USA.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. ve Nichols, D., 1992. Development of the Process Conception of Function, Educational Studies in Mathematics, 23, 247–285.

Büyüköztürk, Ş., 2004. Sosyal Bilimler İçin Veri Analizi El Kitabı, 4. Baskı, Pegema Yayıncılık, Ankara.

Büyüköztürk, Ş., 2005. Anket Geliştirme, Gazi Üniversitesi Türk Eğitim Bilimleri Dergisi, 2, 3, 1-19.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. ve Demirel, F., 2009. Bilimsel Araştırma Yöntemleri, 4. Baskı, Pegem Akademi, Ankara.

Campbell, C., Miller, S. G. ve Wimbish, G. J., Student Development in the Understanding of Proof. http://sections.maa.org/lams/proceedings/spring2000/connie-campbell-etal.pdf 12.07.2008.

Carlson, M. P., 1995. A Cross-Sectional Investigation of the Development of the Function Concept, Doktora Tezi, Faculty of the Graduate School of the University of Cansas, Cansas, USA.

Coe, R. ve Ruthven, K., 1994. Proof Practices and Constructs of Advanced Mathematics Students, British Educational Research Journal, 20, 1, 41–54.

Cohen, L., Manion, L. ve Morrison, K., 2005. Research Methods in Education, 5th Edition, Routledge Falmer, London, New York.

Corry, L., The Development Idea of The Proof. Princeton Companion to Mathematics Proof. http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/proof%20PUP.pdf12.01.2009.

Creswell, J. W., 2002. Research Design: Qualitative, Quantitative and Mixed Methods Approaches, Second Edition, Sage Publications, Thousand Oaks, CA.

Çelik, D., 2007. Öğretmen Adaylarının Cebirsel Düşünme Becerilerinin Analitik İncelenmesi, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Çepni, S., 2009. Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş, 4. Baskı, Yazarın Kendisi, Trabzon.

Çolak, H., Bulut, S. ve Argün, Z., 2005. Problem Çözme Sürecinde Yazma Tekniğinin Kullanımı ve Aday Matematik Öğretmenlerinin Bu Tekniğe Yönelik Görüşleri, XIV. Ulusal Eğitim Bilimleri Kongresi, Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Eylül, Denizli, Bildiriler Kitabı II: 410-412.

Dane, A., 2008. İlköğretim Matematik 3.Sınıf Öğrencilerinin Tanım, Aksiyom ve Teorem Kavramlarını Anlama Düzeyleri, Kastamonu Eğitim Dergisi, 16, 2,495-506.

Dede, Y., Bayazit, İ. ve Soybaş, D., 2010. Öğretmen Adaylarının Denklem, Fonksiyon ve Polinom Kavramlarını Anlamaları, Kastamonu Eğitim Dergisi, 18, 1, 67-88.

DeMarois, P. ve Tall, D., 1996a. Facets and Layers of The Function Concept, Proceedings of PME, Valencia, 2, 297–304.

DeMarois, P. ve Tall, D., 1996b. Function: Organizing Principleor Cognitive Root, Proceedings of the 23rd Conference of PME, Haifa, Israil, 2, 257–264.

De Villiers, M. D., 1999. Rethinking Proof with The Geometer's Sketchpad, Key Curriculum Press, Emeryville, CA.

Dickersen, D., 2006. Aspects of Preservice Teachers' Understandings of The Purpose of Mathematical Proof, Psychology of Mathematics and Education of North America, 2006 Annual Meeting.

Dreyfus, T., 1999. Why Johnny Can’t Prove?, Educational Studies in Mathematics, 38, 1, 85-109.

Dubinsky, E. ve Harel, G.,1992. The Nature of The Process Conception of Function, In G. Harel And E. Dubinsky (Eds.), The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes 25: 85-106, Mathematical Association of America, Washington.

Ekiz, D. (Ed.), 2007. Bilimsel Araştırma Yöntemleri, Lisans Yayıncılık, İstanbul.

Erickson, D. K.,1993. Middle School Mathematics Teachers’ Views of Mathematics and Mathematics Education, Annual Meeting of American Educational Research Association, Atlanta.

Ernest, P., 1991. The Philosophy of Mathematics Education, The Falmer Pres, London, UK.

Finlow-Bates, K., 1994. First Year Mathematics Students’ Notions of the Role of Informal Proof and Examples, Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Lisbon, Portugal, 344-350.

Fitzgerald, J. F., 1996. Proof in Mathematics Education, Journal of Education, 178, 1, 35–45.

Flores, A., 2002. How Do Children Know That What They Learn in Mathematics is True?, Teaching Children Mathematics, 8, 5, 269–274.

Flores, A., 2006. How Do Students Know What They Learn in Middle School Mathematics is True?, School Science and Mathematics, 106, 3, 124-132.

Forman, E. A., Joernes, J. L., Stein, M. K. ve Brown, C. A., 1998. You’re Going to Want to Find Out Which and Prove It: Collective Argumentation in a Mathematics Classroom, Learning and Instruction, 8, 527–548.

Galbraith, P., 1995. Mathematics as Reasoning, The Mathematics Teacher, 88, 5, 412–417.

Galindo, E., 1998. Assessing Justification and Proof in Geometry Classes Taught Using Dynamic Software, The Mathematics Teacher, 91, 1, 76–82.

Gholamazad, S.; Liljedahl, P. ve Zazkis, R., 2004. What Counts as Proof? Investigation of Preservice Elementary Teachers' Evaluation of Presented 'Proofs, Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, October, Toronto, Canada.

Gingsburg, H., 1981. The Clinical Interview in Psycological Research on Mathematical Thinking, Aims, Rationale, Techniques, For The Learning of Mathematics, 1,3,4-10.

Ginsburg, H. P. ve Seo, K. H., 1999. Mathematics in Children's Thinking, Mathematical Thinking and Learning, 1,2, 113-129.

Godino, J. D. ve Recio, A. M., 1997. Meaning of Proofs in Mathematics Education, PME XXI, Lahti, Finland, 2, 313-320.

Goldin, G.A., 1998, Observing Mathematical Problem Solving Through Task-Based Interviews, Ed. A.R. Teppo, Qualitative Research Methods in Mathematics, Mathematics Education, NCTM.

Gondek, V., Rösken, B. ve Törner, G., 2009. Algebra vs. Analysis: University Students' Views on the Role of Proofs, Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, 178-183.

Griffe, D. T., 2001. Questionaire Translation and Questionaire Validation: Are They the Same?, The Annual Meeting of the American Association for Applied Linguistics, St. Louis, MO.

Güveli, H. ve Güveli E., 2002. Bağıntı, Fonksiyonun Tanımı, Bire-Bir Fonksiyon ve Örten Fonksiyon Konularında Lise-1 Düzeyinde Kavram Yanılgılarının Tespiti, V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, ODTÜ, Ankara, 1019-1025.

Güven, B., Çelik, D. ve Karataş, İ., 2005. Ortaöğretimdeki Çocukların Matematiksel İspat Yapabilme Durumlarının İncelenmesi, Çağdaş Eğitim, 316, 35-45.

Hanna, G. ve Jahnke, H. N., 1996. Proof and Proving, In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (Eds.), International Handbook of Mathematics Education, 2, 877-908, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Hanna, G., 2000. Proof, Explanation and Exploration: An Overview, Educational Studies in Mathematics, 44, 5–23.

Hanna, G., Jahnke, H. N. ve Pulte, H., 2006. Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives, International Conference, University of Duisburg-Essen, 1-4 November 2006, Germany.

Hanna, G. ve de Villiers, M., 2008. Proof and Proving in Mathematics Education, ZDM Mathematics Education, 40,329–336.

Harel, G., 1995. From Naive Interpretist to Operation Conserver, In J. Sowder and B. Schapelle (Eds.), Providing a Foundation for Teaching Mathematics in the Middle Grades, 143-165, SUNY Press, New York.

Harel, G. ve Sowder, L., 1998. Students' Proof Schemes: Results From Exploratory Studies, In A. Schoenfeld, J. Kaput and E. Dubinsky (Eds.), Research in Collegiate Mathematics Education III, 234-283, Providence, RI, American Mathematical Society.

Harel, G., 1999. Students' Understanding of Proof: A Historical Analysis and Implications for the Teaching of Geometry and Linear Algebra, Linear Algebra and Its Applications, 302-303, 601-613.

Harel, G., 2001. The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-Based Instruction, In S. Campbell and R. Zaskis (Eds.), Learning and Teaching Number Theory, 185–212.

Harel, G., 2005. Advenced Mathematical Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development, Mathematical Thinking and Learning, 7, 1, 25–50.

Harel, G., 2007. The DNR System as a Conceptual Framework for Curriculum Development and Instruction, In R. Lesh, J. Kaput, E. Hamilton (Eds.), Foundations for the Future in Mathematics Education, Erlbaum.

Harel, G. ve Sowder, L., 2007. Toward a Comprehensive Perspective of Proof, In F. Lester (Ed.), Handbook of Research on Teaching and Learning Mathemetics, 2, NCTM.

Harel, G., 2008a. What is Mathematics? A Pedagocigal Answer to a Philosophical Question, In R. B. Gold and R. Simons (Eds.), Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosopy, Mathematical American Association.

Harel, G.,2008b. DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction. Part I: Focus on Proving, ZDM Mathematics Education, 40,487-500.

Harel, G.,2008c. A DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction. Part II: With Reference to Teacher's Knowledge Base, ZDM Mathematics Education, 40,893-907.

Healy, L. ve Hoyles, C., 2000. A Study of Proof Conceptions in Algebra, Journal for Research in Mathematics Education, 31, 4, 396–428.

Heid, M. K., Hollebrands, K. F. ve Iseri, L. W., 2002. Reasoning and Justification, with Examples from Technological Environments, Mathematics Teacher, 95, 3, 210–216.

Heinze, A. ve Reiss, K., 2003. Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence, In M.A. Mariotti (Ed.). Proceedings of the Third Conference of the Europian Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy.

Herbst, P. G., 2002. Engaging Students in Proving: A Double Bind on the Teacher, Journal for Research in Mathematics Education, 33, 3, 176–203.

Housman, D. ve Porter, M.,2003. Proof Schemes and Learning Strategies of Above-Average Mathematics Students, Educational Studies in Mathematics, 53, 139–158.

Hunting, R.P., 1997. Clinical Interview Methods in Mathematics Education Research and Practice, Journal of Mathematical Behaviour, 16, 2, 145-165.

İskenderoğlu, T. ve Olkun, S., 2004. Farklı Sınıflardan Öğrencilerin Matematikte Çözdükleri Problemlerin Sonuçlarını Kanıtlama Süreçleri, 6. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Marmara Üniversitesi, Türkiye.

Jones, K., 1997. Student-Teachers' Conceptions of Mathematical Proof, Mathematics Education Review, 9, 16-24.

Jones, K., 2000. The Student Experience of Mathematical Proof at University Level, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31, 1, 53–60.

Kabael, T. U., 2010. Fonksiyon Kavramı: Tarihi Gelişimi, Öğrenilme Süreci,Öğrenci Yanılgıları ve Öğretim Stratejileri, Türk Bilim Araştırma Vakfı, 3, 1, 128-136.

Kalaycı, Ş., 2005. SPSS Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistik Teknikleri, 1. Baskı, Asil Yayın Dağıtım Ltd. Şti, Ankara.

Kaphesi, E., 2003. The Influence of Language Policy in Education on Mathematics Classroom Discourse In Malawi: The Teachers' Perspective, Teacher Development, 7, 2, 265-285.

Karasar, N., 2009. Bilimsel Araştırma Yöntemleri, 20. Baskı, Nobel Yayın,Ankara.

Karataş, İ. ve Güven, B., 2003. Fonksiyon Kavramının Farklı Öğrenim Düzeyinde Olan Öğrencilerdeki Gelişimi, Eurasional Journal of Educational Research, 4, 16, 64-73.

Kırcaali-İftar, G., 1999. Ölçme. Ed: Ali Atıf Bir, Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntemleri, Anadolu Üniversitesi Yayınları, 1081, Açıköğretim Fakültesi Yayınları, 601.

Knapp, J. ve Zandieh, M., 2004a. The Role of Examples in Student Proof Schemes, Psychology of Mathematics and Education of North America; 2004 Annual Meeting, Toronto, CA, 1-2.

Knapp, J. ve Zandieh, M., 2004b. Examples as Tools for Understanding Proof in Geometry, Psychology of Mathematics and Education of North America, 2004 Annual Meeting, Toronto, Canada.

Knapp, J. L., 2006. Students' Appropriation of Proving Practices in Advanced Calculus, Doktora Tezi, Arizona State University, USA:

Knapp, J., Learning to Prove in Order to Prove to Learn. http://mathpost.asu.edu/~sjgm/issues/2005_spring/SJGM_knapp.pdf24.12.2008

Knuth, E.,ve Elliott, R., 1997. Preservice Secondary Mathematics Teachers' Interpretations of Mathematical Proof, Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 545-552.

Knuth, E. J. ve Elliott, R. L., 1998. Characterizing Students' Understanding of Mathematical Proof, Mathematics Teacher, 91, 8, 714–717.

Knuth, E. J., 1999. The Nature of Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. Doktora Tezi, Faculty of the Graduate School of the University of Colorado, USA.

Knuth, E. J., 2002a. Proof as a Tool for Learning Mathematics, Mathematics Teacher, 95, 7, 486–490.

Knuth, E. J., 2002b. Teachers' Conceptions of Proof in the Context of Secondary School Mathematics, Journal of Mathematics Teacher Education, 5, 61–88.

LeVeque, J.R., 2003. The Development of the Function Concept in Students in Freshman Precalculus, Doktora Tezi, Morgan State University, USA.

Lee, W. I., 1999. The Relationship Between Students' Proof Writing Ability and Van Hiele Levels of Geometric Thought in a College Geometric Course, Doktora Tezi, College of Arts and Sciences Department of Mathematical Sciences, University of Northern Colorado, Greeley, Colorado, USA.

Long, M. J. ve Ben-Hur, M., 1991. Informing Learning Through the Clinical Interview, Arithmetic Teacher, 38, 6, 44-46.

Maher, C. A. ve Martino, A. M., 1996. The Development of the Idea of Mathematical Proof: A 5 Year Case Study, Journal for Research in Mathematics Education, 27, 2, 194-214.

Mann, C. J., Observational Research Methods. Research Design II: Cohort, Cross-Sectional and Case-Control Studies. http:// emj.bmj.com 3.12.2009.

Martin, G. ve Harel, G., 1989. Proof Frames of Preservice Elementary Teachers, Journal for Research in Mathematics Education, 20, 1, 41–51.

Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W. ve Dindyal, J., 2005. The Interplay of Teacher and Student Actions in the Teaching and Learning of Geometric Proof, Educational Studies in Mathematics, 60, 95–124.

Martin, W. O., Vidakovic, D. ve Vakil, R., 2000. Small-Group Searches for Mathematical Proofs and Individual Re-Constructions of Mathematical Concepts, DRAFT, February 17, 2000.

Martina, A. M. ve Maher, C. A., 1994. Teacher Questioning to Stimulate Justification and Generalization in Mathematics, Annual Meeting of the American Educational Research Association, April, New Orleans, LA.

Martino, A. M. ve Maher, C. A., 1999. Teacher Questioning to Promote Justification and Generalization in Mathematics: What Research Practice has Taught Us, Journal of Mathematical Behavior, 18, 1, 53–78.

Masingila, J. O., 1998. Thinking Deeply About Knowing Mathematics, The Mathematics Teacher, 91, 7, 610–614.

McCrone, S. M. S. ve Martin, T. S., 2004. The Impact of Teacher Actions on Student Proof Schemes in Geometry, In the Proceedings of the 25th Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education, North America, Toronto.

Mejia-Ramos, J. P. ve Tall, D., 2005. Personal and Public Aspects of Formal Proof: A Theory and a Single-Case Study, in D. Hewitt and A. Noyes (Eds), Proceedings of the Sixth British Congress of Mathematics Education held at the University of Warwick, 97–104.

Menard, S., 2008. Handbook of Longitudinal Research: Design, Measurement and Analysis, Academic Press, First Edition, London, UK.

Miller, S. A., 1998. Developmental Research Methods, Simon and Schuster/A Viacom Company, Second Edition, New Jersey, USA:

Mingus, T. T. Y.ve Grassl, R. M., 1999. Preservice Teacher Beliefs About Proofs, School Science and Mathematics, 99, 8, 438–444.

Moore, R. C., 1994. Making the Transition to Formal Proof, Educational Studies in Mathematics, 27, 249-266.

Moralı, S., Köroğlu, H. ve Çelik, A., 2004. Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmen Adaylarının Soyut Matematik Dersine Yönelik Tutumları ve Rastlanan Kavram Yanılgıları, Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24, 1, 161-175.

Moralı, S., Uğurel, I, Türnüklü, E. B. ve Yeşildere, S., 2006. Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri, Kastamonu Eğitim Dergisi, 14, 1, 147–160.

Nardi, E. ve Iannone, P., Transforming Theory into Practice: A Guide for Teaching Proof to Mathematics Undergraduates Grounded on the Co-Ordinated Perspectives and Recommendations of Mathematicians and Researchers in Mathematics Education. http://research.edu.uea.ac.uk/projects/transformingtheoryintopracticeaguide15.12.2008.

NCTM, 1989. Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics, The National Council of Teachers of Mathematics, INC, United States of America.

NCTM, 1991. Professional Standards for Teaching Mathematics, Reston, VA, Author.

NCTM, 2000. Principles and Standards for School Mathematics, NCTM, Reston, Virginia.

NCTM, Reasoning and Proof Standard for Grades 3-5. http://standards.nctm.org/document/chapter5/reas.htm 07.06.2007.

Nicely, R. F., 1989. Higher-Order Thinking Skills in Mathematics Textbooks: A Research Summary, Education, 111, 4, 456–460.

OECD, PISA 2006: Science Competencies for Tomorrow's World Executive Summary. http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf13 July 2008

Olkun, S. ve Aydoğdu, T., 2003. Üçüncü Uluslar Arası Matematik ve Fen Araştırması (TIMSS) Nedir? Neyi Sorgular? Örnek Geometri Soruları ve Etkinlikler, İlköğretim Online, 2, 1, 28-35.

Olsker, T. C., 2007. Proof Schemes and Proof Writing, Doktora Tezi, Claremont Graduate University, Claremont California, USA.

Özer, Ö. ve Arıkan, A., 2002. Lise Matematik Derslerinde Öğrencilerin İspat Yapabilme Düzeyleri, V. Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Eylül, Ankara, Bildiriler Kitabı II: 1083-1089.

Padula, J.,2006. The Wording of a Proof: Hardys' Second "Elegant" Proof, Australian Mathematics Teacher, 62, 2, 18-24.

Pandiscio, E. A., 2002. Exploring the Link Between Preservice Teachers' Conception of Proof and the Use of Dynamic Geometry Software, School Science and Mathematics, 102, 5, 216-221.

Pilten, P., 2008. Matematiksel Muhakemeyi Değerlendirme Ölçeği: Ölçek Geliştirme, Güvenirlik Ve Geçerlik Çalışması, Selçuk Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi, 25, 297-316.

Raman, M.,2001. Beliefs About Proof in Collegiate Calculus, Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, October, Snowbird, Utah.

Raman, M. J., 2002. Proof and Justification in Collegiate Calculus, Doktora Tezi, Science and Mathematics Education in the Graduate Division of the University of California, Berkeley, USA.

Raman, M., 2003. Key Ideas: What are They and How can They Help Us Understand How People View Proof?, Educational Studies in Mathematics, 52, 319–325.

Recio, A. M. ve Godino, J. D., 2001. Institutional and Personal Meanings of Mathematical Proof, Educational Studies in Mathematics, 48, 1, 83-89.

Reid; D. A., 2002. Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics, Journal for Research in Mathematics Education, 33, 1, 5–29.

Research Advisory Committee of The National Council of Teachers of Mathematics, 1996. Justification and Reform, Journal for Research in Mathematics Education,27, 5, 516-520.

Riley, K. J., 2004. Prospective Secondary Mathematics Teachers' Conceptions of Proof and Its Logical Underpinnings, Psychology of Mathematics and Education of North America, 2004 Annual Meeting, Toronto, Canada, 1-7.

Rodd, M. M., 2000. On Mathematical Warrants: Proof does not Always Warrant, and a Warrant may be Other Than a Proof, Mathematical Thinking and Learning, 2, 3, 221–244.

Rodriguez, A. V. R., 2006. Ways of Reasoning and Types of Proofs That Mathematics Teachers Show in Technology-Enhanced Instruction, Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, TBA, Mérida, Yucatán, Mexico.

Sarı, M., Altun, A. ve Aşkar, P., 2007. Üniversite Öğrencilerinin Analiz Dersi Kapsamında Matematiksel Kanıtlama Süreçleri: Örnek Olay Çalışması, Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40, 2, 295-319.

Schoenfeld, A. H., 1994. Reflections on Doing and Teaching Mathematics, Mathematical Thinking and Problem Solving, 53–69.

Selden, A. ve Selden, J., 2003. Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem?, Journal for Research in Mathematics Education,34, 1, 4–36.

Senk, S. L., 1983. Proof-Writing Achievement and Van Hiele Levels Among Secondary School Geometry Students, Doktora Tezi, Department of Education, The University of Chicago, Chicago-Illinois, USA.

Senk, S., 1985. How Well do Students Write Geometry Proofs?, Mathematics Teacher, 78, 448-456.

Simon, M. A. ve Blume, G. W., 1996. Justification in the Mathematics Classroom: A Study of Prospective Elementary Teachers, Journal of Mathematical Behavior, 15, 3–31.

Smith, J. C., 2006. Students' Strategies for Constructing Mathematical Proofs in a Problem-Based Undergraduate Course, Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psyhcology of Mathematics Education, Merida, Mexico, 2, 430-432.

Solomon, Y., 2006. Deficit or Difference? The Role of Students' Epistemologies of Mathematics in Their İnteractions with Proof, Educational Studies in Mathematics, 61, 3, 373-393.

Sowder, L. ve Harel, G., 1998. Types of Students' Justifications, The Mathematics Teacher, 91, 8, 670–675.

Sowder, L. ve Harel, G., 2003. Case Studies of Mathematics Majors' Proof Understanding, Production and Appreciation, Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 3, 2, 251-267.

Stewart, C., D., 2002. Using Clinical Interviewing to Inform Teaching: Three Prospective K-8 Teachers' Experiences in a Reform-Based Mathematics Education Course, Doktora Tezi, University of Virginia, USA.

Stylianides, A. J.,2005. Proof and Proving in School Mathematics Instruction: Making the Elementary Grades Part of the Equation, Doktora Tezi,The University of Michigan, USA.

Stylianides, A. J., 2007a. The Notion of Proof in the Context of Elementary School Mathematics, Educational Studies in Mathematics, 65, 1–20.

Stylianides, A. J., 2007b. Introducing Young Children to the Role of Assumptions in Proving, Mathematical Thinking and Learning, 9, 4, 361–385.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. ve Philippou, G. N.,2005. Prospective Teachers' Understanding of Proof: What if the Truth Set of an Open Sentence is Broader Than That Covered by the Proof?, In Chick, H. L. and Vincent, J. L. (Eds.). Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Melbourne, PME 4, 241-248.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. ve Philippou, G. N., 2007. Preservice Teachers' Knowledge of Proof by Mathematical Induction, Journal of Mathematics Teacher Education, 10, 145-166.

Stylianides, G. J., 2007c. Investigating the Guidance Offered to Teachers in Curriculum Materials: The Case of Proof in Mathematics, International Journal of Science and Mathematics Education, 6, 191-215.

Stylianou, D. A. ve Blanton, M. L., Sociocultural Factors in Undergraduate Mathematics: The Role of Explanation and Justification. http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap168.pdf 17.02.2001.

Stylianou, D. A., Chae, N. ve Blanton, M. L., 2006. Students' Proof Schemes: A Closer Look at What Characterizes Students' Proof Conceptions, Psychology of Mathematics and Education of North America, 2006 Annual Meeting, USA, 2, 1-7.

Szombathelyi, A. ve Szarvas, T., 1998. Ideas for Developing Students' Reasoning: A Hungarian Perspective, The Mathematics Teacher, 91, 8, 677–681.

Şandır, H., Argün, Z. ve Bulut, M., 2005. Fonksiyon Kavramı İle İlgili Fen Lisesi Matematik Öğretmenlerinin Anlayışlarının Değerlendirilmesi, XIV. Ulusal Eğitim Bilimleri Kongresi, Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Eylül 2005, Denizli, Bildiriler Kitabı II: 396-399.

Tabachnick, B. G. ve Fidell, L. S., 1996. Using Multivariate Statistics, Harper Collins College Publishers, New York.

T. C. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, 2005a. İlköğretim Matematik Dersi 1–5. Sınıflar Öğretim Programı, Ankara.

T. C. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, 2005b. İlköğretim Matematik Dersi 6–8. Sınıflar Öğretim Programı, Ankara.

T. C. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, 2005c. Ortaöğretim Matematik Dersi 9–12. Sınıflar Öğretim Programı, Ankara.

T. C. Milli Eğitim Bakanlığı, 2005d. PISA nedir? (EARGED). http://earged.meb.gov.tr/pisa/dil/tr/pisa2003.html13.07.2008.

T. C. Milli Eğitim Bakanlığı, PISA 2006 Projesi Ulusal Nihai Raporu (EARGED). http://earged.meb.gov.tr/pisa/dil/tr/pisa2006.html 13.07.2008.

Tall, D., 1979. Qualitative Thought Processes in Clinical Interviews, Proceedings of the Third International Conference for the Psyhcology of Mathematics Education, Warwick, England.

Tall, D., 1989. The Nature of Mathematical Proof, Mathematics Teaching, 127, 28–32.

Tall, D., 1992. The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof, In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, New York, NY,495-511.

Tall, D., 1998. The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some?, Conference of the University of Chicago School Mathematics Project, August, USA.

Tall, D., 2005. The Transition from Embodied Thought Experiment and Symbolic Manipulation To Formal Proof, Delta Conference, November, on Frazer Island, Australia.

Tall, D., 2006. A Theory of Mathematical Growth Through Embodiment, Symbolism and Proof, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11, 195–215.

Tall, D. ve Mejia-Ramos, J. P., 2006. The Long-Term Cognitive Development of Different Types of Reasoning and Proof, Conference on Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives, Universitat Duisburg-Essen, Germany.

Tatar, E. ve Dikici, R., 2008. Matematik Eğitiminde Öğrenme Güçlükleri, Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, 5, 9, 183-193.

Tavşancıl, E. ve Keser, H., 2002. İnternet Kullanımına Yönelik Likert Tipi Bir Tutum Ölçeğinin Geliştirilmesi, Eğitim Bilimleri Dergisi, 1, 1, 79-100.

Toluk, Z., 2003. Üçüncü Uluslararası Matematik ve Fen Araştırması (TIMSS): Matematik Nedir?, İlköğretim Online, 2, 1, 36-41.

URL-1, http://math.ucsd.edu/~harel/downloadablepapers/Harel's%20WhatIsMathematics.pdf 11 Mart 2006.

URL-2, http://www.oecd.org/dataoecd/30/17/39703267.pdf. 17 Şubat 2006.

URL-3, http://trabzon.meb.gov.tr/trabzon/duyuru1Detay.asp?de1=4&etkid=674. 17 Şubat 2006.

URL-4, http://timss.bc.edu/timss1999i/math_achievement_report.html. 18 Temmuz 2002.

URL-5, http://www.csulb.edu/~msaintg/ppa696/696preex.htm#Cross-Sectional%20Design. 28 Kasım 2009.

Üzel, D. ve Özdemir, E., 2009. Elementary Mathematics Teachers Candidates' Attitudes Towards Proof and Proving, e-Journal of New World Sciences Academy, 4, 4, 1226-1236.

Weber, K., 2001. Student Difficulty in Constructing Proofs: The Need for Strategic Knowledge, Educational Studies in Mathematics, 48, 101–119.

Weber, K.,2004. A Framework for Describing the Process That Undergraduates Use to Construct Proofs, In M. J. Hoines ve A. B. Fuglestad (Eds.). International Group for the Psychology of Mathematics Education, 28th, Bergen, Norway, 14-18.

Weber, K., 2005. A Procedurel Route Toward Understanding Aspects of Proof: Case Studies from Real Analysis, Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 5, 4, 369–483.

Whitenack, J. ve Yackel, E., 2002. Making Mathematical Arguments in the Primary Grades: The Importance of Explaining and Justifying Ideas, Teaching Children Mathematics, 524–527.

Wimer, J. W., Ridenour, C. S., Thomas, K. ve Place, A. W., 2001. Higher Order Teacher Questioning of Boys and Girls in Elementary Mathematics Classrooms, The Journal of Educational Research, 95, 21, 84–92.

Winicki-Landman, G.,1998. On Proofs and Their Performance as Works of Art, Mathematics Teacher, 91, 8, 722-725.

Wynn, K., 1992. Addition and Subtraction by Human Infants, Nature, 358, 749-750.

Yeşildere, S. ve Türnüklü, E. B., 2007. Öğrencilerin Matematiksel Düşünme ve Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi, Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40, 1, 295-319.

Yeşilyurt, S. ve Gül, Ş., 2007. Bilgisayar Kullanma Becerileri ve Bilgisayarlara Yönelik Tutum Ölçeği (BKBBYTÖ): Geçerlik ve Güvenirlik Çalışması, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24, 181-213.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H., 2005. Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri, 5. Baskı. Seçkin Yayıncılık, Ankara.

Yıldız, G., 2006. Lisans Seviyesinde Genel Matematik Dersindeki Teorem ve İspatları Anlamaya Yönelik Kavrama Testinin Hazırlanması, Uygulanması ve Öğrenci Görüşlerinin Değerlendirmesi, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Zack, V., 1999. Everyday and Mathematical Language in Children's Argumentation About Proof, Educational Review, 51, 2, 129–146.

Zaskis, R. ve Hazzan, O., 1999. Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions, Journal of Mathematical Behaviour, 17, 4, 429-439.

## 8. EKLER

### EK 1. MATEMATİKSEL KANIT YAPMAYA YÖNELİK GÖRÜŞ ÖLÇEĞİ

Değerli Öğretmen Adayları,

Bu ölçek "matematiksel kanıt yapma" ya yönelik düşüncelerinizi almak amacıyla hazırlanmıştır. İfadelerden hiçbirinin kesin yanıtı yoktur. Her ifadeyle ilgili görüş, kişiden kişiye değişebilir. Bunun için vereceğiniz yanıtlar kendi görüşünüzü yansıtmalıdır.

Bu ölçekten elde edilen veriler, bilimsel bir araştırmada kullanılacaktır. Bu nedenle lütfen soruları dikkatlice okuyarak eksiksiz olarak yanıtlayınız. Araştırmanın geçerliliği açısından açık uçlu soruların ayrıntılı olarak yanıtlandırılması önemlidir.

Katkılarınızdan dolayı teşekkür ederim.

Ad Soyad: ……………………………………………….....

Cinsiyet: ☐ Bayan ☐ Bay

Bölüm: ………………………☐ (Ö.Ö) ☐ (İ.Ö)

Sınıf: ……… Yaş: …………..

Genel not ortalamanız nedir?

☐ 1.5 ve altı
☐ 1.51-2.0 arası
☐ 2.01-2.5 arası
☐ 2.51-3.0 arası
☐ 3.01-3.5 arası
☐ 3.51-4.0 arası

**LÜTFEN TÜM SORULARI OKUMAYA VE HER SORUDA SİZİN DÜŞÜNCENİZİ EN İYİ TANIMLAYAN YALNIZ BİR KUTUYU (X) İŞARETİYLE İŞARETLEMEYE ÖZEN GÖSTERİNİZ.**

**Arş. Gör. Tuba İSKENDEROĞLU**
**K.T.Ü. Fatih Eğitim Fakültesi**

| İFADELER | Asla | Nadiren | Bazen | Sık sık | Her zaman |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. Kanıt yapmak zordur. | | | | | |
| 2. Bir kanıtı öğretmen yaptığında anlarım fakat kendi başıma yapamam. | | | | | |
| 3. Kanıt yaparken tanımları kullanırım. | | | | | |
| 4. Kanıt yaparken kanıt süreçlerini hatırlarım ve ilgili teoremleri kullanırım. | | | | | |
| 5. Kanıt yapma uygulamaları problem çözme becerilerimi geliştirmeme yardımcı olmuyor. | | | | | |
| 6. Sınıfta kanıtların yapılışını anlamadığımda sorular sorarım. | | | | | |
| 7. Kanıt yaparken bir sonraki adımda ne yapılacağına karar vermekte zorlanırım. | | | | | |
| 8. Kanıt yaparken başkalarından yardım almam. | | | | | |
| 9. Kanıt yapmaya başladıktan sonra zorlanırsam farklı yolları düşünmek için kendime zaman tanırım. | | | | | |

Ek 1'in devamı

| | Asla | Nadiren | Bazen | Sık sık | Her zaman |
|---|---|---|---|---|---|
| 10. Kanıt sadece özel durumları doğrulamakta kullanılır. | | | | | |
| 11. Kanıt yapmaya karar verince tek başıma çalışırım. | | | | | |
| 12. Kanıtı kendi başıma yapabileceğime inanıyorum. | | | | | |
| 13. Kanıtı bitirdikten sonra yaptıklarımı tekrar kontrol etmeye gerek duymam. | | | | | |
| 14. Kanıta verilen bir durumla başlanır ve bir kararla bitirilir. | | | | | |
| 15. Kanıt yapmak mantıksal düşünmemi geliştirir. | | | | | |
| 16. Kanıtı yaparken kanıtlayacağım matematiksel ifadeyi tekrar okurum. | | | | | |
| 17. Kanıt oluştururken başarılı olmak için önceki bilgileri kullanabilmenin önemli olduğunu düşünüyorum. | | | | | |
| 18. Kanıtın verilen durumu neden sağladığını anlamak benim için önemlidir. | | | | | |
| 19. Kanıtı yapmaya başlamadan önce kullanılabilecek farklı yöntemleri düşünürüm. | | | | | |
| 20. Matematiksel kanıt yapmayı seviyorum. | | | | | |
| 21. Kanıta başladığımda bir süre tek başıma çalışırım. Sonra eğer işin içinden çıkamazsam yardım isterim. | | | | | |
| 22. Kanıtı yapmakta zorlandığımda başka bir yaklaşımla sonuçlandırmaya çalışırım. | | | | | |
| 23. Sınıfta kanıt yapılırken soru sormakta zorlanırım. | | | | | |
| 24. Kanıtın bir sonraki adımına geçmeden önce kanıtı tamamlamakta kullanacağım yönteme karar vermek sonuca daha kolay ulaşmamı sağlar. | | | | | |
| 25. Öğretmenin sınıfta yaptığı kanıtı tekrar düzenlemenin zaman kaybı olduğunu düşünüyorum. | | | | | |
| 26. Kanıt yapmanın tek yolu tümevarımdır. | | | | | |
| 27. Kanıt yaparken düşüncelerimi arkadaşlarımla paylaşırım. | | | | | |

28. Sizce matematiksel kanıtın matematik öğrenmedeki rolü nedir?

Ek 1.'in devamı

29. Ne zaman ve hangi durumda/durumlarda matematiksel kanıt yapmaya ihtiyaç duyarsınız?

30. Matematiksel kanıt yaparken neye/nelere gereksinim duyarsınız?

## EK 2: YAZILI SINAVDA ve GÖRÜŞMEDE KULLANILAN PROBLEMLER İLE DEĞERLENDİRME ÖLÇEKLERİ

### Kanıt (Savunma) Şemaları İle İlgili Problemler

**1. Problem**

$\{2n^2+n^3 : n \in \{1, 2, 3, \ldots, 100\}\}$ ifadesini bir fonksiyon olarak tanımlayabilir miyiz? Açıklayınız.

| Kanıt Şemaları | | Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri | Problemin Değerlendirilmesi |
|---|---|---|---|
| Dışsal Kanıt Şemaları | Otorite | Öğrenci bir kitaba, bir öğretmenin yaptığı hesaplamaya veya sınıfta sonucu kanıtlayan veya doğrulayan daha bilgili birisine güvenerek ona inanmakta ve bulduğu bir sonucun doğruluğunu anlamını bilmeden kurallara dayandırmaktadır. | ➢ Öğrencinin tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde karşılığı varsa fonksiyondur, fonksiyonu bir makineye benzetiyorum, hoca derste böyle anlatmıştı, ben öyle öğrendim gibi açıklamalar yapması.<br>➢ Öğrencinin kitaplardan veya derste öğrendiğini dile getirerek fonksiyonun tanımını "A ve B boş olmayan kümeler olmak üzere A kümesinin her elemanını B kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen bağıntıya A'dan B'ye bir fonksiyon denir" biçiminde veya bu tanıma benzeyen farklı ifadeler ile açıklamasıdır. |
| | Alışkanlık Edinilmiş | Öğrenci tartışmanın doğruluğunu akıl yürüterek araştırmak yerine doğruları göstermektedir. Yani akıl yürütmekten ziyade karşılarındakileri ikna etmek için önceden öğrendikleri delilleri, sebepleri öne sürmektedirler. | ➢ Öğrencinin ifadeyi $f(x)=2x^2+x^3$ şeklinde yazdıktan sonra f(x) şeklinde yazılabildiği ve x yerine değerler verdiğinde bir f(x) değeri bulduğu için bir fonksiyon olarak tanımlanabileceğini ifade etmesidir. |
| | Sembolik | Öğrenci kanıt olarak anlamsız sembolleri kullanmaktadır. Örneğin $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ veya $2^5.2^3=4^{15}$ veya sin(x+y)=sinx+siny veya $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ gibi. | ➢ Öğrencinin $2n^2+n^3$ ifadesinin $f(n)=2n^2+n^2.n=3n^2+n$ şeklinde çarpanlarına ayrılan bir ifade olduğu için bir fonksiyon olduğunu belirtmesidir. |

Ek 2.'nin devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Sezgisel** | Öğrenci hisleri ile bir durumun doğru olduğunu sezinlemekte fakat güçlü bir kanıt bulamamaktadır. Bunun yanı sıra öğrenci görsel algılarını da kullanmaktadır. | ➢ Öğrencinin herhangi bir işlem yapmaya gerek duymadan fonksiyonun tanımından yola çıkarak bu ifadede n yerine verilecek her değer için bir karşılığı var gibi görünüyor şeklinde bir açıklama yapmasıdır. |
| | **Temel Örnekler** | Öğrenci kendisine ve diğerlerine inandırıcı sözler söyleyerek önceden öğrendiği bir veya birkaç örneği kanıt olarak kullanmaktadır. | ➢ Öğrencinin;<br>$f(n)=2n^2+n^3$<br>n=1 için f(x)=3<br>n=2 için f(x)=16<br>n=3 için f(x)=24<br>$3, 16, 24 \in \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ olduğu için bu ifade bir fonksiyondur şeklinde bir açıklama yapması. |
| **Analitik Kanıt Şemaları** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci tahminlerinde akıl yürütmeyi kullanarak özelden genelleme yoluna gitmektedir. Dönüştürülebilen kanıt şeması tümdengelimsel akıl yürütme ile öğrencilerin tahminlerinin sonuçlarını ve zihinsel işlemlerini içermektedir. | ➢ Öğrencinin;<br>$f(n)=2n^2+n^3$<br>n=1 için f(x)=3<br>n=2 için f(x)=16<br>n=3 için f(x)=24<br>.<br>.<br>.<br>n=100 için f(n)=1020000 ise<br>$f: \{1, 2, 3, .., 100\} \rightarrow \{3, 4, 5, .., 10200000\}$ olmak üzere $f(n)=2n^2+n^3$ bir fonksiyondur şeklinde bir açıklama yapması. |
| | **Aksiyomatik** | Öğrenci tanımsız terimleri, tanımları, tahminleri, sonuçları, teoremleri ve neden-sonuç ilişkisini kullanmaktadır. Öğrenci aynı zamanda alternatif aksiyomlar da geliştirebilir. | ➢ Öğrenci "A ve B boş olmayan kümeler olmak üzere A kümesinin her elemanını B kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen bağıntıya A'dan B'ye bir fonksiyon denir" tanımını kendi ifadeleri ile açıklaması ve verilen probleme bir değer kümesi tanımlandığında fonksiyon olarak tanımlanabileceğini ifade etmesi. |

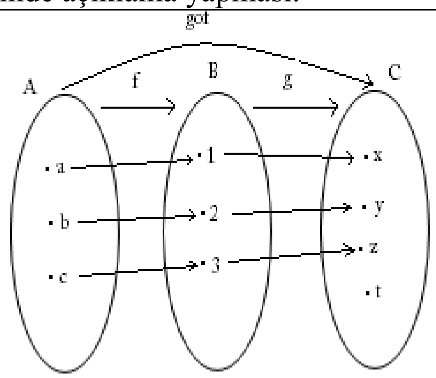
Ek 2.'nin devamı

**2. Problem**

$f: A \to B, g: B \to C$ fonksiyonları birebir ve örten ise $g \circ f: A \to C$ fonksiyonunun da birebir olduğunu gösteriniz.

| **Kanıt Şemaları** | | **Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri** | **Problemin Değerlendirilmesi** |
|---|---|---|---|
| **Dışsal Kanıt Şemaları** | **Otorite** | Öğrenci bir kitaba, bir öğretmenin yaptığı hesaplamaya veya sınıfta sonucu kanıtlayan veya doğrulayan daha bilgili birisine güvenerek ona inanmaktadır ve bulduğu bir sonucun doğruluğunu anlamını bilmeden kurallara dayandırmaktadır. | ➢ Öğrencinin birebirlik tanımını doğru biçimde verip g bileşke f fonksiyonuna transfer edememesi.<br>➢ Öğrencinin birebirlik tanımını sözel olarak doğru vermesi fakat g bileşke f'in birebirliğini gösterirken matematiksel olarak örtenliği kullanması.<br>➢ Öğrencinin birebirlik tanımı ile örtenlik tanımını birbirine karıştırması.<br>➢ Öğrencinin g bileşke f fonksiyonunun birebir olması için baştaki fonksiyonun (g fonksiyonu) birebir olmasının yeterli olduğunu ve bunu bir kural olarak anımsadığını dile getirmesi. |
| | **Alışkanlık Edinilmiş** | Öğrenci tartışmanın doğruluğunu akıl yürüterek araştırmak yerine doğruları göstermektedir. Yani akıl yürütmekten ziyade karşılarındakileri ikna etmek için önceden öğrendikleri delilleri, sebepleri öne sürmektedirler. | ➢ Öğrencinin matematiksel bir şeyler göstermek lazım. En azından birkaç formül yazarak bir şeyler göstermek lazım gibi ifadeler ile savunması.<br>➢ Öğrencinin verilen ifadenin doğruluğunu gösterdikten sonra biz böyle ifadeleri hep bu şekilde gösteririz gibi bir ifade kullanması. |
| | **Sembolik** | Öğrenci kanıt olarak anlamsız sembolleri kullanmaktadır. Örneğin $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ veya $2^5.2^3=4^{15}$ veya sin(x+y)=sinx+siny veya $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ gibi. | ➢ Öğrencinin |

Ek 2.'nin devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Sezgisel** | Öğrenci hisleri ile bir durumun doğru olduğunu sezinlemekte fakat güçlü bir kanıt bulamamaktadır. Bunun yanı sıra öğrenci görsel algılarını da kullanmaktadır. | ➢ Öğrencinin f birebirse, g birebirse g bileşke f'de kesin birebirdir gibi ifadeler kullanması.<br>➢ Öğrencinin bu doğru, normalde doğru gibi görünüyor gibi ifadeler kullanması.<br>➢ Öğrencinin f fonksiyonu A'dan B'ye, g fonksiyonu B'den C'ye, g bileşke f fonksiyonu A'dan C'ye, B'ler ortak olduğu için birebir olması lazım şeklinde açıklama yapması. |
| | **Temel Örnekler** | Öğrenci kendisine ve diğerlerine inandırıcı sözler söyleyerek önceden öğrendiği bir veya birkaç örneği kanıt olarak kullanmaktadır. | <br>➢ Öğrencinin yukarıdaki gibi bir örnek ile g bileşke f fonksiyonunun birebir olduğunu ile açıklaması.<br>➢ Öğrencinin f={(a,x), (b,y)}, g={(x,1), (y,2)} ise gof={(a,1), (b,2)} biçiminde bir örnek ile savunması. |
| **Analitik Kanıt** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci tahminlerinde akıl yürütmeyi kullanarak özelden genelleme yoluna gitmektedir. Dönüştürülebilen kanıt şeması tümdengelimsel akıl yürütme ile öğrencilerin tahminlerinin sonuçlarını ve zihinsel işlemlerini içermektedir. | ➢ Öğrencinin farklı bir tanım yardımıyla birebirliğin tanımını hatırlaması ve işlemleri yapması.<br>➢ Öğrencinin seçtiği farklı birkaç örnek yardımıyla verilen ifadenin doğrulunun gösterirken bir genellemeye ulaşması ve bunun sonucunda da ifadenin doğru olduğunu belirtmesi. |

Ek 2.'nin devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Aksiyomatik | Öğrenci tanımsız terimleri, tanımları, tahminleri, sonuçları, teoremleri ve neden-sonuç ilişkisini kullanmaktadır. Öğrenci aynı zamanda alternatif aksiyomlar da geliştirebilir. | ➢ Öğrencinin x,y ЄA ve (gof)(x)=(gof)(y) olsun. X=y olduğunu gösterirsek gof fonksiyonunun birebir olduğunu göstermiş oluruz. (gof)(x)=g(f(x)) (gof)(y)=g(f(y)) İse g(f(x))=g(f(y)) g birebir olduğundan f(x)=f(y) ve f birebir olduğundan x=y'dir şeklinde çözümünü yaparak açıklamasıdır. |

**3. Problem**

F(x)'in 2. dereceden herhangi bir fonksiyon olduğunu varsayalım. $F\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{F(x)+F(y)}{2}$ eşitliği doğru mudur, yanlış mıdır? Açıklayınız.

| Kanıt Şemaları | | Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri | Problemin Değerlendirilmesi |
|---|---|---|---|
| Dışsal Kanıt Şemaları | Otorite | Öğrenci bir kitaba, bir öğretmenin yaptığı hesaplamaya veya sınıfta sonucu kanıtlayan veya doğrulayan daha bilgili birisine güvenerek ona inanmaktadır ve bulduğu bir sonucun doğruluğunu anlamını bilmeden kurallara dayandırmaktadır. | ➢ Öğrencinin verilen eşitliğin doğru olduğunu söyleyerek bu ifadeyi daha önce bir kitapta gördüğünü veya öğretmeninin sınıfta bu eşitliği gösterdiğini dile getirmesi. |
| | Alışkanlık Edinilmiş | Öğrenci tartışmanın doğruluğunu akıl yürüterek araştırmak yerine doğruları göstermektedir. Yani akıl yürütmekten ziyade karşılarındakileri ikna etmek için önceden öğrendikleri delilleri, sebepleri öne sürmektedirler. | ➢ Öğrencinin herhangi bir F(x) fonksiyonu tanımlayarak eşitliğin doğruluğunu gösterdikten sonra bu tür eşitliklerin doğruluğunun sadece bu yöntem ile gösterileceğini savunması. ➢ Öğrencinin eşitliği bir biçimde gösterdikten sonra yaptığı işlemleri tekrar gözden geçirerek kontrol etmesi. |

Ek 2.'nin devamı

<table>
<tr><td></td><td>Sembolik</td><td>Öğrenci kanıt olarak anlamsız sembolleri kullanmaktadır. Örneğin $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ veya $2^5.2^3=4^{15}$ veya sin(x+y)=sinx+siny veya $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ gibi.</td><td>➢ Öğrencinin eşitliğin doğruluğunu $F(\frac{x+y}{2})=F\left(\frac{x}{2}\right)+F\left(\frac{y}{2}\right)=\frac{F(x)+F(y)}{2}$ şeklinde yaparak göstermesi.<br>➢ Öğrencinin 2+2=4 ise buda eşittir gibi bir açıklama yapması.<br>➢ Öğrencinin s(AUB)=s(A)+s(B) gibi buda eşittir demesi.<br>➢ Öğrencinin fonksiyonlarda $\frac{f}{g}:A\cap B\rightarrow IR, g(x)\neq 0, \left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ özelliğini göz önünde bulundurarak $F\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{F(x)+F(y)}{2}$ ifadesinin doğru olduğunu belirtmesi.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Deneysel Kanıt Şemaları</td><td>Sezgisel</td><td>Öğrenci hisleri ile bir durumun doğru olduğunu sezinlemekte fakat güçlü bir kanıt bulamamaktadır. Bunun yanı sıra öğrenci görsel algılarını da kullanmaktadır.</td><td>➢ Eşitliğin öğrenciye göre sadece doğru olması.<br>➢ Öğrencinin ifadenin eşit olduğunu düşünmesi fakat herhangi bir savunma yaparak doğru olduğunu gösterememesi.</td></tr>
<tr><td>Temel Örnekler</td><td>Öğrenci kendisine ve diğerlerine inandırıcı sözler söyleyerek önceden öğrendiği bir veya birkaç örneği kanıt olarak kullanmaktadır.</td><td>➢ Öğrencinin x ve y'ye sayı değerleri vererek eşitliğin doğru olduğunu savunması veya göstermesi.<br>➢ Öğrencinin herhangi bir F(x) fonksiyonu belirleyerek eşitlikte yerine yazması ve eşitliğin doğru olduğunu göstermesi.<br>➢ Öğrencinin tanımladığı bir fonksiyona sayısal değerler vererek eşitliğin doğru olduğunu göstermesi.</td></tr>
</table>

Ek 2.'nin devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Analitik Kanıt Şemaları** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci tahminlerinde akıl yürütmeyi kullanarak özelden genelleme yoluna gitmektedir. Dönüştürülebilen kanıt şeması tümdengelimsel akıl yürütme ile öğrencilerin tahminlerinin sonuçlarını ve zihinsel işlemlerini içermektedir. | ➢ Öğrencinin x ve y'ye farklı farklı değerler verdikten sonra bir genellemeye ulaşarak $F\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{F(x)+F(y)}{2}$ eşitliğinin doğru olduğunu göstermesi.<br>Örneğin; x=1 ve y=2 olsun.<br>$F\left(\frac{1+2}{2}\right)=\frac{F(1)+F(2)}{2} \Rightarrow F\left(\frac{3}{2}\right)=F\left(\frac{3}{2}\right)$<br>ve daha sonra x ve y'ye yine ve yine farklı değerler vererek ifadenin doğru olduğunu söylemesi ve bir genellemeye ulaşması.<br>➢ Öğrencinin farklı farklı F(x) fonksiyonları tanımlayarak işlemleri her F(x) fonksiyonu için yaptıktan sonra bir genellemeye ulaşarak eşitliğin doğruluğunu göstermesi. |
| | **Aksiyomatik** | Öğrenci tanımsız terimleri, tanımları, tahminleri, sonuçları, teoremleri ve neden-sonuç ilişkisini kullanmaktadır. Öğrenci aynı zamanda alternatif aksiyomlar da geliştirebilir. | ➢ Öğrencinin F(x) fonksiyonunu $ax^2$+bx+c şeklinde tanımladıktan sonra $F\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{F(x)+F(y)}{2}$ ifadesinin doğru olduğunu kabul ederek $a\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+b\left(\frac{x+y}{2}\right)+c=\frac{ax^2+bx+c+ay^2+by+c}{2}$ ifadesine ulaşması ve gerekli işlemleri yaptıktan sonra $2xy=x^2+y^2$ sonucuna ulaşması. Bunun sonucunda da a, b, c katsayılarının veya x, y değerlerinin pozitif veya negatif olma durumlarını düşünerek eşitliği sorgulaması ve eşit olmadığına karar vermesi. |

**4. Problem**

$ax^2+bx+c=0$ olmak üzere $x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$ olduğunu gösteriniz.

Ek 2.’nin devamı

| **Kanıt Şemaları** | | **Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri** | **Problemin Değerlendirilmesi** |
|---|---|---|---|
| **Dışsal Kanıt Şemaları** | **Otorite** | Öğrenci bir kitaba, bir öğretmenin yaptığı hesaplamaya veya sınıfta sonucu kanıtlayan veya doğrulayan daha bilgili birisine güvenerek ona inanmaktadır ve bulduğu bir sonucun doğruluğunu anlamını bilmeden kurallara dayandırmaktadır. | ➢ Öğrencinin problemde gösterilmesi istenen ifadeyi daha önce bir kitapta gördüğünü veya sınıfta öğretmenin bu ifadedeki eşitliği gösterdiğini söyleyerek herhangi bir işlem yapmaması.<br>➢ Öğrencinin bu eşitliği güvendiği bir arkadaşından veya bir büyüğünden öğrendiğini söylemesi.<br>➢ Öğrencinin; $ax^2+bx+c=$<br>$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}\right)$<br>$=a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$<br>$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$<br>$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$ ise<br>$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}\Rightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$<br>$\Rightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\mp\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$<br>$\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$<br>$\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$<br>$\Rightarrow x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$<br>O halde<br>$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} ve x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$<br>elde edilir ve bu da;<br>$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$ ’dır şeklindeki bir çözümü ezbere olarak yapmasıdır. |

Ek 2.'nin devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **Alışkanlık Edinilmiş** | Öğrenci tartışmanın doğruluğunu akıl yürüterek araştırmak yerine doğruları göstermektedir. Yani akıl yürütmekten ziyade karşılarındakileri ikna etmek için önceden öğrendikleri delilleri, sebepleri öne sürmektedirler. | ➢ Öğrencinin eşitliğin doğruluğunu gösterdikten sonra yaptığı işlemleri tekrar gözden geçirmesi ve kontrol etmesi.<br>➢ Öğrencinin verilen ifadenin doğruluğunu gösterdikten sonra biz böyle ifadeleri hep böyle gösteririz gibi bir ifade kullanması. |
| | **Sembolik** | Öğrenci kanıt olarak anlamsız sembolleri kullanmaktadır. Örneğin $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ veya $2^5.2^3=4^{15}$ veya sin(x+y)=sinx+siny veya $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ gibi. | ➢ Öğrencinin |
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Sezgisel** | Öğrenci hisleri ile bir durumun doğru olduğunu sezinlemekte fakat güçlü bir kanıt bulamamaktadır. Bunun yanı sıra öğrenci görsel algılarını da kullanmaktadır. | ➢ Öğrencinin x değerlerini bulmak için x'in $ax^2+bx+c=0$ denkleminden çekilerek yalnız bırakılması gerektiğini söylemesi ve verilen kök değerlerinin doğru olduğuna dair bir sezgiye sahip olması. Ama öğrencinin doğruluğunu hissetmekten öteye gidememesi, sadece x yalnız bırakıldığında verilen köklerin $x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$ şeklinde olabileceğini dile getirmesi. |

Ek 2.'nin devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Temel Örnekler | Öğrenci kendisine ve diğerlerine inandırıcı sözler söyleyerek önceden öğrendiği bir veya birkaç örneği kanıt olarak kullanmaktadır. | ➢ Öğrencinin $ax^2+bx+c=0$ ifadesi yerine kendince herhangi bir 2. dereceden denklem tanımlayıp verilen formül ile köklerini bulması. Ardından da bulduğu bu kökleri denklemde yerine yazarak denklemi sağladığını görünce bu ifade doğrudur şeklinde bir açıklama yapması.<br>➢ Öğrencinin verilen kökleri sırası ile denklemde yerine yazıp sıfıra ulaşması.<br>➢ Öğrencinin işlemin tersinden gidip $x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow$ $x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ için $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ *ve* $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ yazması ve $x_1\cdot 2a=-b+\sqrt{b^2-4ac}$ $\Rightarrow 2ax_1+b=\sqrt{b^2-4ac}$ şeklinde yazıp her iki tarafın karesini aldıktan sonra $4a^2x_1^2+4ax_1b+b^2=b^2-4ac$ $\Rightarrow 4a^2x_1^2+4ax_1b+4ac=0$ $\Rightarrow 4a(ax_1^2+bx_1+c)=0$ $\Rightarrow ax_1^2+bx_1+c=0$ yapıp aynı işlemleri $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ yaptıktan sonra verilen ifadenin doğru olduğunu dile getirmesi.<br>➢ Öğrencinin kökler toplam ve çarpım formüllerini yazması ve daha sonra da bu değerlerde kökleri yerine yazması. Ardından açıklamasını kökler formülleri sağladığı için ikinci dereceden denklemin kökleridir şeklinde dile getirmesi. |

Ek 2.’nin devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Analitik Kanıt Şemaları** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci tahminlerinde akıl yürütmeyi kullanarak özelden genelleme yoluna gitmektedir. Dönüştürülebilen kanıt şeması tümdengelimsel akıl yürütme ile öğrencilerin tahminlerinin sonuçlarını ve zihinsel işlemlerini içermektedir. | ➢ Öğrencinin $ax^2+bx+c=0$ ifadesi yerine kendince çarpanlarına ayrılabilen herhangi bir 2. dereceden denklem tanımlayıp, çarpanlarına ayırması ve köklerini bulması. Ardından $x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$ formülü ile aynı denklemin kök değerlerini bulması ve iki çözümde de kök değerleri aynı çıktığı için bu ifade doğrudur şeklinde bir açıklama yapması.<br>➢ Öğrencinin seçtiği birkaç tane birbirinden farklı ikinci dereceden denklemler yardımıyla kökleri bularak bir genellemeye ulaşması ve ifadenin doğruluğunu kanıtlaması. |

Ek 2.'nin devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **Aksiyomatik** | Öğrenci tanımsız terimleri, tanımları, tahminleri, sonuçları, teoremleri ve neden-sonuç ilişkisini kullanmaktadır. Öğrenci aynı zamanda alternatif aksiyomlar da geliştirebilir. | ➢ Öğrencinin; $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ <br> $=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}\right)$ <br> $=a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$ <br> $=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ <br> $=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$ ise <br> $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$ <br> $\Rightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ <br> $\Rightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\mp\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$ <br> $\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ <br> $\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ <br> $\Rightarrow x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ <br> O halde; <br> $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ve $x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ <br> elde edilir ve bu da; <br> $x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$ 'dır şeklindeki bir çözümü kendisinin düşünerek yapması. |

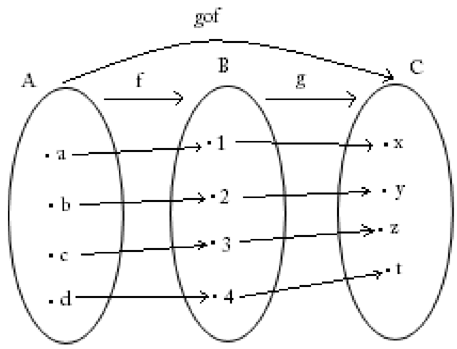
Ek 2.'nin devamı

**5. Problem**

$f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ fonksiyonları birebir ve örten ise $g \circ f: A \rightarrow C$ fonksiyonunun da örten olduğunu gösteriniz.

<table>
<tr><th colspan="2">Kanıt Şemaları</th><th>Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri</th><th>Problemin Değerlendirilmesi</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Dışsal Kanıt Şemaları</td><td>Otorite</td><td>Öğrenci bir kitaba, bir öğretmenin yaptığı hesaplamaya veya sınıfta sonucu kanıtlayan veya doğrulayan daha bilgili birisine güvenerek ona inanmaktadır ve bulduğu bir sonucun doğruluğunu anlamını bilmeden kurallara dayandırmaktadır.</td><td>➢ Öğrencinin örtenlik tanımını doğru biçimde verip g bileşke f fonksiyonuna transfer edememesi.<br>➢ Öğrencinin örtenlik tanımını sözel olarak doğru vermesi fakat g bileşke f'in örtenliğini gösterirken matematiksel olarak birebirliği kullanması.<br>➢ Öğrencinin birebirlik tanımı ile örtenlik tanımını birbirine karıştırması.<br>➢ Öğrencinin g bileşke f fonksiyonunun örten olması için baştaki fonksiyonun (g fonksiyonu) örten olmasının yeterli olduğunu ve bunu bir kural olarak anımsadığını dile getirmesi.</td></tr>
<tr><td>Alışkanlık Edinilmiş</td><td>Öğrenci tartışmanın doğruluğunu akıl yürüterek araştırmak yerine doğruları göstermektedir. Yani akıl yürütmekten ziyade karşılarındakileri ikna etmek için önceden öğrendikleri delilleri, sebepleri öne sürmektedirler.</td><td>➢ Öğrencinin matematiksel bir şeyler göstermek lazım. En azından birkaç formül yazarak bir şeyler göstermek lazım gibi ifadeler ile savunması.<br>➢ Öğrencinin verilen ifadenin doğruluğunu gösterdikten sonra biz böyle ifadeleri hep böyle gösteririz gibi bir ifade kullanması.</td></tr>
<tr><td>Sembolik</td><td>Öğrenci kanıt olarak anlamsız sembolleri kullanmaktadır. Örneğin $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ veya $2^5.2^3=4^{15}$ veya sin(x+y)=sinx+siny veya $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ gibi.</td><td>➢ Öğrencinin</td></tr>
</table>

Ek 2.'nin devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Sezgisel** | Öğrenci hisleri ile bir durumun doğru olduğunu sezinlemekte fakat güçlü bir kanıt bulamamaktadır. Bunun yanı sıra öğrenci görsel algılarını da kullanmaktadır. | ➢ Öğrencinin f örtense, g örtense g bileşke f'de kesin örtendir gibi ifadeler kullanması.<br>➢ Öğrencinin bu doğru, normalde doğru gibi görünüyor gibi ifadeler kullanması.<br>➢ Öğrencinin f fonksiyonu A'dan B'ye, g fonksiyonu B'den C'ye, g bileşke f fonksiyonu A'dan C'ye, B'ler ortak olduğu için örten olması lazım şeklinde açıklama yapması. |
| | **Temel Örnekler** | Öğrenci kendisine ve diğerlerine inandırıcı sözler söyleyerek önceden öğrendiği bir veya birkaç örneği kanıt olarak kullanmaktadır. | <br>➢ Öğrencinin yukarıdaki gibi bir örnek ile g bileşke f fonksiyonunun örten olduğunu açıklaması.<br>➢ Öğrencinin; A={a,b}, B={x,y}, C={1,2} şeklinde kümeler tanımladıktan sonra f={(a,x), (b,y)}, g={(x,1), (y,2)} ise gof={(a,1), (b,2)} biçiminde bir örnek ile g bileşke f'i savunması. |
| **Analitik Kanıt** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci tahminlerinde akıl yürütmeyi kullanarak özelden genelleme yoluna gitmektedir. Dönüştürülebilen kanıt şeması tümdengelimsel akıl yürütme ile öğrencilerin tahminlerinin sonuçlarını ve zihinsel işlemlerini içermektedir. | ➢ Öğrencinin farklı bir tanım yardımıyla örtenliğin tanımını hatırlaması ve problemi çözmesidir.<br>➢ Öğrencinin seçtiği farklı farklı örnekler sonucunda bir genellemeye ulaşarak ifadenin doğru olduğunu belirtmesi. |

Ek 2.'nin devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Aksiyomatik | Öğrenci tanımsız terimleri, tanımları, tahminleri, sonuçları, teoremleri ve neden-sonuç ilişkisini kullanmaktadır. Öğrenci aynı zamanda alternatif aksiyomlar da geliştirebilir. | ➢ Öğrencinin C'nin her celemanı için (gof)(a)=c olacak şekilde bir a∈A bulmalıyız.<br>g örten ise c∈C, b∈B öyle ki g(b)=c'dir.<br>f örten ise b∈B için vardır en az bir a∈A öyle ki f(a)=b'dir.<br>Öyleyse (gof)(a)=g(f(a))=g(b)=c'dir<br>Biçiminde çözümünü örtenliğin tanımını kullanarak sonuçlandırmasıdır. |

**6. Problem**

| |
|---|
| f fonksiyonu için I birim fonksiyon olmak üzere Iof=foI=f olduğunu gösteriniz. |

| Kanıt Şemaları | | Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri | Problemin Değerlendirilmesi |
|---|---|---|---|
| Dışsal Kanıt Şemaları | Otorite | Öğrenci bir kitaba, bir öğretmenin yaptığı hesaplamaya veya sınıfta sonucu kanıtlayan veya doğrulayan daha bilgili birisine güvenerek ona inanmaktadır ve bulduğu bir sonucun doğruluğunu anlamını bilmeden kurallara dayandırmaktadır. | ➢ Öğrencinin problemde gösterilmesi istenen ifadeyi daha önce bir kitapta gördüğünü veya sınıfta öğretmenin bu ifadedeki eşitliği gösterdiğini söyleyerek herhangi bir işlem yapmaması.<br>➢ Öğrencinin;<br>$A \neq Ø$ ve $I : A \to A$, I(x)=x olsun.<br>(foI)(x)=f(I(x))=f(x) $\Rightarrow$ foI=f'dir.<br>(Iof)(x)=I(f(x))=f(x) $\Rightarrow$ Iof=f'dir.<br>O halde foI=Iof=f'dir.<br>Şeklinde ifadeyi sağlayarak bunu okulda veya bir kitapta gördüğünü ve ezberlediğini söylemesi. |
| | Alışkanlık Edinilmiş | Öğrenci tartışmanın doğruluğunu akıl yürüterek araştırmak yerine doğruları göstermektedir. Yani akıl yürütmekten ziyade karşılarındakileri ikna etmek için önceden öğrendikleri delilleri, sebepleri öne sürmektedirler. | ➢ Öğrencinin eşitliği işlemlerini yaparak gösterdikten sonra eşitliğin doğru olduğunu işlemlerini kontrol ederek açıklaması.<br>➢ Öğrencinin verilen ifadenin doğruluğunu gösterdikten sonra biz böyle ifadeleri hep böyle gösteririz gibi bir ifade kullanması. |

Ek 2.'nin devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| Deneysel Kanıt Şemaları | **Sembolik** | Öğrenci kanıt olarak anlamsız sembolleri kullanmaktadır. Örneğin $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ veya $2^5.2^3=4^{15}$ veya sin(x+y)=sinx+siny veya $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ gibi. | ➢ Öğrencinin Iof=foI=f eşitliğinin doğruluğunu gösterirken I(x)=x'i ve herhangi bir f(x) fonksiyonunu tanımladıktan sonra Iof için f(x)'de x gördüğü yere I(x)'i yazması ve foI için de I(x)'de x gördüğü yere f(x) fonksiyonunu yazarak eşitliğin doğruluğunu göstermesi. |
| Deneysel Kanıt Şemaları | **Sezgisel** | Öğrenci hisleri ile bir durumun doğru olduğunu sezinlemekte fakat güçlü bir kanıt bulamamaktadır. Bunun yanı sıra öğrenci görsel algılarını da kullanmaktadır. | ➢ Öğrencinin Iof=foI=f eşitliğine baktıktan sonra ifadenin doğru göründüğünü ve doğruluğunun nasıl gösterileceğine dair bir fikri olmadığını belirtmesi. |
| Deneysel Kanıt Şemaları | **Temel Örnekler** | Öğrenci kendisine ve diğerlerine inandırıcı sözler söyleyerek önceden öğrendiği bir veya birkaç örneği kanıt olarak kullanmaktadır. | ➢ Öğrencinin birim fonksiyonun ne olduğunu söyledikten sonra tanımladığı herhangi bir f fonksiyonu ile işlemi gerçekleştirmesi. |
| Analitik Kanıt Şemaları | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci tahminlerinde akıl yürütmeyi kullanarak özelden genelleme yoluna gitmektedir. Dönüştürülebilen kanıt şeması tümdengelimsel akıl yürütme ile öğrencilerin tahminlerinin sonuçlarını ve zihinsel işlemlerini içermektedir. | ➢ Öğrencinin I(x)=x'i tanımladıktan sonra farklı farklı f(x) fonksiyonları tanımlaması ve bunun ardından da bir genellemeye ulaşarak ifadenin doğru olduğunu savunması. |
| Analitik Kanıt Şemaları | **Aksiyomatik** | Öğrenci tanımsız terimleri, tanımları, tahminleri, sonuçları, teoremleri ve neden-sonuç ilişkisini kullanmaktadır. Öğrenci aynı zamanda alternatif aksiyomlar da geliştirebilir. | ➢ Öğrencinin; $A \neq \varnothing$ ve $I: A \to A$, I(x)=x olsun. (foI)(x)=f(I(x))=f(x) $\Rightarrow$ foI=f'dir. (Iof)(x)=I(f(x))=f(x) $\Rightarrow$ Iof=f'dir. O halde foI=Iof=f'dir şeklindeki bir çözümü kendisinin yapması. |

**7. Problem**

| |
|---|
| f ve g fonksiyonları için $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ olduğunu gösteriniz. |

Ek 2.'nin devamı

| Kanıt Şemaları | | Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri | Problemin Değerlendirilmesi |
|---|---|---|---|
| **Dışsal Kanıt Şemaları** | **Otorite** | Öğrenci bir kitaba, bir öğretmenin yaptığı hesaplamaya veya sınıfta sonucu kanıtlayan veya doğrulayan daha bilgili birisine güvenerek ona inanmaktadır ve bulduğu bir sonucun doğruluğunu anlamını bilmeden kurallara dayandırmaktadır. | ➢ Öğrencinin problemde gösterilmesi istenen ifadeyi daha önce bir kitapta gördüğünü veya sınıfta öğretmenin bu ifadedeki eşitliği gösterdiğini söyleyerek herhangi bir işlem yapmaması.<br>➢ Öğrencinin bu ifadeyi daha önce bir sınıf arkadaşının kanıtladığını veya kendisinden daha büyük birisinin daha önce bu ifadenin doğruluğunu gösterdiğini söylemesi.<br>➢ Öğrencinin;<br>$(fog)^{-1}o(fog)=I$'dır.<br>$(g^{-1}of^{-1})o(fog)=g^{-1}o(f^{-1}of)og=g^{-1}oIog=$<br>$g^{-1}og=I$'dır.<br>O halde $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ dir.<br>Şeklindeki bir kanıtlamayı bir kitapta veya sınıfta görüp ezberlediği için yapması. |
| | **Alışkanlık Edinilmiş** | Öğrenci tartışmanın doğruluğunu akıl yürüterek araştırmak yerine doğruları göstermektedir. Yani akıl yürütmekten ziyade karşılarındakileri ikna etmek için önceden öğrendikleri delilleri, sebepleri öne sürmektedirler. | ➢ Öğrencinin fonksiyonlarda değişme özelliğinin olduğunu söyleyerek eşitliğin doğruluğunu $(fog)^{-1}=f^{-1}og^{-1}=g^{-1}of^{-1}$'dir şeklinde göstermesi.<br>➢ Öğrencinin eşitliğin doğruluğunu yaptığı işlemlerini tekrar kontrol ederek göstermesi.<br>➢ Öğrencinin verilen ifadenin doğruluğunu gösterdikten sonra biz böyle ifadeleri hep böyle gösteririz gibi bir ifade kullanması. |
| | **Sembolik** | Öğrenci kanıt olarak anlamsız sembolleri kullanmaktadır. Örneğin $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ veya $2^5.2^3=4^{15}$ veya sin(x+y)=sinx+siny veya $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ gibi. | ➢ Öğrencinin;<br>$\frac{1}{fog}=\frac{1}{f}o\frac{1}{g}=\frac{1}{g}o\frac{1}{f}=g^{-1}of^{-1}$<br>şeklinde sembolleri anlamsız bir biçimde kullanarak ifadenin doğruluğunu göstermesi. |

Ek 2.'nin devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Sezgisel** | Öğrenci hisleri ile bir durumun doğru olduğunu sezinlemekte fakat güçlü bir kanıt bulamamaktadır. Bunun yanı sıra öğrenci görsel algılarını da kullanmaktadır. | ➢ Öğrencinin böyle olması gerekiyor, doğru gibi görünüyor gibi ifadeler kullanması.<br>➢ Öğrencinin böyle olduğunu biliyorum ama nasıl göstereceğimi bilmiyorum şeklinde bir ifade kullanması. |
| | **Temel Örnekler** | Öğrenci kendisine ve diğerlerine inandırıcı sözler söyleyerek önceden öğrendiği bir veya birkaç örneği kanıt olarak kullanmaktadır. | ➢ Öğrencinin birer tane f(x) ve g(x) fonksiyonu tanımlayarak önce $(fog)^{-1}$'yi daha sonrada $g^{-1}of^{-1}$'i bulması. Ardından da iki ifadenin değeri birbirine eşit çıktığı için verilen ifadenin doğru olduğunu söylemesi. |
| **Analitik Kanıt Şemaları** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci tahminlerinde akıl yürütmeyi kullanarak özelden genelleme yoluna gitmektedir. Dönüştürülebilen kanıt şeması tümdengelimsel akıl yürütme ile öğrencilerin tahminlerinin sonuçlarını ve zihinsel işlemlerini içermektedir. | ➢ Öğrencinin birkaç kez farklı f(x) ve g(x) fonksiyonları tanımlayarak eşitliğin doğru olduğunu göstermesi ve bunun sonucunda da bir genellemeye ulaşarak bu ifadenin her zaman doğru olduğunu ifade etmesi. |
| | **Aksiyomatik** | Öğrenci tanımsız terimleri, tanımları, tahminleri, sonuçları, teoremleri ve neden-sonuç ilişkisini kullanmaktadır. Öğrenci aynı zamanda alternatif aksiyomlar da geliştirebilir. | ➢ Öğrencinin;<br>$(fog)^{-1}o(fog)=I$'dır.<br>$(g^{-1}of^{-1})o(fog)=g^{-1}o(f^{-1}of)og=g^{-1}oIog=g^{-1}og=I$'dır.<br>O halde ;<br>$(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$'dir veya<br>$(fog)o(fog)^{-1}=I$'dır<br>$(fog)o(g^{-1}of^{-1})=fo(gog^{-1})of^{-1}=foIof^{-1}=fof^{-1}=I$'dır.<br>O halde;<br>$(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$'dir.<br>Şeklindeki kanıtlamayı kendisinin düşünerek yapması.<br>➢ Öğrencinin;<br>$(fog)^{-1}(x)=y$ olsun.<br>$fog(y)=x$<br>$f^{-1}ofog(y)=f^{-1}(x)$<br>$g(y)=f^{-1}(x)$ ise $g^{-1}og(y)=g^{-1}of^{-1}(x)$<br>$y=g^{-1}of^{-1}$ şeklinde bir çözümü kendisinin düşünerek yapmasıdır. |

Ek 2.'nin devamı

**8. Problem**

| |
|---|
| $\log_x(a.b) = \log_x a + \log_x b$ olduğunu gösteriniz. |

| Kanıt Şemaları | | Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri | Problemin Değerlendirilmesi |
|---|---|---|---|
| **Dışsal Kanıt Şemaları** | **Otorite** | Öğrenci bir kitaba, bir öğretmenin yaptığı hesaplamaya veya sınıfta sonucu kanıtlayan veya doğrulayan daha bilgili birisine güvenerek ona inanmaktadır ve bulduğu bir sonucun doğruluğunu anlamını bilmeden kurallara dayandırmaktadır. | ➢ Öğrencinin problemde gösterilmesi istenen ifadeyi daha önce bir kitapta gördüğünü veya sınıfta öğretmenin bu ifadedeki eşitliği gösterdiğini söyleyerek herhangi bir işlem yapmaması.<br>➢ Öğrencinin bu ifadeyi daha önce bir sınıf arkadaşının kanıtladığını veya kendisinden daha büyük birisinin bu ifadenin doğruluğunu gösterdiğini söylemesi.<br>➢ Öğrencinin verilen ifadeyi bir kural olarak daha önce gördüğünü, kuralı ezbere bildiğini veya doğruluğunun aşikar olduğunu dile getirmesi.<br>➢ Öğrencinin;<br>$y_1 = \log_x a \Rightarrow a = x^{y_1}$<br>$y_2 = \log_x b \Rightarrow b = x^{y_2}$<br>$\Rightarrow a.b \Rightarrow x^{y_1}.x^{y_2}$<br>$\Rightarrow \log_x(a.b) = \log_x(x^{y_1}.x^{y_2})$<br>$\Rightarrow \log_x(a.b) = \log_x(x^{y_1+y_2})$<br>$\Rightarrow \log_x(a.b) = (y_1 + y_2)\log_x x$<br>$\Rightarrow \log_x(a.b) = (y_1 + y_2).1$<br>$\Rightarrow \log_x(a.b) = y_1 + y_2$<br>$\Rightarrow \log_x(a.b) = \log_x a + \log_x b$<br>şeklindeki bir kanıtlamayı bir kitapta veya sınıfta öğretmeninden veya arkadaşından görüp ezberlediği için yapması. |

Ek 2.'nin devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **Alışkanlık Edinilmiş** | Öğrenci tartışmanın doğruluğunu akıl yürüterek araştırmak yerine doğruları göstermektedir. Yani akıl yürütmekten ziyade karşılarındakileri ikna etmek için önceden öğrendikleri delilleri, sebepleri öne sürmektedirler. | ➢ Öğrencinin eşitliğin doğruluğunu yaptığı işlemleri tekrar kontrol ederek göstermesi.<br>➢ Öğrencinin eşitliğin doğruluğunu gösterdikten sonra böyle yapabildiğim için böyle yaptım gibi bir açıklamada bulunması.<br>➢ Öğrencinin verilen ifadenin doğruluğunu gösterdikten sonra biz böyle ifadeleri hep böyle gösteririz gibi bir ifade kullanması. |
| | **Sembolik** | Öğrenci kanıt olarak anlamsız sembolleri kullanmaktadır. Örneğin $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ veya $2^5.2^3=4^{15}$ veya sin(x+y)=sinx+siny veya $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ gibi. | ➢ Öğrencinin |
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Sezgisel** | Öğrenci hisleri ile bir durumun doğru olduğunu sezinlemekte fakat güçlü bir kanıt bulamamaktadır. Bunun yanı sıra öğrenci görsel algılarını da kullanmaktadır. | ➢ Öğrencinin böyle olması gerekiyor, doğru gibi görünüyor gibi ifadeler kullanması.<br>➢ Öğrencinin böyle olduğunu biliyorum ama nasıl göstereceğimi bilmiyorum şeklinde bir ifade kullanması. |
| | **Temel Örnekler** | Öğrenci kendisine ve diğerlerine inandırıcı sözler söyleyerek önceden öğrendiği bir veya birkaç örneği kanıt olarak kullanmaktadır. | ➢ Öğrencinin birer tane x, a, b değerleri tanımlayarak verilen ifadenin doğru olduğunu göstermesi. |
| **Analitik Kanıt** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci tahminlerinde akıl yürütmeyi kullanarak özelden genelleme yoluna gitmektedir. Dönüştürülebilen kanıt şeması tümdengelimsel akıl yürütme ile öğrencilerin tahminlerinin sonuçlarını ve zihinsel işlemlerini içermektedir. | ➢ Öğrencinin birkaç kez farklı x, a, b değerleri tanımlayarak eşitliğin doğru olduğunu göstermesi ve bunun sonucunda da bir genellemeye ulaşarak bu ifadenin her zaman doğru olduğunu ifade etmesi. |

Ek 2.'nin devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Aksiyomatik | Öğrenci tanımsız terimleri, tanımları, tahminleri, sonuçları, teoremleri ve neden-sonuç ilişkisini kullanmaktadır. Öğrenci aynı zamanda alternatif aksiyomlar da geliştirebilir. | ➢ Öğrencinin önce logaritma tanımını kullanarak ardından işlemlerini<br>$y_1 = \log_x a \Rightarrow a = x^{y_1}$<br>$y_2 = \log_x b \Rightarrow b = x^{y_2}$<br>$\Rightarrow a.b \Rightarrow x^{y_1}.x^{y_2}$<br>$\Rightarrow \log_x(a.b) = \log_x(x^{y_1}.x^{y_2})$<br>$\Rightarrow \log_x(a.b) = \log_x(x^{y_1+y_2})$<br>$\Rightarrow \log_x(a.b) = (y_1+y_2)\log_x x$<br>$\Rightarrow \log_x(a.b) = (y_1+y_2).1$<br>$\Rightarrow \log_x(a.b) = y_1+y_2$<br>$\Rightarrow \log_x(a.b) = \log_x a + \log_x b$<br>Biçiminde yapması. |

**9. Problem**

$f: A \rightarrow B$ birebir ve örten bir fonksiyon olduğuna göre $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ olduğunu gösteriniz.

| Kanıt Şemaları | | Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri | Problemin Değerlendirilmesi |
|---|---|---|---|
| Dışsal Kanıt Şemaları | Otorite | Öğrenci bir kitaba, bir öğretmenin yaptığı hesaplamaya veya sınıfta sonucu kanıtlayan veya doğrulayan daha bilgili birisine güvenerek ona inanmaktadır ve bulduğu bir sonucun doğruluğunu anlamını bilmeden kurallara dayandırmaktadır. | ➢ Öğrencinin;<br>f(x)=y ise $f^{-1}(y)$=x olduğundan $(f^{-1})^{-1}(x)$=y şeklinde bir doğrulamayı daha önce sınıfta yaptıklarını veya bir arkadaşından öğrendiğini dile getirmesi. |
| | Alışkanlık Edinilmiş | Öğrenci tartışmanın doğruluğunu akıl yürüterek araştırmak yerine doğruları göstermektedir. Yani akıl yürütmekten ziyade karşılarındakileri ikna etmek için önceden öğrendikleri delilleri, sebepleri öne sürmektedirler. | ➢ Öğrencinin verilen ifadenin doğruluğunu gösterdikten sonra biz böyle ifadeleri hep böyle gösteririz gibi bir ifade kullanması. |

Ek 2.’nin devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **Sembolik** | Öğrenci kanıt olarak anlamsız sembolleri kullanmaktadır. Örneğin $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ veya $2^5.2^3=4^{15}$ veya sin(x+y)=sinx+siny veya $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ gibi. | ➢ Öğrencinin; |
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Sezgisel** | Öğrenci hisleri ile bir durumun doğru olduğunu sezinlemekte fakat güçlü bir kanıt bulamamaktadır. Bunun yanı sıra öğrenci görsel algılarını da kullanmaktadır. | ➢ Öğrencinin böyle olması gerekiyor, doğru gibi görünüyor gibi ifadeler kullanması.<br>➢ Öğrencinin böyle olduğunu biliyorum ama nasıl göstereceğimi bilmiyorum şeklinde bir ifade kullanması. |
| | **Temel Örnekler** | Öğrenci kendisine ve diğerlerine inandırıcı sözler söyleyerek önceden öğrendiği bir veya birkaç örneği kanıt olarak kullanmaktadır. | ➢ Öğrencinin kendisinin seçtiği bir f fonksiyonu yardımıyla önce $f^{-1}$’i ve daha sonra da $(f^{-1})^{-1}$’i bularak f ile $(f^{1)-1}$’in birbirine eşit olduğunu belirtmesi. |
| **Analitik Kanıt Şemaları** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci tahminlerinde akıl yürütmeyi kullanarak özelden genelleme yoluna gitmektedir. Dönüştürülebilen kanıt şeması tümdengelimsel akıl yürütme ile öğrencilerin tahminlerinin sonuçlarını ve zihinsel işlemlerini içermektedir. | ➢ Öğrencinin problemin çözümünü;<br>$(f^{-1})^{-1}=f$ olsun ve $fof^{-1}=I$ ve $Iof=f$ ise<br>$(f^{-1})^{-1}of^{-1}=fof^{-1}$<br>$(f^{-1})^{-1}of^{-1}of=Iof$<br>$(f^{-1})^{-1}oI=Iof$ olmak üzere<br>$(f^{-1})^{-1}=f$’dir şeklinde yapması.<br>➢ Öğrencinin seçtiği farklı birkaç örnek ile $(f^{-1})^{-1}=f$ ifadesinin doğruluğunu gösterdikten sonra bir genellemeye ulaşarak verilen ifadenin doğru olduğunu belirtmesi. |
| | **Aksiyomatik** | Öğrenci tanımsız terimleri, tanımları, tahminleri, sonuçları, teoremleri ve neden-sonuç ilişkisini kullanmaktadır. Öğrenci aynı zamanda alternatif aksiyomlar da geliştirebilir. | ➢ Öğrencinin;<br>f(x)=y ise $f^{1}(y)=x$ olduğundan $(f^{-1})^{-1}(x)=y$ şeklinde bir doğrulamayı kendisinin düşünerek yapması. |

**10. Problem**

$f(x)=\log\frac{1-x}{1+x}$ olsun. a, b $\in$ (-1,1) için $f(a)+f(b)=f(\frac{a+b}{1+ab})$ olduğunu gösteriniz.

Ek 2.'nin devamı

| **Kanıt Şemaları** | | **Kanıt Şemalarının Genel Özellikleri** | **Problemin Değerlendirilmesi** |
|---|---|---|---|
| **Dışsal Kanıt Şemaları** | **Otorite** | Öğrenci bir kitaba, bir öğretmenin yaptığı hesaplamaya veya sınıfta sonucu kanıtlayan veya doğrulayan daha bilgili birisine güvenerek ona inanmaktadır ve bulduğu bir sonucun doğruluğunu anlamını bilmeden kurallara dayandırmaktadır. | ➢ Öğrencinin verilmiş olan ifadeyi daha önce bir yerde gördüğünü belirterek herhangi bir işlem yapmaması.<br>➢ Öğrencinin verilen ifadenin kanıtını daha önce sınıfta yaptıklarını belirtmesi. |
| | **Alışkanlık Edinilmiş** | Öğrenci tartışmanın doğruluğunu akıl yürüterek araştırmak yerine doğruları göstermektedir. Yani akıl yürütmekten ziyade karşılarındakileri ikna etmek için önceden öğrendikleri delilleri, sebepleri öne sürmektedirler. | ➢ Öğrencinin verilen ifadenin doğruluğunu gösterdikten sonra biz böyle ifadeleri hep böyle gösteririz gibi bir ifade kullanması. |
| | **Sembolik** | Öğrenci kanıt olarak anlamsız sembolleri kullanmaktadır. Örneğin $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ veya $2^5.2^3=4^{15}$ veya sin(x+y)=sinx+siny veya $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ gibi. | ➢ Öğrencinin; |
| **Deneysel Kanıt Şemaları** | **Sezgisel** | Öğrenci hisleri ile bir durumun doğru olduğunu sezinlemekte fakat güçlü bir kanıt bulamamaktadır. Bunun yanı sıra öğrenci görsel algılarını da kullanmaktadır. | ➢ Öğrencinin böyle olması gerekiyor, doğru gibi görünüyor gibi ifadeler kullanması.<br>➢ Öğrencinin böyle olduğunu biliyorum ama nasıl göstereceğimi bilmiyorum şeklinde bir ifade kullanması. |
| | **Temel Örnekler** | Öğrenci kendisine ve diğerlerine inandırıcı sözler söyleyerek önceden öğrendiği bir veya birkaç örneği kanıt olarak kullanmaktadır. | ➢ Öğrencinin verilen fonksiyondaki a ve b değişkenleri yerine kendisinin sayısal değerler vererek ifadenin eşit olduğunu göstermesi. |
| **Analitik Kanıt** | **Dönüştürülebilen** | Öğrenci tahminlerinde akıl yürütmeyi kullanarak özelden genelleme yoluna gitmektedir. Dönüştürülebilen kanıt şeması tümdengelimsel akıl yürütme ile öğrencilerin tahminlerinin sonuçlarını ve zihinsel işlemlerini içermektedir. | ➢ Öğrencinin verilen fonksiyondaki a ve b değişkenleri yerine kendisinin seçtiği birkaç tane farklı sayısal değeri vererek bir genellemeye ulaşması ve ifadenin eşit olduğunu göstermesi. |

Ek 2.'nin devamı

| | | | |
|---|---|---|---|
| | **Aksiyomatik** | Öğrenci tanımsız terimleri, tanımları, tahminleri, sonuçları, teoremleri ve neden-sonuç ilişkisini kullanmaktadır. Öğrenci aynı zamanda alternatif aksiyomlar da geliştirebilir. | ➢ Öğrencinin verilen f(x) fonksiyonu yardımıyla önce f(a)'yı ve daha sonra da f(b)'yi bularak bunları toplaması. Daha sonra da f( $\frac{a+b}{1+ab}$ )'yi bularak f(a)+f(b)= f( $\frac{a+b}{1+ab}$ ) olduğunu göstermesi. Bu süreçte de problemi çözerken $\log_x(a.b) = \log_x a + \log_x b$ özelliğini kullanmasıdır. |

## ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında Amasya Merzifon'da doğdu. İlkokulu Merzifon'da Haşim Dülger İlkokulu'nda, ortaokul ve liseyi Merzifon Anadolu Lisesi'nde okudu. Mezun olduktan sonra Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2000 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Amasya ili Gümüşhacıköy ilçesi Gümüşhacıköy Lisesi'ne öğretmen olarak atandı. 2001 yılında Abant İzzet Baysal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İlköğretim Matematik Eğitimi ABD'nda yüksek lisans eğitimine başladı. 2002 yılında açılan sınavla Abant İzzet Baysal Üniversitesi İlköğretim Matematik Eğitimi ABD'na Araştırma Görevlisi kadrosuna geçti. 2003 yılında "Farklı Sınıf Düzeylerindeki Öğrencilerin Matematik Problemlerini Kanıtlama Süreçleri"adlı tezini vererek yüksek lisansını tamamladı. 2004 yılı bahar döneminde doktora eğitimini yapmak üzere YÖK tarafından Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Araştırma Görevlisi olarak görevlendirildi. Halen 35. maddeye göre bu üniversitede Araştırma Görevlisi olarak çalışmakta olup, iyi derecede İngilizce bilmektedir. Evli ve bir çocuk annesidir.